G. BRUHAT. ■■■ COURS
DE

PHYSIQUE GÉNÉRALE

A L'USAGE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

ÉLECTRICITÉ



MASSON & Cie

COURS

D'ÉLECTRICITÉ

A LA MÊME LIBRAIRIE

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE
par GEORGES BRUHAT

ÉLECTRICITÉ, 1947, 5e édition. (*Deuxième tirage.*) 760 pages, 518 figures.
OPTIQUE, 1947, 4e édition. (*Deuxième tirage.*) 774 pages, 668 figures.
MÉCANIQUE PHYSIQUE, 1947, 3e édition. 710 pages, 605 figures.
THERMODYNAMIQUE, 1947, 4e édition. (*Deuxième tirage.*) 428 pages, 159 figures.
RECUEIL DE PROBLÈMES *pour le cours de Physique générale*, 1947, 2e édition. (*Deuxième tirage.*) 402 pages, 342 figures.

COURS DE CHIMIE *pour les classes de mathématiques spéciales et les candidats à la licence et à l'Agrégation*, publié sous la direction de J. LAMIRAND.
- I. — *Chimie générale et métalloïdes*, par J. LAMIRAND et Ch. BRUNOLD, 1946, 7e édition. 620 pages, 258 figures.
- II. — *Métaux*, par H. PARISELLE, 1947, 5e édition. 394 pages, 138 fig., 4 planches.
- III. — *Chimie organique*, par H. PARISELLE, 1947, 5e édition. 776 pages, 72 figures.

COURS DE PHYSIQUE, *pour les classes de mathématiques spéciales*, sous la direction de MM. FAIVRE-DUPAIGRE et J. LAMIRAND.
- I. — *Optique*, par Marc BRUHAT, 1946, 13e édition. 438 pages, 576 figures.
- II. — *Chaleur*, par M. JOYAL, 1947, 14e édition. 350 pages, 176 figures.
- III. — *Electricité*, par M. JOYAL, 1946, 14e édition. 392 pages, 277 figures.

OPTIQUE INSTRUMENTALE, par G.-A. BOUTRY, 1946, 540 pages, 412 figures.

COURS DE PHYSIQUE THÉORIQUE

LES TENSEURS EN MÉCANIQUE ET EN ÉLASTICITÉ, par Léon BRILLOUIN. 1946. 2e tirage, 372 pages, avec figures.

COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE, par G. VALIRON.
- I. — *Théorie des Fonctions*, 1942. 522 pages.
- II. — *Equations fonctionnelles. Applications*, 1945, 605 pages, 90 figures.

NOTIONS FONDAMENTALES DE CHIMIE GÉNÉRALE ET DE PHYSICO-CHIMIE, par A. TIAN, 1947. 2e édition, 302 pages, 29 figures.

MANUEL D'ANALYSE CHIMIQUE, par Henri MATHIEU (2 volumes).
- *Analyse volumétrique*, 1947, 2e édition. 484 pages, 47 figures.
- *Analyse qualitative*, 1947, 2e édition. 570 pages, 26 figures.

G. BRUHAT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
DIRECTEUR ADJOINT DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

A L'USAGE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

ÉLECTRICITÉ

CINQUIÈME ÉDITION REVUE ET CORRIGÉE

Deuxième tirage

MASSON & Cie, ÉDITEURS
120, BOULD SAINT-GERMAIN, PARIS VIe
1947

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est la reproduction d'un cours fait à la Faculté des Sciences de Lille pendant l'année scolaire 1922-1923. Un certain nombre des étudiants qui suivent à Lille les cours préparatoires au Certificat de Physique Générale se destinent à l'enseignement; mais beaucoup se destinent à l'industrie, soit qu'après avoir obtenu les certificats de Mécanique et de Physique de la Faculté ils aillent compléter leur formation dans une école technique supérieure, soit qu'une fois en possession de leur licence ils entrent directement à l'usine. Il semble, en effet, qu'à l'heure actuelle on essaye, de divers côtés, de réagir contre la tendance déplorable par laquelle nombre d'instituts techniques avaient cherché à assurer leur prospérité, en enseignant à leurs élèves les applications de la science à l'industrie, sans leur avoir donné au préalable les connaissances scientifiques nécessaires pour comprendre réellement le mécanisme de ces applications. Les écoles techniques supérieures n'admettent que des jeunes gens déjà pourvus de certains certificats de licence; les instituts qui doivent, pour vivre, conserver un recrutement plus large, encouragent les meilleurs de leurs élèves à préparer leur licence. Enfin, certaines grandes industries accueillent volontiers les licenciés ès sciences, et préfèrent demander aux jeunes ingénieurs une formation scientifique sérieuse, plutôt qu'une culture technique, qui ne peut être que superficielle, si elle ne s'appuie pas sur des études théoriques.

La présence d'un assez grand nombre de futurs ingénieurs parmi les candidats au Certificat de Physique Générale impose au Cours d'Électricité une certaine orientation. Il doit conserver un niveau scientifique assez élevé, pour leur apporter ce qu'ils ne peuvent pas trouver dans les cours de sciences appliquées; il doit leur donner une vue d'ensemble

de nos connaissances en électricité, pour leur permettre de rattacher à des idées générales les phénomènes particuliers qu'ils étudieront plus tard du point de vue technique; mais en même temps, il doit rester aussi concret que possible, et éviter les théories dont l'intérêt est surtout mathématique ou dont la base expérimentale est par trop fragile.

Les progrès de l'industrie et de la science sont d'ailleurs tellement liés que, si l'on s'en tient aux parties de la science qui ont reçu des applications industrielles, on se limite par là même aux parties les plus solidement établies, à celles dont la place est marquée dans un cours destiné à la licence d'enseignement ou à l'agrégation de physique. La généralisation de l'emploi du courant alternatif est venue donner un intérêt nouveau aux condensateurs et aux électromètres, dont la théorie suppose l'étude complète de l'électrostatique. La nécessité, pour un ingénieur-électricien, de pouvoir aborder l'étude technique de la radiotélégraphie, l'oblige à connaître la théorie par laquelle Maxwell a résumé, en une synthèse admirable, toutes les lois de l'électromagnétisme. La théorie électronique elle-même a reçu des applications si importantes, par les lampes-valves et les lampes à trois électrodes, qu'il n'est plus permis au technicien d'ignorer les expériences qui nous ont conduit à admettre l'existence de l'électron et à caractériser ses propriétés. Il doit aussi être prêt à exploiter le nouveau champ d'applications que nous ouvriront peut-être demain les expériences modernes sur les rayons positifs, les rayons X et la radioactivité et les notions nouvelles sur la constitution de la matière.

Telles sont les raisons qui m'ont guidé dans le choix des limites à donner à ce cours : on y trouvera l'exposé des lois du champ électrique et du champ magnétique puis des propriétés des courants continus et des courants alternatifs jusqu'à l'étude de la propagation du champ électromagnétique. Une partie est consacrée aux mesures électriques, dont l'intérêt est aussi grand pour le technicien que pour le physicien, une autre à l'étude expérimentale des théories électroniques. Enfin, comme ceux de nos élèves qui se destinent à la science pure ne doivent tout de même pas ignorer ce qu'est une dynamo, une dernière partie leur donnera quelques notions sommaires d'Électrotechnique.

J'ai constamment employé dans les formules la notation vectorielle, particulièrement appropriée à la représentation des grandeurs champ électrique et champ magnétique, qui sont des vecteurs; nos élèves sont familiarisés avec cette notation par leurs cours de Mathématiques Générales; j'ai néanmoins pris soin, pour faciliter la lecture de l'ouvrage à ceux qui ne la connaissent pas, d'en rappeler à chaque pas les principes et les définitions.

J'ai toujours cherché à rendre mon enseignement aussi expérimental que possible; je me suis attaché, dans ce livre, aussi bien à donner à chaque pas l'indication des expériences qui peuvent illustrer la théorie qu'à toujours préciser l'ordre de grandeur des phénomènes. Mais il est certain qu'un livre ne peut reproduire qu'une partie de l'enseignement, et que la lecture d'une description ne peut pas remplacer la vue d'un appareil ou d'une expérience, et surtout ne peut pas remplacer l'étude de l'appareil ou la répétition de l'expérience faite aux travaux pratiques. La Physique est une science expérimentale : elle s'apprend au laboratoire.

Cela n'empêche d'ailleurs pas qu'un livre peut rendre des services, soit pour guider ceux qui ne peuvent suivre un enseignement régulièrement organisé, soit pour fixer les souvenirs de ceux qui l'ont suivi une fois ou pour renouveler les connaissances de ceux qui sont spécialisés depuis longtemps. Je serais heureux que cet ouvrage pût rendre ces services : j'espère que le lecteur parvenu à la fin du volume aura acquis la culture générale scientifique indispensable pour aborder avec fruit une étude quelconque d'électrotechnique, et qu'il se sera en même temps suffisamment familiarisé avec la signification physique des lois fondamentales pour être en mesure de comprendre les vastes théories par lesquelles la Physique Mathématique moderne cherche à en donner une interprétation d'ensemble.

Je tiens à remercier ici M. Pauthenier, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille, qui a bien voulu revoir entièrement le manuscrit, et dont les avis m'ont été utiles sur de nombreux points, et M. Quinet, chef de travaux à la même Faculté, qui m'a apporte une collaboration appréciée pour la correction des épreuves.

Lille, décembre 1923. G. B.

Dans les deux premières éditions, j'avais écrit systématiquement toutes les formules dans celui des divers systèmes possibles d'unités qui leur donnait l'aspect le plus simple. Une telle présentation facilite évidemment l'étude des phénomènes, mais elle ne permet guère au lecteur de comprendre la signification réelle des conventions qui définissent les systèmes d'unités. Les nombreuses discussions — bien inutiles à mon avis — qui se sont élevées depuis quelques années sur les unités électriques et magnétiques ont montré qu'il était désirable que nos futurs

physiciens et ingénieurs fussent mis à même de se faire une opinion à ce sujet. C'est pour cette raison que j'ai modifié dans la présente édition l'écriture de la plupart des formules fondamentales, en y introduisant explicitement les coefficients ε_0 et μ_0 des deux lois de Coulomb de l'Électrostatique et du Magnétisme, et que j'ai précisé la nature des conventions de coordination qui définissent les divers systèmes, en suivant d'ailleurs d'assez près les idées développées par M. Abraham à la Société Française des Electriciens.

En ce qui concerne les unités pratiques, j'ai tenu compte du fait que la huitième Conférence Générale des Poids et Mesures a décidé que ces unités devraient désormais être définies comme des multiples décimaux des unités C. G. S. correspondantes; quoiqu'elles soient encore légales pour quelques années sans doute, je n'ai plus indiqué qu'accessoirement les définitions de l'ampère par l'électrolyse et de l'ohm par son étalon mercuriel. J'ai naturellement indiqué quelles sont les raisons des décisions prises, et j'ai complété le chapitre sur les mesures absolues par l'indication des derniers résultats obtenus.

Les divers chapitres du livre ont de même été complétés par l'indication des progrès récents. Parmi ces modifications, je citerai seulement celles qui sont relatives au chapitre sur la constitution de la matière : l'observation de nouvelles désintégrations atomiques et la découverte du neutron, puis de l'électron positif, sont venues détruire les idées généralement acceptées. Depuis deux ans, les faits nouveaux se succèdent rapidement et les théories sont en pleine évolution; il m'a paru nécessaire, pour montrer l'importance des résultats expérimentaux obtenus, de les grouper suivant les interprétations qu'on en donne aujourd'hui, sans me laisser arrêter par l'idée que ces interprétations seront sans doute modifiées demain.

Mai 1934. G. B

En dehors des modifications et des additions imposées par les recherches récentes, notamment en ce qui concerne les transmutations atomiques, il n'y a guère à signaler dans la 4e édition que la refonte du chapitre sur les Piles électriques. *Je tiens à remercier ici M. Bauer, professeur au Collège de France, à qui je dois d'avoir compris que, tandis que l'effet Volta mesure l'énergie libre, l'effet Peltier mesure l'énergie liée.*

Dans la 5e édition, j'ai ajouté un paragraphe donnant quelques indications sur l'état actuel de la théorie électronique des métaux, et j'ai complété le chapitre sur la constitution de la matière par l'exposé sommaire des principaux résultats acquis dans l'étude de la structure de la molécule.

Juillet 1943. G. B.

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTROSTATIQUE

CHAPITRE I

CHAMPS DE VECTEURS : CHAMP ÉLECTRIQUE

I. — *CHAMP DE VECTEURS ET POTENTIEL*

1. Définition d'un champ de vecteurs. — Lignes de force. — On sait **qu'un vecteur** est un segment de droite MN (*fig.* 1), ayant une origine M et une extrémité N. Ce segment est défini par son origine, ou *point d'application*, M, sa *direction*, qui est celle de la droite indéfinie MN, son *sens*, qui est le sens du mouvement d'un mobile allant de M vers N, et sa *grandeur*, qui est la longueur MN. Cette grandeur est mesurée par un nombre arithmétique, que nous représenterons par une lettre, par exemple A; nous représenterons symboliquement le vecteur par la même lettre, surmontée d'une flèche : $\vec{A}$. Analytiquement, le vecteur $\vec{A}$ est défini, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, par les coordonnées x, y, z du point d'application, et par les projections A_x, A_y, A_z du segment MN sur les trois axes ; ces projections sont mesurées par trois nombres algébriques, dont les signes sont définis par les conventions habituelles de la géométrie analytique.

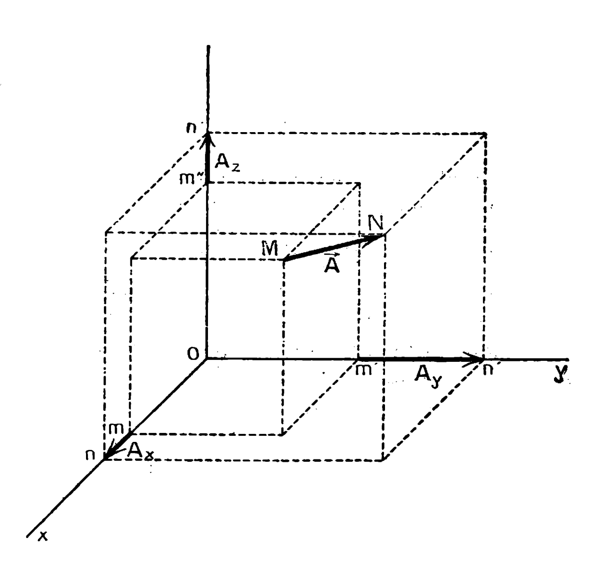


FIG. 1.

Si nous désignons par α, β, γ les angles que forme la demi-droite MN avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, on sait que l'on a :

$$A_x = A\cos\alpha; \qquad A_y = A\cos\beta; \qquad A_z = A\cos\gamma,$$

et :

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.$$

La notation $\vec{A}$ représente la direction, le sens et la grandeur du vecteur : elle représente symboliquement l'ensemble des trois nombres A_x, A_y, A_z.

Supposons qu'en chaque point M d'une région de l'espace on définisse un vecteur $\vec{A}$, dont les éléments sont connus lorsqu'on connaît la position du point M : on dira que l'on a ainsi défini un **champ de vecteurs.** Analytiquement, cela veut dire que l'on connaît les trois projections A_x, A_y, A_z du vecteur $\vec{A}$ lorsqu'on connaît les coordonnées xyz du point d'application M, c'est-à-dire que l'on se donne trois fonctions f, φ, ψ de ces coordonnées représentant ces trois projections :

$$A_x = f(x,y,z); \qquad A_y = \varphi(x,y,z); \qquad A_z = \psi(x,y,z).$$

En disant que nous nous donnons dans une région de l'espace un champ de vecteurs $\vec{A}$, nous exprimons sous une forme symbolique et abrégée le fait que nous nous donnons les trois fonctions f, φ et ψ.

On appelle **ligne de force** [1] d'un champ de vecteurs une courbe qui est tangente en chaque point à la direction du vecteur en ce point. Les lignes de force forment une famille de courbes, dont les équations différentielles sont :

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{\varphi(x,y\ z)} = \frac{dz}{\psi(x,y,z)}.$$

L'ensemble des lignes de force qui s'appuient sur une courbe fermée Γ forme une surface, que l'on appelle un *tube de force.*

La *somme,* ou résultante, de plusieurs vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, appliqués en un même point M, est un vecteur $\vec{R}$, que l'on obtient en construisant un polygone dont les côtés sont parallèles et égaux aux vecteurs composants (*fig.* 2). Sa projection sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des vecteurs composants. Cette addition géométrique des vecteurs se représente par l'égalité symbolique :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C},$$

qui est équivalente aux trois égalités algébriques :

$$R_x = A_x + B_x + C_x; \qquad R_y = A_y + B_y + C_y; \qquad R_z = A_z + B_z + C_z.$$

Lorsque nous aurons défini plusieurs champs de vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ dans la

[1] L'expression ligne de force provient de ce que, dans de nombreuses applications, le vecteur $\vec{A}$ représente une force (cf. § 10).

même région de l'espace, le champ résultant sera défini dans cette même région : le vecteur correspondant sera, en chaque point, la somme (géométrique) des vecteurs correspondant aux champs composants.

2. Circulation d'un vecteur le long d'une courbe. — On sait qu'on appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, de grandeurs A et B, et faisant entre eux l'angle θ, la quantité :

$$M = A \cdot B \cos \theta,$$

qui est égale au produit de l'un des vecteurs par la projection de l'autre sur celui-là. Nous représenterons cette opération par l'expression symbolique :

$$M = \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

La définition même montre que cette quantité n'est pas une grandeur géométrique comme un vecteur, mais une grandeur algébrique, c'est-à-dire ce que l'on appelle, par opposition à une quantité vectorielle, une *quantité scalaire ;* elle montre aussi que la valeur de ce produit est indépendante de l'ordre des facteurs. Enfin l'interprétation donnée à l'aide de la projection d'un des vecteurs sur l'autre montre, grâce au théorème des projections, que, si le vecteur $\vec{A}$ par exemple est la somme géométrique de plusieurs vecteurs $\vec{A_1}$, $\vec{A_2}$, etc. le produit scalaire $\vec{A}\vec{B}$ est la somme des produits scalaires $\vec{A_1}\vec{B}$, $\vec{A_2}\vec{B}$, etc. Si les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont définis analytiquement par leurs projections A_x A_y A_z, B_x B_y B_z, sur trois axes rectangulaires, on sait que l'expression du produit scalaire peut se mettre sous la forme :

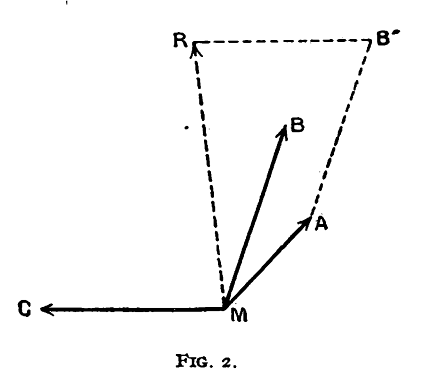


FIG. 2.

$$M = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.$$

Considérons maintenant, dans un champ de vecteurs, une courbe Γ allant d'un point M_1 à un point M_2 (*fig.* 3). Prenons sur la courbe Γ deux points très voisins M, M', tels que le sens de M vers M' soit le sens de M_1 vers M_2, et formons le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{MM'}$ du vecteur $\vec{MM'}$ et du vecteur $\vec{A}$ correspondant au point M. Supposons que toute la courbe Γ soit divisée par des points M,M',... en un grand nombre de très petits arcs, et formons la somme de tous les produits scalaires correspondants. Si les fonctions *f*, φ, ψ, définissant le vecteur $\vec{A}$, sont des fonctions continues, cette somme tend vers une limite déterminée lorsque le nombre des arcs augmente indéfiniment, et que chacun d'eux tend vers zéro. Cette limite s'appelle la *circulation* du vecteur $\vec{A}$ de M_1 à M_2 le long de la courbe

Γ. Cette quantité, qui est une somme de produits scalaires, est une quantité scalaire.

La définition donnée ci-dessus est la définition d'une intégrale curviligne. Le vecteur infiniment petit $\overrightarrow{MM'}$ représente un élément $\overrightarrow{ds}$ de la courbe Γ ; sa direction est celle de la tangente en M à la courbe Γ, son sens le sens de parcours de cette courbe de M_1 vers M_2. L'élément différentiel de l'intégrale curviligne est donc le produit scalaire $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{ds}$, et la circulation $\mathcal{C}_\Gamma$ se représentera par l'expression :

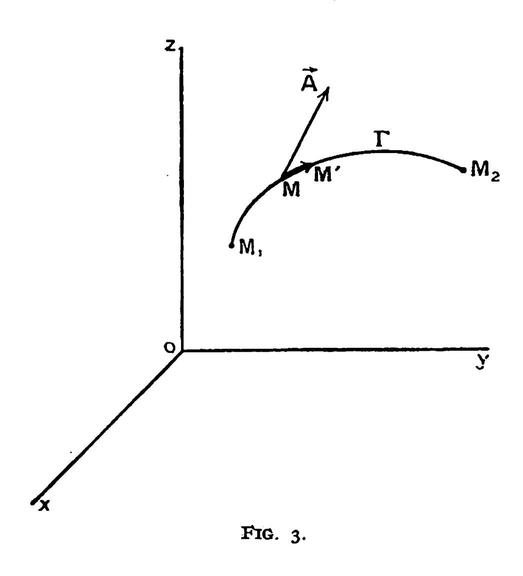


Fig. 3.

$$\mathcal{C}_\Gamma = \int_\Gamma \overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{ds}.$$

Si l'on exprime le produit scalaire $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{ds}$ en fonction des projections A_x, A_y, A_z, dx, dy, dz, des deux vecteurs, cette expression peut s'écrire :

$$\mathcal{C}_\Gamma = \int_\Gamma A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Cette dernière expression permet de calculer la circulation du vecteur $\overrightarrow{A}$ si les coordonnées d'un point de la courbe sont données en fonction d'un paramètre t ; il suffit d'exprimer A_x, A_y, A_z, dx, dy, dz, en fonction de ce paramètre t et de sa différentielle dt pour être ramené au calcul d'une intégrale d'une fonction d'une seule variable.

Considérons un champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$ résultant de l'addition géométrique de plusieurs champs composants ; d'après la propriété rappelée tout à l'heure des produits scalaires, chacun des produits $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{MM'}$, dont la somme définit la circulation du vecteur $\overrightarrow{A}$, est égal à la somme (algébrique) des produits correspondants relatifs aux champs composants : *la circulation du vecteur résultant est égale à la somme des circulations des vecteurs composants.*

3. Potentiel. — En général la circulation du vecteur $\overrightarrow{A}$ le long de la courbe Γ dépend de la position de tous les points de la courbe ; elle dépend des positions des extrémités M_1 et M_2, et aussi du chemin suivi entre ces points. Si le champ de vecteurs est tel qu'elle ne dépende que des positions des points M_1 et M_2, et qu'elle ne dépende pas du chemin suivi, on dit que *le champ dérive d'un potentiel.* La valeur $\mathcal{C}_{M_1M_2}$ de la circulation du point M_1 au point M_2 s'appelle la **différence de potentiel** $V_2{}^1$ entre les points M_1 et M_2.

Considérons dans un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel une courbe fermée C, et évaluons la circulation le long de cette courbe fermée, en partant d'une origine M et en revenant à une extrémité M confondue avec l'origine,

après avoir parcouru toute la courbe. La circulation, ne dépendant pas du chemin suivi, a la même valeur que si on avait parcouru un chemin nul : dans un champ qui dérive d'un potentiel, la circulation le long d'une courbe fermée quelconque est nulle. Réciproquement, si la circulation du vecteur $\vec{A}$ le long d'une courbe fermée quelconque est nulle, le champ dérive d'un potentiel. Considérons en effet, entre les deux points M_1M_2, deux courbes quelconques M_1NM_2, M_1PM_2 (*fig.* 4) ; par hypothèse la circulation le long du contour fermé $M_1NM_2PM_1$ est nulle ; cette circulation est la somme des circulations le long des deux courbes M_1NM_2 et M_2PM_1 ; on a :

$$\mathcal{C}_{M_1NM_2} + \mathcal{C}_{M_2PM_1} = 0.$$

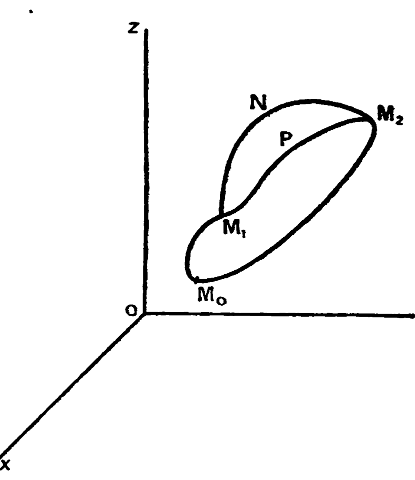


FIG. 4.

D'après la définition même de la circulation, la circulation le long de la courbe M_2PM_1 est égale en valeur absolue à la circulation le long de la courbe M_1PM_2, et de signe contraire. On a :

$$\mathcal{C}_{M_1NM_2} = \mathcal{C}_{M_1PM_2}.$$

Les deux courbes étant quelconques, on voit que la circulation le long d'une courbe ne dépend que de son origine et de son extrémité, et est indépendante du chemin suivi : le champ dérive d'un potentiel. On peut donc prendre, comme définition d'un champ qui dérive d'un potentiel, la propriété de la circulation d'être indépendante du chemin suivi, ou la propriété de la circulation le long d'une courbe fermée quelconque d'être nulle : ces deux définitions sont équivalentes.

La différence de potentiel V_2^1 entre les deux points M_1M_2 dépend de la position de ces deux points. Si ces positions sont données par leurs coordonnées par rapport à trois axes Ox, Oy, Oz, c'est une fonction $F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ de ces coordonnées. Prenons, dans la région de l'espace où est défini le champ de vecteurs $\vec{A}$, une origine arbitraire M_0, de coordonnées x_0, y_0, z_0 ; nous pouvons évaluer la différence de potentiel V_2^1 en calculant la circulation le long d'une courbe $M_1M_0M_2$ passant par le point M_0 ; nous avons :

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \mathcal{C}_{M_1M_0} + \mathcal{C}_{M_0M_2} = \mathcal{C}_{M_1M_0} - \mathcal{C}_{M_2M_0},$$

ou :

$$V_2^1 = V_0^1 - V_0^2 = F(x_1, y_1, z_1, x_0, y_0, z_0) - F(x_2, y_2, z_2\, x_0, y_0, z_0).$$

Les coordonnées $x_0y_0z_0$ du point origine M_0 sont des constantes ; nous pouvons donc considérer la fonction $F(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ comme une fonction des trois seules variables x, y, z, que nous écrirons simplement $F(x, y, z)$. De même nous désignerons maintenant par V_1 et V_2 les quantités désignées précédem-

ment par V_0^1 et V_0^2, qui sont les valeurs que prend la fonction F (x, y, z) quand on y substitue à x, y, z les valeurs des coordonnées des points M_1 et M_2. On peut alors écrire :

$$\mathfrak{C}_{M_1M_2} = V_2^1 = V_1 - V_2 = F_{(x_1, y_1, z_1)} - F_{(x_2, y_2, z_2)}.$$

La différence de potentiel entre deux points est égale à la différence des valeurs que prend une même fonction des coordonnées, $V = F(x, y, z)$, pour les coordonnées de ces deux points. Cette fonction s'appelle **la fonction potentiel;** sa valeur en un point est le potentiel en ce point. *La circulation du vecteur* $\vec{A}$ *du point* M_1 *au point* M_2 *est égale en valeur absolue et de signe contraire à la variation du potentiel lorsque l'on passe du point* M_1 *au point* M_2.

Il faut remarquer que, *tandis que la différence de potentiel est définie sans ambiguïté, la fonction potentiel n'est définie qu'à une constante arbitraire près.* Toute fonction de la forme $F(x, y, z) + C^{te}$ jouit des propriétés de la fonction $F(x, y, z)$ indiquées ci-dessus, la constante additive disparaissant lorsqu'on prend la différence des valeurs correspondant aux deux points M_1M_2. Nous pouvons interpréter l'existence de cette constante arbitraire en remarquant que nous avons défini la fonction potentiel $F(x, y, z)$ comme étant la différence de potentiel entre le point M de coordonnées xyz et le point M_0 ; nous avons ainsi attribué arbitrairement au potentiel du point M_0 une valeur égale à zéro. Nous aurions pu aussi bien lui attribuer une valeur arbitraire C : nous aurions alors dû prendre pour potentiel du point M la valeur $F(x, y, z) + C$. Ou bien encore, nous aurions pu choisir une autre origine des potentiels M'_0 ; le potentiel du point M_0 aurait eu une certaine valeur C, et le potentiel du point M aurait eu la valeur $F(x, y, z) + C$.

D'après leurs définitions mêmes, les propriétés de la différence de potentiel et du potentiel sont les propriétés de la circulation. Comme la circulation, ce sont des quantités scalaires. Si l'on considère plusieurs champs de vecteurs dérivant chacun d'un potentiel, le champ résultant de l'addition (géométrique) de ces champs dérive aussi d'un potentiel, et la différence de potentiel entre deux points correspondant au champ résultant est la somme (algébrique) des différences de potentiel correspondant aux champs composants. Enfin, si l'on choisit le même point M_0 comme origine des potentiels pour les différents champs, *la fonction potentiel du champ résultant est la somme des fonctions potentiel des champs composants.*

4. Représentation d'un champ de vecteurs par le potentiel. — Reprenons l'expression analytique de la circulation du point M_1 au point M_2 le long de la courbe Γ (§ 2) :

$$\mathfrak{C}_\Gamma = \int_\Gamma A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Pour que le champ dérive d'un potentiel, c'est-à-dire pour que l'intégrale soit indépendante du chemin suivi, il faut que l'expression qui figure sous le signe d'intégration soit une différentielle totale exacte. Si nous désignons par

U (x, y, z) la fonction correspondante, cette différentielle totale peut s'écrire :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

et l'on a :

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad A_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

En évaluant de deux façons les dérivées secondes $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, on obtient les relations :

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Ces trois conditions sont donc nécessaires pour que le champ dérive d'un potentiel. On démontre également qu'elles sont suffisantes, mais seulement sous certaines restrictions. La valeur de la circulation entre les points M_1 et M_2 peut s'exprimer au moyen de la fonction U : l'intégration de la différentielle totale donne, en désignant par U_1 et U_2 les valeurs de la fonction U aux points M_1 et M_2 :

$$\mathcal{E}_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} dU = U_2 - U_1.$$

Si la fonction U est uniforme, cette circulation est indépendante du chemin suivi, le champ dérive d'un potentiel ; mais, si la fonction U est à déterminations multiples, comme par exemple un arc tangente, la détermination à choisir peut dépendre du chemin suivi, et la circulation n'est pas indépendante de ce chemin : le champ ne dérive pas d'un potentiel. Nous rencontrerons ce cas dans l'étude du champ magnétique des courants électriques (voir § 123).

La comparaison de la dernière valeur trouvée pour la circulation avec celle du paragraphe précédent ($\mathcal{E}_{M_1M_2} = V_1 - V_2$) montre que la fonction U est égale à $-$ V. Les expressions des composantes du vecteur $\vec{A}$ en fonction du potentiel sont donc :

$$A_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad A_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad A_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

On réunit ces trois équations en une seule par l'emploi de la notation vectorielle. Dans cette notation on appelle **gradient** d'une quantité scalaire V, et l'on désigne par $\overrightarrow{\text{grad}}$ V, un vecteur dont les composantes sont $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$; la position et la grandeur de ce vecteur sont d'ailleurs indépendantes du choix des axes de coordonnées. On a alors :

$$\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V.$$

Le vecteur champ est égal au gradient du potentiel changé de signe.

On peut donc, au lieu de se donner un champ de vecteurs par la valeur du

vecteur en chaque point, se le donner par la valeur du potentiel en chaque point, puisque l'on peut calculer le vecteur à partir du potentiel. On n'a ainsi à définir qu'une grandeur scalaire au lieu d'une grandeur vectorielle, c'est-à-dire une seule fonction F au lieu de trois fonctions f, φ, ψ. De même, si l'on cherche le champ résultant de plusieurs champs composants, les opérations sur le potentiel se réduisent à des additions algébriques plus simples que des additions géométriques. C'est donc à l'aide du potentiel que l'on effectuera le plus souvent les calculs.

Le potentiel se prête également bien à la représentation géométrique du champ. On considérera pour cette représentation des **surfaces équipotentielles :** une surface équipotentielle est une surface telle que le potentiel ait même valeur en tous ses points ; c'est une surface dont l'équation est :

$$V = C^{te}, \qquad \text{ou} \qquad F(x,y,z) = C^{te}.$$

La normale en un point d'une surface équipotentielle a pour paramètres directeurs $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$; elle est dirigée suivant le vecteur champ en ce point. Cela correspond au fait que la circulation du vecteur $\vec{A}$ est nulle le long d'une courbe quelconque de la surface équipotentielle, d'après la définition même du potentiel : le produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ par un élément vectoriel quelconque $\overrightarrow{MM'}$ pris sur la surface est nul, le vecteur $\vec{A}$ est, par conséquent, normal à cet élément $\overrightarrow{MM'}$. Si donc on représente le champ du vecteur $\vec{A}$ par ses surfaces équipotentielles, on sait que le vecteur $\vec{A}$ en chaque point est normal à la surface équipotentielle qui passe par ce point : les lignes de force du champ sont les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles.

Si l'on a représenté les différentes surfaces équipotentielles, on peut déduire aussi de cette représentation la grandeur du vecteur $\vec{A}$. Considérons en effet deux surfaces équipotentielles voisines, correspondant aux valeurs V et $V + v$ du potentiel (*fig.* 5), et considérons les traces M et M' sur ces surfaces d'une même ligne de force, normale aux deux surfaces. La direction du vecteur $\vec{A}$ au point M est la tangente à cette ligne de force ; la circulation de ce vecteur de M en M', le long du petit élément MM', est égale au produit A.MM' de la grandeur A du vecteur par la longueur de l'élément MM', la grandeur A étant comptée positivement dans le sens de M vers M' ; elle est aussi égale à la différence de potentiel $V_M - V_{M'} = -v$, c'est-à-dire que l'on a :

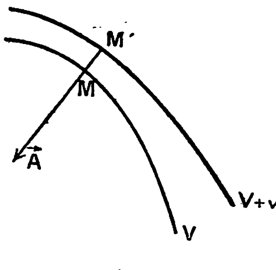


FIG. 5.

$$A = \frac{-v}{MM'}.$$

Le vecteur $\vec{A}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants. Aux différents points de la surface équipotentielle V, sa grandeur A est inversement

proportionnelle à la distance normale MM′ de deux surfaces équipotentielles voisines. Si l'on a tracé toute une série de surfaces équipotentielles correspondant à des valeurs équidistantes du potentiel, V, $V + v$, $V + 2v$, ..., $V + pv$..., on voit que *le vecteur* $\vec{A}$ *en un point quelconque est normal à la surface équipotentielle, dirigé vers les potentiels décroissants, et inversement proportionnel à la distance normale en ce point de deux surfaces équipotentielles voisines,* puisque la différence de potentiel v entre ces deux surfaces est toujours la même. On peut comparer cette représentation du champ de vecteurs par des surfaces équipotentielles équidistantes à la représentation topographique de la pente d'un terrain par des lignes de niveau équidistantes : les lignes de plus grande pente sont les trajectoires orthogonales de ces lignes de niveau, et la pente en un point est inversement proportionnelle à la distance de deux lignes de niveau consécutives.

II. — *FLUX D'UN VECTEUR A TRAVERS UNE SURFACE*

5. Définition du flux. — Considérons, en un point M d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ (*fig.* 6), un élément de surface, dont l'aire est dS ; soit MN la normale à cet élément : nous supposerons que l'on a choisi sur cette normale un sens positif. Nous conviendrons de représenter cet élément de surface par un vecteur $\vec{dS}$, porté par la normale $\vec{MN}$, dirigé dans le sens positif de cette normale, et de grandeur égale à l'aire dS.

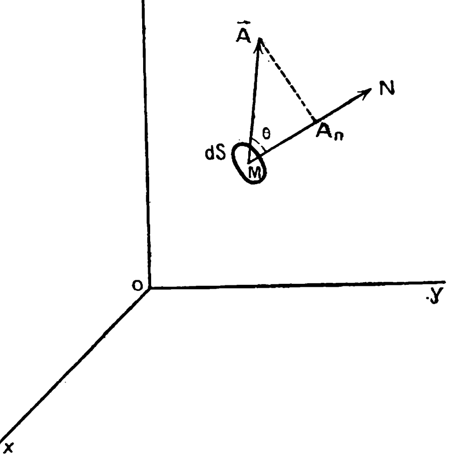


FIG. 6.

On appelle **flux** (1) *du vecteur* $\vec{A}$ *à travers l'élément de surface* dS le produit scalaire :

$$d\Phi = \vec{A} \cdot \vec{dS}.$$

D'après sa définition, le flux est une quantité scalaire ; sa valeur est égale à $A.dS \cos\theta$, en désignant par θ l'angle du vecteur $\vec{A}$ avec la direction positive de la normale à la surface, ou encore à $A_n dS$, en désignant par A_n la projection du vecteur $\vec{A}$ sur la direction positive de cette normale. Il est représenté par le volume du cylindre dont la base est l'élément de surface dS, dont les génératrices, parallèles au vecteur $\vec{A}$, ont la longueur A, et dont la hauteur est par conséquent A_n. Supposons le vecteur $\vec{A}$ défini analytiquement par

(1) On emploie aussi quelquefois l'expression de *flux de force*.

ses projections A_x, A_y, A_z sur trois axes de coordonnées rectangulaires, et la normale à la surface définie par ses cosinus directeurs α, β, γ : les projections du vecteur $\overrightarrow{dS}$ sont αdS, βdS, γdS; elles sont égales aux projections dS_{yz}, dS_{xz}, dS_{xy} de l'aire dS sur les trois plans de coordonnées. L'expression analytique du flux est :

$$d\Phi = (\alpha A_x + \beta A_y + \gamma A_z)\, dS = A_x dS_{yz} + A_y dS_{zx} + A_z dS_{xy}.$$

Considérons maintenant dans le champ de vecteurs A une surface finie Σ ; le sens positif de la normale aux différents points sera défini par continuité à partir de l'un d'entre eux. *Le flux Φ du vecteur $\vec{A}$ à travers la surface* Σ est la somme des flux élémentaires à travers les éléments de surface en lesquels on peut décomposer la surface Σ. Il s'exprime par une intégrale de surface étendue à la surface Σ, dont l'élément différentiel est le flux élémentaire $d\Phi$. Nous pouvons écrire cette expression en prenant l'une ou l'autre des formes données pour $d\Phi$ (dans la dernière, nous remplaçons l'élément différentiel dS_{yz} de la surface dans le plan Oyz par la notation habituelle $dydz$) :

$$\Phi = \iint_\Sigma \vec{A}\,\overrightarrow{dS} = \iint_\Sigma A_n dS = \iint_\Sigma A_x dydz + A_y dzdx + A_z dxdy.$$

Remarquons que le flux n'est complètement défini que lorsqu'on a choisi un sens positif sur les normales à la surface. Dans le cas particulier où la surface Σ est une surface fermée, nous conviendrons toujours de choisir comme sens positif le sens dirigé de l'intérieur vers l'extérieur (*fig.* 7) : nous dirons que nous calculons le flux qui sort de la surface fermée.

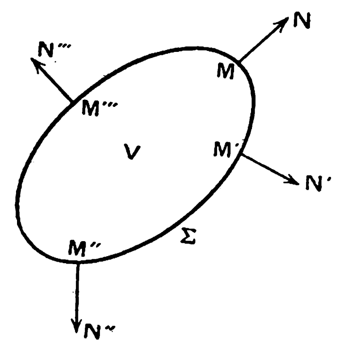


Fig. 7.

Des propriétés du produit scalaire résulte immédiatement que, si le vecteur $\vec{A}$ est la somme (géométrique) de plusieurs vecteurs, le flux élémentaire du vecteur $\vec{A}$ est la somme (algébrique) des flux élémentaires des vecteurs composants. *Le flux Φ du vecteur résultant $\vec{A}$ à travers une surface quelconque Σ est la somme des flux des vecteurs composants.*

6. Théorème de Green. — L'intégrale de surface qui donne le flux sortant d'une surface fermée Σ peut se transformer en une intégrale de volume, étendue au volume V limité par cette surface, par la formule de Green :

$$\Phi = \iint_\Sigma A_x dydz + A_y dzdx + A_z dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Nous rappellerons simplement la démonstration de cette formule dans le cas où le volume V est le volume d'un parallélépipède élémentaire,

MNPQRSTU, dont les côtés, parallèles aux axes de coordonnées (*fig.* 8), ont pour longueur dx, dy, dz. Soient A_x, A_y, A_z les valeurs des composantes du vecteur $\vec{A}$ au centre C du parallélépipède, $\frac{\partial A_x}{\partial x}$, ..., les valeurs des dérivées partielles au même point. Le flux qui sort du parallélépipède est la somme des flux à travers les six faces. Prenons d'abord les faces perpendiculaires à Ox, de surfaces $dydz$, de centres D, D' : la direction positive de la normale est, pour la face D', la direction positive de l'axe Ox, et pour la face D, la direction négative. La composante du vecteur $\vec{A}$ suivant la normale est la composante suivant Ox ; elle a pour valeur, d'après son développement en série réduit au premier terme, en D : $A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$, et en D' : $A_x + \frac{dA_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$. La somme des flux à travers les deux faces DD' est donc :

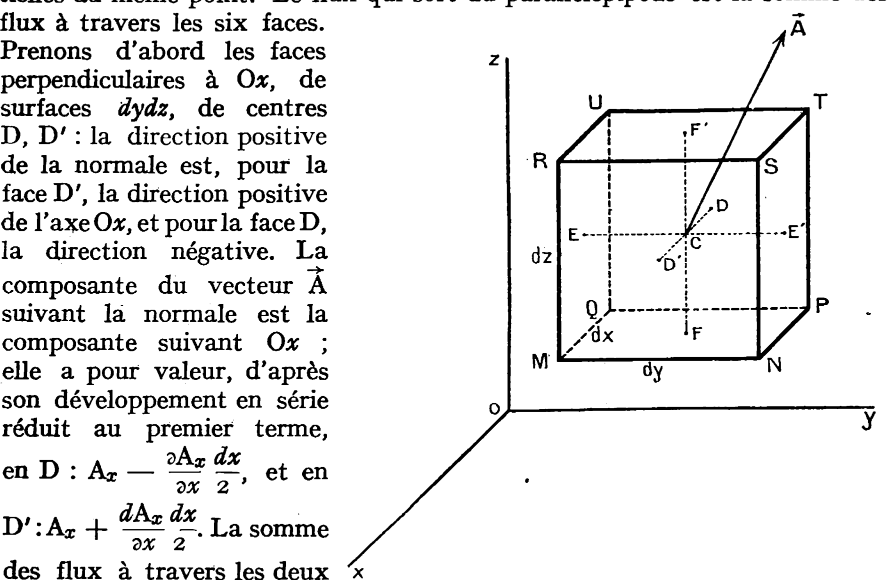


FIG. 8.

$$-\left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz + \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz = \frac{\partial A_x}{\partial x}\,dxdydz.$$

On obtient deux autres termes analogues pour les flux à travers les faces de centres EE' et FF', et le flux total qui sort du parallélépipède est :

$$\Phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Il suffit, pour étendre la démonstration à un volume V fini, de le décomposer en parallélépipèdes élémentaires.

Dans la notation vectorielle, on appelle **divergence** d'un vecteur $\vec{A}$, et l'on désigne par div $\vec{A}$, une quantité scalaire égale à $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$. On peut montrer, en appliquant les formules des changements de coordonnées, que cette quantité ne dépend pas du choix des axes. De sa forme linéaire résulte immédiatement que, si le vecteur $\vec{A}$ est la somme (géométrique) de plusieurs vecteurs, sa divergence est la somme (algébrique) des divergences des vecteurs composants. Avec cette notation, et en désignant par dv l'élément différentiel de

volume désigné précédemment par $dx\,dy\,dz$, la formule de Green peut s'écrire :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A}\,\vec{dS} = \iiint_{V} \operatorname{div}\vec{A}\,.\,dv.$$

Le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur, étendue au volume limité par cette surface.

Si le champ de vecteurs dérive d'un potentiel V, les composantes A_x, A_y, A_z du vecteur $\vec{A}$ sont, au signe près, les dérivées partielles du potentiel. L'expression de la divergence du vecteur $\vec{A}$ devient alors :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -\,\Delta V.$$

La quantité désignée par le symbole ΔV s'appelle la **laplacienne** de la fonction V ; elle est égale à la divergence de son gradient, et sa valeur est indépendante du choix des axes de coordonnées. En introduisant cette quantité dans la formule de Green, cette formule prend la forme :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A}\,\vec{dS} = -\iiint_{V} \Delta V\,.\,dv.$$

7. Flux conservatif. — Si un champ de vecteurs $\vec{A}$ est tel que le flux du vecteur $\vec{A}$ à travers une surface fermée Σ quelconque soit nul, on dit que *le flux du vecteur $\vec{A}$ est conservatif*. Il est évident que le champ résultant de l'addition de plusieurs champs dont les flux sont conservatifs jouit de la même propriété.

Considérons dans un tel champ une courbe fermée Γ (*fig.* 9) et deux surfaces Σ_1 et Σ_2 ayant toutes deux comme contour la courbe Γ. Choisissons comme sens positifs sur les normales aux deux surfaces des sens M_1N_1, M_2N_2 tels qu'ils se correspondent si l'on amène la surface Σ_1 à devenir la surface Σ_2 par une déformation continue, et soient Φ_1 et Φ_2 les flux à travers les surfaces Σ_1 et Σ_2. Par définition, le flux Φ à travers la surface fermée Σ constituée par les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 est nul ; ce flux est la somme des flux à travers les surfaces Σ_1 et Σ_2, mais il faut prendre maintenant comme sens positif sur les normales le sens dirigé vers l'extérieur de la surface Σ, il faut changer pour l'une des surfaces le sens positif choisi. Dans le cas de la figure il faut prendre comme sens positif des normales à la surface Σ_2 le sens $\overrightarrow{M_2N'_2}$ opposé au sens $\overrightarrow{M_2N_2}$, et l'on aura $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. Comme ce flux est nul, on a $\Phi_1 = \Phi_2$: dans un champ dont le flux est conservatif, *le flux à travers une surface ne dépend que du contour qui la limite.*

Ce flux doit donc pouvoir s'exprimer en fonction de ce contour seul ; il peut effectivement se mettre sous la forme d'une intégrale curviligne prise le long du contour, à l'aide d'un vecteur nouveau appelé potentiel-vecteur. Nous utiliserons plus tard cette propriété : nous donnerons à ce moment les définitions et les formules correspondantes (§ 120).

Réciproquement, si le champ de vecteurs jouit de la propriété que le flux à

travers une surface ne dépend que du contour qui la limite, le flux à travers une surface fermée quelconque Σ est nul, le flux est conservatif : il suffit pour le démontrer de partager la surface Σ en deux parties Σ_1 et Σ_2 par une courbe Γ tracée sur la surface, et de reprendre le raisonnement précédent ; on a encore $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, avec $\Phi_1 = \Phi_2$, donc on a $\Phi = 0$.

Considérons un tube de force T et les sections Σ_1 et Σ_2 de ce tube de force

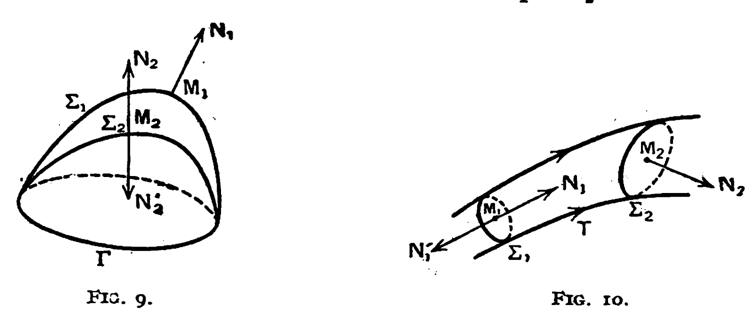


Fig. 9. Fig. 10.

par deux surfaces quelconques (*fig.* 10). Choisissons comme sens positifs M_1N_1, M_2N_2 sur les normales aux surfaces Σ_1 et Σ_2 le sens des lignes de force, c'est-à-dire le sens qui deviendrait le sens du vecteur $\vec{A}$ si l'on amenait les surfaces Σ_1 et Σ_2 par des déformations continues à être normales aux lignes de force ; soient Φ_1 et Φ_2 les flux à travers ces surfaces. Évaluons le flux Φ à travers la surface fermée Σ formée par le tube de force T entre les sections Σ_1 et Σ_2 et les surfaces Σ_1 et Σ_2. Le flux à travers la surface du tube de force T est nul, parce qu'en chaque point le vecteur $\vec{A}$ est tangent à cette surface (les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{dS}$ sont perpendiculaires, et l'on a $\cos\theta = 0$) ; dans l'évaluation des flux à travers les surfaces Σ_1 et Σ_2, il faut changer l'un des sens positifs choisis, pour prendre le sens dirigé vers l'extérieur de la surface fermée : dans le cas de la figure, il faut changer le sens de la normale à la surface Σ_1, et l'on a $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. Si l'on a $\Phi = 0$ on aura $\Phi_2 = \Phi_1$: ***dans un champ dont le flux est conservatif, le flux est le même à travers les différentes sections d'un tube de force.***

Si le tube de force est suffisamment étroit, et si les sections Σ_1 et Σ_2 sont des sections normales d'aires S_1 et S_2, les flux Φ_1 et Φ_2 sont égaux respectivement à $S_1.A_1$ et $S_2.A_2$, en désignant par A_1 et A_2 les grandeurs du vecteur $\vec{A}$ aux points M_1 et M_2. Si le flux est conservatif, ces flux sont égaux, *la grandeur du vecteur* $\vec{A}$ *varie en raison inverse de la section normale du tube de force.* On voit que la représentation géométrique d'un champ de vecteurs par les lignes de force, qui donne immédiatement la direction du vecteur en chaque point, par la tangente à la ligne de force, donne aussi, dans le cas du flux conservatif, la grandeur du vecteur, d'après l'écartement des lignes de force.

Le théorème de Green permet immédiatement d'exprimer la condition nécessaire et suffisante pour que le flux soit conservatif. D'après ce théorème, le flux à travers une surface fermée Σ est égale à l'intégrale, étendue au volume V qu'elle limite, de la divergence du vecteur $\vec{A}$: pour que cette intégrale soit nulle quelle que soit la surface Σ, c'est-à-dire quel que soit le volume V, *il faut et il*

suffit que cette divergence soit nulle en tous les points du champ. La condition peut s'écrire :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Si le champ dérive d'un potentiel **V**, on peut la mettre sous la forme :

$$\Delta V = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Cette dernière relation est connue sous le nom d'**équation de Laplace.**

8. Champ uniforme. — Comme application des différentes relations que nous avons établies, considérons un champ de vecteurs $\vec{A}$ tel que le vecteur $\vec{A}$ ait une direction constante, et cherchons à quelles conditions il doit satisfaire pour que le champ dérive d'un potentiel et que son flux soit conservatif.

Choisissons comme axes de coordonnées des axes tels que l'axe Oz soit parallèle à la direction fixe du vecteur $\vec{A}$. Les surfaces équipotentielles, normales en chaque point à la direction Oz, sont des plans parallèles au plan xOy ; la distance de deux surfaces équipotentielles est constante, donc la grandeur du vecteur $\vec{A}$ est constante en tous les points d'un plan parallèle à xOy ; elle ne dépend que de la valeur de z. Nous retrouverons ce résultat analytiquement en écrivant les conditions qui expriment que le champ dérive d'un potentiel (§ 4) : les composantes A_x et A_y sont identiquement nulles, et ces trois conditions se réduisent à deux :

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0.$$

La grandeur A_z du vecteur $\vec{A}$ ne dépend pas de x et de y, c'est une fonction de z seul, $A_z = \psi(z)$.

Exprimons maintenant que le flux est conservatif. Les lignes de force sont parallèles entre elles et à l'axe Oz ; la section d'un tube de force est constante, la grandeur du vecteur $\vec{A}$ est constante en tous les points d'une parallèle à Oz, donc en tous les points de l'espace. Analytiquement, la condition donnée au paragraphe précédent pour que le flux soit conservatif se réduit à :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

La grandeur A_z du vecteur $\vec{A}$ ne dépend pas de z, elle ne dépend déjà pas de x et de y, c'est une constante. Un tel champ de vecteurs dont la direction et la grandeur sont constantes est ce qu'on appelle un **champ uniforme.**

Désignons par $-g$ la valeur constante de A_z ; la fonction potentiel est définie par les relations :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = g ;$$

elle est donc :

$$V = gz + C^{te}.$$

Le flux à travers un élément de surface dS est, en prenant pour sens positif de la normale celui qui se projette sur le sens positif de Oz :

$$d\Phi = -g \, . \, dS_{xy},$$

et le flux à travers une surface Σ dont la projection sur le plan des xy a une aire S_{xy} est :

$$\Phi = -g \, . \, S_{xy}.$$

III. — *EXEMPLES DE CHAMPS DE VECTEURS : CHAMP ÉLECTRIQUE*

9. Champ de vitesses.—Considérons l'écoulement d'un liquide : en chaque point de l'espace où s'écoule le liquide existe une certaine vitesse d'écoulement qui est représentée par un vecteur, et le phénomène peut être représenté par un champ de vecteurs vitesse. Les conditions pour que ce champ dérive d'un potentiel sont les conditions pour que l'écoulement ne présente pas de tourbillons ; la fonction potentiel dont dérive le champ si ces conditions sont satisfaites s'appelle le potentiel des vitesses.

Le flux à travers un élément de surface dS est représenté par le volume du cylindre dont la base est l'élément de surface dS et dont les génératrices sont le vecteur vitesse, c'est-à-dire l'espace parcouru par le liquide dans l'unité de temps : c'est le volume du liquide qui s'écoule à travers l'élément de surface dS dans l'unité de temps. Le flux a donc ici une signification physique particulièrement simple ; le flux à travers une surface Σ quelconque est le volume du liquide qui traverse cette surface dans l'unité du temps. Le flux qui sort d'une surface fermée est le volume de liquide qui sort de cette surface dans l'unité de temps ; si le liquide est incompressible, la quantité de liquide comprise à l'intérieur de la surface fermée est constante, la quantité totale qui en sort est nulle, le flux est nécessairement conservatif. Le champ de vitesses relatif à l'écoulement d'un liquide incompressible nous fournit donc un exemple de champ dont le flux est conservatif. Un tube de force représente un véritable canal à travers lequel le liquide s'écoule sans en sortir ; le flux à travers ses différentes sections est constant, c'est le débit du liquide dans ce canal.

10. Champ de forces. — Supposons qu'un point matériel placé en un point M de l'espace y soit soumis à une force $\vec{F}$ qui ne dépende que de la position du point M. Les vecteurs $\vec{F}$ définissent un champ de vecteurs, que l'on appelle un champ de forces. La circulation élémentaire $\vec{F} . \overrightarrow{MM'}$ est le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pour le petit déplacement $\overrightarrow{MM'}$; la circulation le long de la courbe Γ est égale au travail de la force $\vec{F}$ le long de cette courbe.

Si ce travail ne dépend pas du chemin suivi, le champ dérive d'un potentiel, et l'on voit que la notion de potentiel est ici susceptible d'une interprétation mécanique simple : *le travail effectué par la force lorsque son point d'application se déplace de* M_1 *en* M_2 *est égal à la différence de potentiel entre ces deux points, à la diminution de la fonction potentiel lorsqu'on passe du premier au second.* Le potentiel, permettant d'exprimer immédiatement le travail, pourra être utilisé commodément pour certains calculs, par exemple pour l'application du théorème des forces vives. La fonction U, que nous avons définie au paragraphe 4 comme égale à la fonction potentiel changée de signe, et dont les dérivées partielles sont les composantes de la force, est la fonction de forces.

Si le champ de forces dérive d'un potentiel, le travail effectué par la force lorsque son point d'application décrit une courbe fermée est nul ; sinon, il existe des courbes fermées pour lesquelles ce travail n'est pas nul, et l'on peut choisir le sens de circulation de façon qu'il soit positif. Le système constitué par le champ de forces et le point matériel est revenu à son état initial lorsque le point a décrit entièrement la courbe fermée, et il a fourni du travail ; d'après le principe de la conservation de l'énergie, il faut nécessairement qu'il y ait eu quelque part une dépense correspondante d'énergie. Si donc il n'est pas nécessaire de dépenser de l'énergie pour entretenir le champ de forces pendant le déplacement du point matériel, le champ dérive certainement d'un potentiel : s'il n'en dérivait pas, on aurait réalisé le mouvement perpétuel. La plupart des champs de forces que nous aurons à étudier sont dans ce cas ; toutefois, nous rencontrerons, lors de l'étude du champ magnétique des courants, des champs de forces tels qu'il faille dépenser de l'énergie pour les entretenir lorsqu'on déplace d'une certaine façon le point soumis à l'action de la force : ces derniers champs ne dérivent pas d'un potentiel.

11. Champ d'accélérations : champ de pesanteur. — Supposons qu'un point matériel de masse m placé en un point M de l'espace y soit soumis à une force $\vec{F}$, dont la direction ne dépend que de la position du point M et dont la grandeur est proportionnelle à la masse m. Le point matériel prend alors une accélération $\vec{g}$, qui est représentée par un vecteur qui ne dépend que de la position du point M. L'ensemble de ces vecteurs accélération constitue un champ de vecteurs.

L'exemple d'un tel champ nous est donné par l'étude de la pesanteur au voisinage de la surface de la terre : la première loi de la chute des corps exprime justement que l'accélération $\vec{g}$ est indépendante de la nature du corps m. Comme d'ailleurs la direction de ce vecteur $\vec{g}$ (direction de la verticale) et sa grandeur ne varient que très lentement, on peut sans inconvénient considérer, au lieu d'un point matériel, un corps de dimensions finies, et de masse m : ce corps, placé en un point M du champ de pesanteur terrestre, y est soumis à une force $\vec{F}$, qui est son poids, *et qui s'exprime par le produit de deux facteurs, une quantité scalaire* m, *qui ne dépend que du corps soumis à l'action du champ, et un vecteur* $\vec{g}$, *qui ne dépend que du point du champ où l'on place le corps* :

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

De cette loi on peut déduire les conséquences suivantes :

Si au même point M, on place une série de corps de masses m, m', m''..., ils sont soumis à des forces $\vec{F}, \vec{F'}, \vec{F''}$..., qui sont proportionnelles à leurs masses, et le rapport constant de la force à la masse représente l'accélération de la pesanteur. On peut écrire, soit :

$$\frac{\vec{F}}{\vec{F'}} = \frac{m}{m'}, \qquad \frac{\vec{F}}{\vec{F''}} = \frac{m}{m''},$$

soit :

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F'}}{m'} = \frac{\vec{F''}}{m''} = \dots = \vec{g}.$$

Si l'on a pris comme grandeur mécanique fondamentale la force, ces relations peuvent servir à définir la masse. Expérimentalement, on détermine le rapport des masses de deux corps en mesurant à l'aide d'une balance le rapport des forces qui agissent sur ces deux corps en un même point du champ de pesanteur terrestre.

Si au contraire on place un même corps de masse m en différents points M, M_1, M_2..., du champ terrestre, il est soumis en ces différents points à des forces $\vec{F}, \vec{F_1}, \vec{F_2}$..., qui sont proportionnelles aux accélérations $\vec{g}, \vec{g_1}, \vec{g_2}$..., de la pesanteur en ces points, et l'on a :

$$\frac{F}{F_1} = \frac{g}{g_1}, \qquad \frac{F}{F_2} = \frac{g}{g_2},$$

ou encore :

$$\frac{\vec{F}}{\vec{g}} = \frac{\vec{F_1}}{\vec{g_1}} = \frac{\vec{F_2}}{\vec{g_2}} = \dots = m.$$

Expérimentalement, on étudie les variations de la pesanteur à la surface de la terre en étudiant les variations de la force qui agit sur un corps d'épreuve : ce corps est un pendule invariable, et on détermine le rapport des forces par la mesure du rapport des durées d'oscillation.

Si l'on considère un petit déplacement $\vec{MM'}$, le travail de la force est égal au produit par la masse m de la circulation du vecteur $\vec{g}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{MM'} = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{MM'}.$$

Le champ de pesanteur dérive d'un potentiel V : le travail W effectué par la force lorsqu'on passe d'un point M_1 à un point M_2 est égal au produit par la masse m de la différence de potentiel $V_1 - V_2$:

$$\int_{M_1M_2} \vec{F} \cdot \vec{MM'} = m \int_{M_1M_2} \vec{g} \cdot \vec{MM'}; \qquad W = m\,(V_1 - V_2).$$

On obtient un exemple de champ uniforme en étudiant le champ de pesanteur dans un espace peu étendu ; si l'axe Oz est vertical et dirigé vers le haut, le

vecteur accélération est égal à sa composante $A_z = -g$, et le potentiel est (§ 8) $V = gz + C^{te}$. Si un corps de masse m passe d'un point d'altitude z_1 à un point d'altitude z_2 par une trajectoire quelconque, le travail de la pesanteur est $W = mg\,(z_1 - z_2)$ et le théorème des forces vives permet d'écrire sa variation de vitesse :

$$\frac{1}{2}\,mv_2^2 - \frac{1}{2}\,mv_1^2 = mg\,(z_1 - z_2),$$

ou :

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\,(z_1 - z_2).$$

12. Champ électrique. — Les expériences fondamentales d'électricité statique sont connues depuis des siècles : un bâton d'ébonite frotté avec une peau de chat, un bâton de verre (1) frotté avec un morceau de drap attirent les corps légers. Un pendule électrique, formé d'une petite boule de moelle de sureau enduite de plombagine et suspendue à un fil de soie, acquiert, s'il est mis en contact avec le bâton d'ébonite, la propriété d'être repoussé par ce bâton, d'être attiré par le bâton de verre. Mis en contact avec le bâton de verre, il acquiert au contraire la propriété d'être repoussé par le bâton de verre, et attiré par le bâton d'ébonite.

Nous donnerons, au fur et à mesure de notre étude, l'interprétation de ces expériences. Elles peuvent se résumer ainsi : au voisinage d'un corps (bâton d'ébonite ou de verre) ou d'un système S de corps électrisés, nous plaçons un petit corps C, et nous constatons que ce corps est soumis à une force attractive ou répulsive. L'espace au voisinage du système S jouit donc de propriétés particulières, nous dirons qu'il est le siège d'un *champ électrique*. Ce champ électrique se manifeste par les forces qui s'exercent sur le corps C placé en un point du champ : nous expliquerons toujours l'existence de ces forces en admettant que les différents points du corps C portent des *charges électriques*, distribuées suivant des lois que nous étudierons, et nous expliquerons la possibilité d'observer, suivant l'état électrique du corps C, des forces attractives ou répulsives en admettant l'existence de deux espèces d'électricité, l'*électricité positive* et l'*électricité négative*. Ces différentes charges électriques, placées en différents points du champ électrique, seront soumises à des forces, dont la résultante sera la force qui s'exerce sur le corps C.

Pour calculer la force F qui s'exerce sur une charge électrique placée en un point M du champ électrique, nous admettrons, par analogie avec ce que nous avons vu pour le champ de pesanteur, *que cette force peut être représentée par le produit de deux facteurs; l'un, qui est une quantité scalaire positive ou négative* q, *ne dépend que de la charge électrique qu'on place au point* M ; *l'autre, qui est un vecteur* $\vec{H}$, *ne dépend que de la position du point* M *dans le champ électrique :*

$$\vec{F} = q\,.\,\vec{H}.$$

La quantité scalaire q s'appelle la **quantité d'électricité** (ou encore la masse

(1) On répète plus commodément les expériences avec une baguette de quartz fondu, moins hygroscopique que le verre.

électrique ou la charge électrique) ; le vecteur $\vec{H}$ s'appelle le **champ électrique :** sa direction est la direction du champ, sa grandeur est l'intensité du champ. La force est dirigée suivant la direction du champ, son sens peut être le sens du champ ou le sens opposé, suivant que la grandeur q est positive ou négative, que l'on a de l'électricité positive ou négative ; par définition, l'électricité positive est celle qui est repoussée par le bâton de verre frotté avec le drap : le sens du champ créé par ce bâton est celui qui s'en écarte. La grandeur de la force est égale au produit de la quantité d'électricité par l'intensité du champ qui agit sur elle.

Nous pouvons développer, à partir de la formule $\vec{F} = q\vec{H}$, des considérations analogues à celles que nous avons développées dans le paragraphe précédent : la seule différence est que les quantités q doivent être considérées comme des quantités algébriques, positives ou négatives.

Si au même point M du champ nous plaçons une série de points matériels électrisés, portant les charges q, q', q''..., ils sont soumis à des forces $\vec{F}, \vec{F'}, \vec{F''}$..., qui sont proportionnelles à leurs charges, et le rapport constant de la force à la charge représente l'intensité du champ au point M. On peut écrire :

$$\frac{\vec{F}}{\vec{F'}} = \frac{q}{q'}, \qquad \frac{\vec{F}}{\vec{F''}} = \frac{q}{q''},$$

ou :

$$\frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F'}}{q'} = \frac{\vec{F''}}{q''} = \ldots = \vec{H}.$$

Le rapport de deux quantités d'électricité est égal au rapport des forces auxquelles elles sont soumises en un même point du champ.

Si l'on place une même charge q en différents points M, M_1, M_2..., du champ, elle est soumise en ces différents points à des forces $\vec{F}, \vec{F_1}, \vec{F_2}$..., qui sont proportionnelles aux champs $\vec{H}, \vec{H_1}, \vec{H_2}$..., en ces différents points. On a :

$$\frac{F}{F_1} = \frac{H}{H_1}, \qquad \frac{F}{F_2} = \frac{H}{H_2},$$

ou :

$$\frac{\vec{F}}{\vec{H}} = \frac{\vec{F_1}}{\vec{H_1}} = \frac{\vec{F_2}}{\vec{H_2}} = \ldots = q.$$

Le rapport des intensités de deux champs électriques est égal au rapport des forces qui s'exercent sur une même charge électrique soumise à ces deux champs.

Dans le cas du champ de pesanteur, ces propriétés pouvaient servir de base à des vérifications ou à des mesures. De même, nous décrirons plus tard des expériences (expériences de Millikan, § 348) dans lesquelles on réalise effectivement des charges électriques ponctuelles, que l'on mesure par l'application directe de la formule $F = qH$. Comme la mesure des forces dans ces expériences est assez délicate, et que leur discussion ne peut se faire utilement que

si l'on connaît les procédés permettant de réaliser pratiquement les champs électriques, nous ne les décrirons pas maintenant. Nous considérerons simplement les propriétés énoncées comme des conséquences de l'hypothèse que nous avons faite. D'une manière générale, les hypothèses fondamentales de l'électricité statique ne sont pas susceptibles de vérifications directes, ou du moins celles que l'on peut en faire sont trop grossières pour que nous les indiquions. L'ensemble des hypothèses se vérifiera par la vérification de l'ensemble des conséquences que nous en tirerons.

CHAPITRE II

CHAMP NEWTONIEN. — LOI DE COULOMB

I. — *CHAMP NEWTONIEN : POTENTIEL ET FLUX*

13. Définition du champ newtonien. — Considérons un champ de vecteurs défini de la façon suivante : *étant donné un point fixe* O (*fig.* 11), *le vecteur* $\vec{A}$ *en un point* M *est dirigé suivant la droite* OM, *et sa grandeur varie en raison inverse du carré de la distance* OM : on a, en désignant par r cette distance, $A = \frac{a}{r^2}$. Nous conviendrons de considérer la grandeur A comme une quantité algébrique, comptée positivement de O vers M ; nous considérerons le coefficient a comme positif si le vecteur $\vec{A}$ est dirigé de O vers M, comme négatif s'il est dirigé de M vers O.

Nous appellerons ce champ un **champ newtonien** ; nous appellerons le paramètre a la *masse agissante* placée au point O, et nous dirons que le champ est créé par cette masse.

On peut justifier ce langage en comparant ce champ au champ de gravitation créé par une masse m placée au point O : une masse m' placée en M est soumise, d'après la loi de Newton, à une force dirigée suivant la droite MO, et égale à $\frac{kmm'}{r^2}$; elle subit une accélération représentée par un vecteur dirigé de M vers O dont la grandeur est $\frac{km}{r^2}$. Le champ d'accélérations est le champ précédemment défini, le paramètre a étant égal à $-km$; la masse agissante est proportionnelle à la masse matérielle placée en O, elle pourrait être mesurée, en valeur absolue, par le même nombre, moyennant un choix convenable d'unités ; toutefois, avec la convention de signe faite pour a (1) elle serait toujours affectée du signe —.

D'une manière générale, nous appellerons champ newtonien un champ de vecteurs résultant de la composition d'un nombre quelconque de champs, créés, suivant la définition précédente, par des masses agissantes $a_1, a_2, \ldots a_n$, positives ou négatives, placées en des points quelconques $O_1, O_2, \ldots O_n$.

(1) Cette convention de signe a été faite parce qu'elle nous sera plus commode pour le passage à l'étude du champ électrique.

Nous pourrons considérer également des champs newtoniens produits par une distribution continue de masses agissantes, soit sur une surface S, soit à l'intérieur d'un volume V. Dans le premier cas, nous caractériserons chaque point O de la surface S par un coefficient σ que nous appellerons la **densité superficielle** en ce point : le champ créé par un petit élément de surface dS entourant le point O sera le champ newtonien créé par une masse agissante σdS placée en ce point ; le champ total sera le champ résultant de la composition des champs élémentaires créés par tous les éléments de surface en lesquels on peut décomposer la surface S ; ses composantes en un point M s'exprimeront par des intégrales de surface étendues à la surface S. Dans le second cas, nous caractériserons chaque point O du volume V par un coefficient ρ, que nous appellerons la **densité cubique** en ce point : le champ créé par un petit élément de volume dv entourant le point O sera le champ newtonien créé par une masse agissante ρdv placée en ce point ; le champ total sera le champ résultant de la composition des champs élémentaires créés par tous les éléments de volume en lesquels on peut décomposer le volume V ; ses composantes en un point M s'exprimeront par des intégrales de volume étendues au volume V.

14. Potentiel du champ newtonien. — Considérons le champ newtonien créé par une masse agissante a placée au point O (*fig.* 11), et évaluons la circulation élémentaire du vecteur $\vec{A}$ pour un petit déplacement MM' : cette circulation $\vec{A}\cdot\vec{MM'}$ est égale au produit de la grandeur $\frac{a}{r^2}$ du vecteur $\vec{A}$ par la projection MH de MM' sur la droite OM. Désignons par $r + dr$ la distance OM', et considérons sur la droite OM le point m' situé à la distance $r + dr$ du point O : la distance m'H est du second ordre par rapport à l'infiniment petit principal MM', et l'on a, à un infiniment petit du second ordre près, MH $= dr$. D'autre part, avec la convention de signe faite pour a, le sens positif sur OM est le sens de O vers M, et MH doit être compté positivement en même temps que dr. La circulation élémentaire est donc :

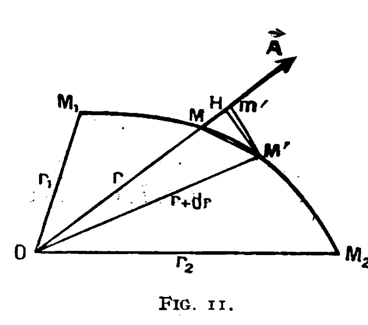


Fig. 11.

$$d\mathcal{C} = \frac{a}{r^2}\,dr.$$

La circulation le long de la courbe Γ, du point M_1 ($OM_1 = r_1$) au point M_2 ($OM_2 = r_2$), est :

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \int d\mathcal{C} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{a}{r_2}\,dr = \frac{a}{r_1} - \frac{a}{r^2}.$$

Elle ne dépend pas du chemin suivi : *le champ dérive d'un potentiel* V, et la *différence de potentiel* entre les points M_1 et M_2 est :

$$V_1 - V_2 = \mathcal{C}_{M_1M_2} = \frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2}.$$

La *fonction potentiel* est définie par cette relation à une constante près : sa valeur V au point M est :

$$V = \frac{a}{r} + C^{te}.$$

Nous ferons la convention que, *lorsque le point* M *s'éloigne indéfiniment du point* O, *son potentiel tend vers zéro ;* nous achevons ainsi de définir la fonction potentiel, qui sera :

$$V = \frac{a}{r}.$$

Si nous considérons maintenant un champ newtonien quelconque, créé par des masses agissantes $a_1, a_2, \dots a_n$ placées en des points $O_1, O_2 \dots O_n$, le potentiel en un point M, placé à des distances $O_1M = r_1 \dots O_nM = r_n$ des masses agissantes, sera, d'après le théorème d'addition des potentiels (§ 3), la somme des potentiels des champs composants :

$$V = \frac{a_1}{r_1} + \frac{a_2}{r_2} \dots + \frac{a_n}{r_n} = \sum \frac{a}{r}.$$

Il faut remarquer que la fonction potentiel n'a pu être définie sans ambiguïté que grâce à une convention particulière, relative au cas où le point M s'éloigne indéfiniment des masses agissantes. Cette convention n'a de sens que si toutes ces masses sont situées à distance finie : si par exemple nous considérons une distribution sur une surface indéfinie, tel qu'un plan, nous ne pourrons pas appliquer la dernière formule, et nous devrons nous borner à calculer des différences de potentiel.

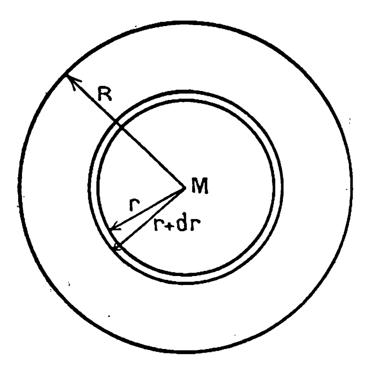


FIG. 12.

Remarquons encore que, dans le cas d'une distribution continue des masses agissantes sur une surface ou dans un volume, la fonction potentiel conserve une valeur finie et continue, même en un point de la surface ou du volume, pourvu que la densité conserve une valeur finie. Considérons par exemple le cas d'une surface, et cherchons à calculer la valeur du potentiel en un point M de la surface : tant que le point O, au voisinage duquel nous considérons l'élément de surface dS créant le champ élémentaire, est à une distance finie du point M, le coefficient de dS dans le terme correspondant $\frac{a}{r} = \frac{\sigma dS}{r}$ est fini et il n'y a pas de difficulté. Traçons donc sur la surface un cercle de centre M, de

rayon R, très petit, mais fini : nous n'avons à nous occuper, au point de vue qui nous intéresse, que du calcul du potentiel créé par les masses agissantes situées à l'intérieur de ce cercle. Nous pouvons toujours supposer que R a été choisi assez petit pour qu'à l'intérieur de ce cercle la surface puisse être assimilée à un plan et que la densité superficielle σ y soit constante. Décomposons alors la surface du cercle en couronnes circulaires (*fig.* 12) ; l'une d'elles est comprise entre les circonférences de rayons r et $r + dr$, sa surface est $2\pi r\, dr$, et le terme qui lui correspond dans le calcul du potentiel est $\frac{2\pi\sigma r\, dr}{r} = 2\pi\sigma\, dr$: il est toujours infiniment petit de l'ordre de dr, et la somme de tous les termes correspondant à toutes les couronnes a une valeur finie très petite, $\int_0^R 2\pi\sigma\, dr = 2\pi\sigma R$. Le potentiel en tous les points de la surface a donc une valeur finie ; on démontrerait par un raisonnement analogue qu'il en est de même dans le cas d'une distribution en volume.

15. Flux de force du champ newtonien : théorème de Gauss. — Considérons le champ newtonien créé par une masse agissante a placée au point O ; les lignes de force du champ sont évidemment les rayons issus du point O. Un tube de force est constitué par un cône ayant son sommet au point O : un tel cône peut être caractérisé par son angle solide, c'est-à-dire par la surface qu'il découpe sur la sphère de rayon 1.

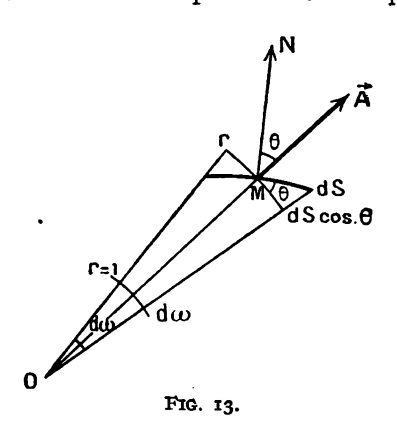


FIG. 13.

Considérons un élément de surface dS placé au point M du champ, et soit $\overrightarrow{MN}$ la direction positive choisie sur la normale à cet élément (*fig.* 13) : nous appellerons face négative de l'élément de surface celle par où entre la direction $\overrightarrow{MN}$, face positive celle par laquelle elle sort. Si la direction $\overrightarrow{OM}$ traverse l'élément de la face négative à la face positive, nous dirons que l'élément est vu du point O par la face négative, et nous conviendrons de considérer comme positif l'angle solide $d\omega$ du cône ayant son sommet en O et s'appuyant sur le contour de l'élément : c'est le cas de la figure.

Si nous désignons par θ l'angle des directions positives $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OM}$, le flux du vecteur $\overrightarrow{A}$ $\left(A = \frac{a}{r^2}\right)$ à travers l'élément de surface dS est, en grandeur et en signe, $d\Phi = \frac{a}{r^2}\, dS \cos\theta$. La projection de la surface dS sur un plan perpendiculaire à OM est égale, en valeur absolue, à $dS \cos\theta$; les dimensions de l'élément étant infiniment petites par rapport à la longueur OM, cette surface peut être confondue, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, avec la surface décou-

pée sur la sphère de centre O et de rayon r, tangente en M au plan considéré, par le cône d'angle solide $d\omega$; cette dernière surface est égale en valeur absolue à $r^2 d\omega$. Comme, d'après les conventions faites, $\cos\theta$ et $d\omega$ sont positifs ou négatifs en même temps, on a, en valeur absolue et en signe :

$$dS \cos\theta = r^2 d\omega, \qquad d\Phi = a\, d\omega.$$

Le flux à travers un élément de surface est égal au produit de la masse agissante par l'angle solide sous lequel on voit, du point où est placée cette masse, la face négative de l'élément de surface.

Si l'on a une surface finie Σ, il est facile de faire la somme des flux élémentaires à travers les différents éléments de la surface ; a étant une constante, il suffit de faire la somme des angles solides $d\omega$; cette somme est l'angle solide Ω du cône dont le sommet est O et qui s'appuie sur le contour Γ de la surface Σ (*fig.* 14) : le flux à travers la surface Σ est $\Phi = a\Omega$, *il est égal au produit de la masse agissante par l'angle solide du cône sous lequel on voit, du point où est placée cette masse, la face négative de la surface.*

Cet angle solide ne dépend que du contour Γ, qui définit le cône ; le flux à travers une surface ne dépend que du contour qui la limite. Il faut toutefois remarquer qu'il n'en est ainsi que si l'on voit du point O les côtés correspondants des différentes surfaces ; deux surfaces Σ et Σ', limitées par le contour Γ (*fig.* 14) et vues toutes deux du côté négatif, sont traversées par le même flux, $\Phi = a\Omega$. Mais si nous considérons la surface Σ'', la direction positive de la normale est la direction $\overrightarrow{M''N''}$, obtenue à partir de la direction $\overrightarrow{MN}$ par défor-

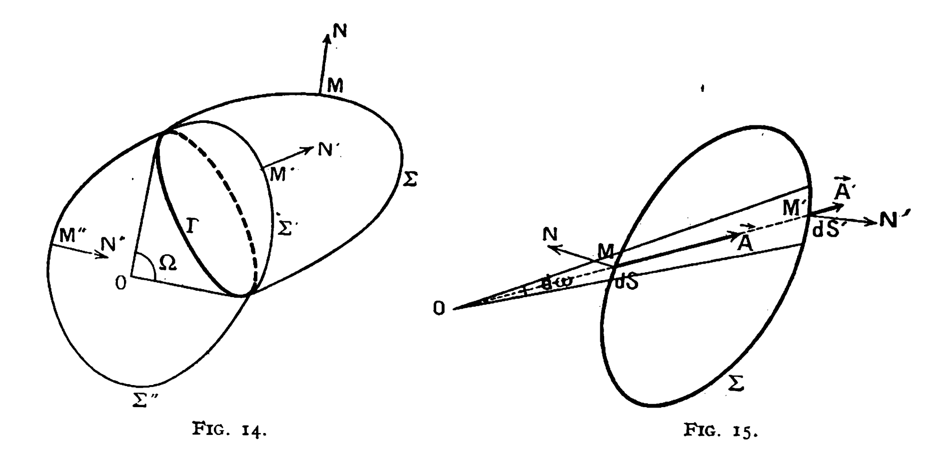


FIG. 14. FIG. 15.

mation continue de la surface Σ ; la somme des angles solides s'appuyant sur les éléments de la surface Σ'' est $4\pi - \Omega$, et elle doit être comptée négativement ; le flux à travers la surface Σ'' est $\Phi'' = -a(4\pi - \Omega)$.

De ces remarques, on pourrait déduire, par le raisonnement du paragraphe 7, les théorèmes relatifs à une surface fermée. Nous allons les démontrer directement, en supposant, pour plus de simplicité, la surface convexe ; on se rendra aisément compte qu'ils s'appliquent à une surface fermée quelconque.

Supposons d'abord le point O placé à l'extérieur de la surface fermée Σ (*fig.* 15) et considérons un tube de force élémentaire d'angle $d\omega$: il découpe sur la surface deux éléments dS et dS' ; les directions positives de la normale y sont les directions vers l'extérieur de la surface, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ (§ 5). La direction positive $\overrightarrow{OM}$ du rayon vecteur traverse l'élément dS de l'extérieur vers l'intérieur, l'élément dS' de l'intérieur vers l'extérieur; les flux à travers ces éléments sont donc de signes contraires, et sont respectivement $d\Phi = -a d\omega$ et $d\Phi' = + a d\omega$: leur somme est nulle. Par suite, *le flux à travers une surface fermée d'une masse agissante placée à l'extérieur de cette surface est nul.*

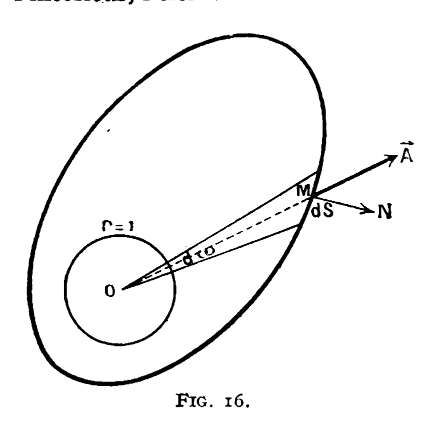


FIG. 16.

S'il y a un nombre quelconque de masses agissantes à l'extérieur de la surface Σ, le flux à travers cette surface est encore nul, d'après le théorème de l'addition des flux (§ 5) : *dans une région de l'espace ne contenant pas de masses agissantes, le flux du champ newtonien est conservatif.*

Considérons maintenant une masse agissante a placée en un point O, intérieur à la surface Σ (*fig.* 16). Un tube de force élémentaire quelconque traverse la surface de l'intérieur à l'extérieur, et le flux à travers l'élément dS correspondant est $+ a d\omega$; le flux total est $+ a\int d\omega$. La surface totale $\int d\omega$ découpée sur la sphère de rayon 1 par tous les tubes de force élémentaires qui rencontrent la surface Σ est la surface totale de cette sphère, qui est égale à 4π : le flux total à travers la surface Σ est donc :

$$\Phi = 4\pi a.$$

Le flux qui sort d'une surface fermée à l'intérieur de laquelle se trouve une masse agissante a est égal au produit de cette masse par 4π. Il est indépendant de la position de cette masse à l'intérieur de la surface.

S'il y a un nombre quelconque de masses agissantes $a_1, a_2 ..., a_n$ à l'intérieur de la surface Σ, donnant respectivement les flux $4\pi a_1, ..., 4\pi a_n$, et $a'_1, ..., a'_p$ à l'extérieur, donnant toutes un flux égal à zéro, le flux total qui sort de la surface fermée est :

$$\Phi = 4\pi(a_1 + a_2 + ... + a_n) = 4\pi\Sigma a.$$

Cette propriété du champ newtonien constitue le **théorème de Gauss,** qui résume toutes les propriétés particulières énoncées précédemment : *le flux qui sort d'une surface fermée est égal au produit par* 4π *de la somme des masses agissantes placées à l'intérieur de la surface fermée.*

16. Conséquences du théorème de Gauss : équation de Poisson. — Considérons d'abord une région de l'espace ne contenant pas de masses agis-

santes : le flux dans cette région est conservatif. Nous avons vu (§ 7) que cette propriété peut s'exprimer, en fonction du vecteur $\vec{A}$ ou du potentiel V, par les relations :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \Delta V = 0.$$

Il résulte de cette propriété que dans cette région de l'espace le potentiel V ne peut présenter ni maximum, ni minimum. Supposons, en effet, que le potentiel soit maximum en un point P ; cela veut dire que, lorsqu'on s'écarte du point P suivant une direction quelconque PN (*fig.* 17), le potentiel va en décroissant, la composante A_n du vecteur $\vec{A}$ suivant la droite PN, en un point M voisin du point P, est toujours dirigée dans le sens de P vers N. Si l'on trace une sphère suffisamment petite de centre P, le flux qui sort de cette sphère à travers un élément de surface placé au point M est nécessairement positif ; le flux total qui sort de cette sphère est la somme de termes tous positifs, il ne peut pas être nul. Or il doit être nul, puisque le flux est conservatif : donc, *en dehors des masses agissantes, le potentiel newtonien ne peut présenter ni maximum, ni minimum.*

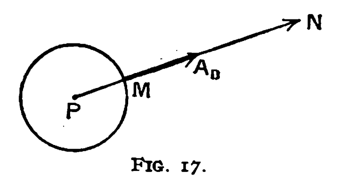


FIG. 17.

Considérons maintenant une région de l'espace contenant des masses agissantes distribuées dans l'espace avec une densité cubique ρ, pouvant d'ailleurs varier d'un point à l'autre : ρ est une certaine fonction des coordonnées. Un élément de volume dv contient la masse $\rho\, dv$; la somme des masses agissantes contenues à l'intérieur d'une surface fermée Σ est donnée par l'intégrale $\iiint_V \rho\, dv$, étendue au volume limité par cette surface. Le flux qui sort de la surface Σ est donc, d'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = \iiint_V 4\pi\rho\, dv.$$

D'autre part, ce flux peut s'exprimer à partir du vecteur $\vec{A}$ par la formule de Green (§ 6) :

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A}\, dv.$$

Ces deux expressions doivent être identiques, quel que soit le volume V ; on doit donc avoir :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 4\pi\rho,$$

ou, en exprimant le vecteur $\vec{A}$ à partir du potentiel V (§ 6) :

$$\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

Cette dernière équation est l'**équation de Poisson**.

En résumé, nous avons défini le champ newtonien comme résultant de l'addition de champs de vecteurs centraux, variant en raison inverse du carré de la distance, et nous avons montré que ce champ dérive d'un potentiel, et que ce potentiel satisfait à l'équation de Poisson. On aurait pu suivre la marche inverse, et définir le potentiel newtonien comme un potentiel satisfaisant à l'équation de Poisson : on démontre alors que le champ de vecteurs défini par ce potentiel peut être considéré comme résultant de l'addition de champs de vecteurs centraux, créés par les masses agissantes élémentaires $\rho\,dv$, et ayant comme grandeur $\frac{\rho\,dv}{r^2}$. Nous pouvons donc considérer les deux définitions comme équivalentes.

II. — *ÉTUDE DE QUELQUES CHAMPS NEWTONIENS*

17. Champ produit en un point extérieur par une sphère formée de couches uniformes. — Supposons que le champ newtonien soit créé par des masses réparties à l'intérieur d'une sphère S de centre O et de rayon R (*fig.* 18), la densité ρ étant la même en tous les points d'une sphère concentrique de rayon r et pouvant d'ailleurs varier avec r ; s'il y a des masses réparties sur la surface S, supposons également qu'elles forment une couche uniforme, c'est-à-dire que la densité superficielle σ soit constante. La répartition des masses présente la symétrie de révolution autour d'un rayon quelconque OM : le champ créé doit nécessairement présenter la même symétrie. Il en résulte que

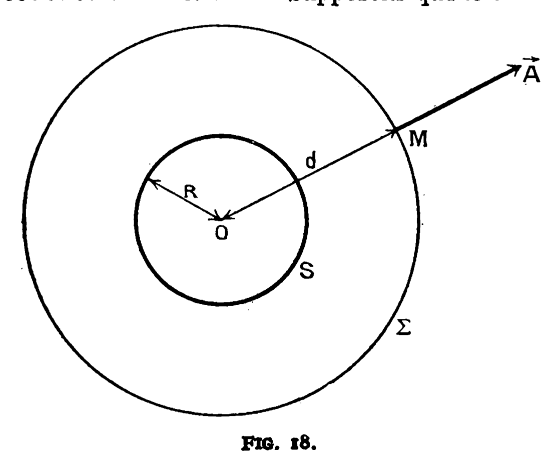


FIG. 18.

le vecteur $\vec{A}$ au point M est dirigé suivant le rayon OM, et que la grandeur A de ce vecteur est la même en tous les points d'une sphère Σ de centre O et de rayon OM = d. Appliquons le théorème de Gauss à la surface Σ : le vecteur $\vec{A}$ étant normal en tous les points à la surface Σ, le flux à travers cette surface est égal au produit de la surface de la sphère $4\pi d^2$ par la grandeur constante A du vecteur ; d'autre part, il est égal au produit par 4π de la somme Σa des masses agissantes. On a donc :

$$4\pi d^2 \,.\, A = 4\pi\Sigma a, \qquad A = \frac{\Sigma a}{d^2}.$$

Le champ newtonien, créé en un point extérieur par une sphère formée de

couches sphériques homogènes, est le même que si toutes les masses agissantes étaient concentrées en son centre.

Le potentiel, qui représente la circulation du vecteur $\vec{A}$ lorsque le point M se déplace jusqu'à l'infini, a évidemment aussi la même valeur :

$$V = \frac{\Sigma a}{d}.$$

Les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques à la sphère S, les lignes de force à l'extérieur de la sphère sont les rayons issus du point O.

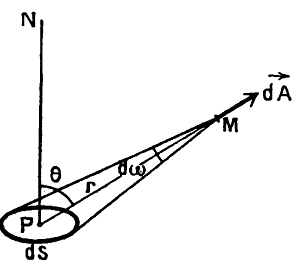


FIG. 19.

18. Champ créé par un disque circulaire à densité uniforme. — Considérons d'abord un petit élément de surface dS, portant une masse agissante $\sigma\, dS$, placé en un point P, et calculons le vecteur $\vec{dA}$ en un point M, situé à une distance r dans une direction PM qui fait l'angle θ avec la normale PN à l'élément (*fig.* 19) : ce vecteur est dirigé suivant la droite PM, et sa grandeur est $dA = \frac{\sigma\, dS}{r^2}$. Exprimons dS en fonction de l'angle solide $d\omega$ sous lequel l'élément de surface est vu du point M : on a (cf. § 15) $dS \cos\theta = r^2 d\omega$; et :

$$dA = \frac{\sigma\, d\omega}{\cos\theta}.$$

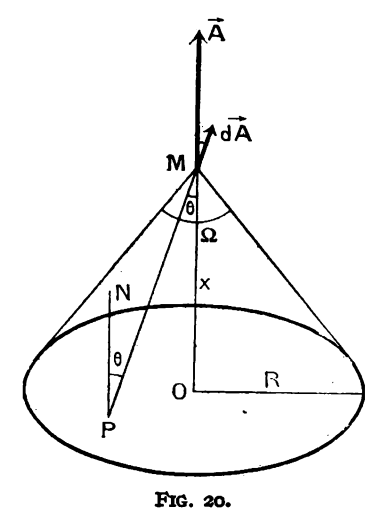


FIG. 20.

Considérons maintenant un disque circulaire plan de centre O et de rayon R, portant des masses agissantes réparties avec une densité superficielle constante σ, et calculons le vecteur $\vec{A}$ en un point M de la perpendiculaire au plan du disque en son centre, à une distance $OM = x$ du disque (*fig.* 20). Le système présente la symétrie de révolution par rapport à l'axe OM : le vecteur $\vec{A}$ est dirigé suivant cet axe, et peut être considéré comme la somme de toutes les composantes, suivant cet axe, des vecteurs élémentaires dus aux différents éléments de surface. A un élément dS placé en P correspond le vecteur $\vec{dA}$, dirigé suivant PM, dont la grandeur est $dA = \frac{\sigma d\omega}{\cos\theta}$, et dont la composante suivant l'axe est $dA_n = \sigma\, d\omega$: la somme de toutes ces composantes est :

$$A = \sigma \int d\omega = \sigma\Omega.$$

L'angle Ω est l'angle solide sous lequel le disque circulaire est vu du point M ;

c'est la surface découpée sur la sphère de rayon 1 par un cône de révolution dont le demi-angle au sommet α est donné par $\operatorname{tang}\alpha = \frac{R}{x}$; il est égal à $2\pi(1 - \cos\alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$, et l'on a :

$$A = 2\pi\sigma(1 - \cos\alpha) = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right).$$

On évaluera le potentiel au point M en calculant la circulation de ce vecteur le long de l'axe OM depuis le point M jusqu'à l'infini :

$$V = \int_M^\infty A\,dx = 2\pi\sigma\left[x - \sqrt{R^2 + x^2}\right]_x^\infty = 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right).$$

Le potentiel en O, au centre du disque, a une valeur finie :

$$V_0 = 2\pi\sigma R.$$

C'est la valeur déjà trouvée, par le calcul direct, au paragraphe 14.

Considérons enfin un plan indéfini Π (*fig.* 21) portant des masses agissantes réparties avec une densité uniforme σ, et un point M quelconque : le plan peut être considéré comme un disque circulaire de rayon R infini, de révolution autour de l'axe OM perpendiculaire au plan. Le vecteur $\vec{A}$ est dirigé suivant cette droite, et l'on obtiendra sa grandeur A en faisant dans la formule précédente $\Omega = 2\pi$. On a :

$$A = 2\pi\sigma.$$

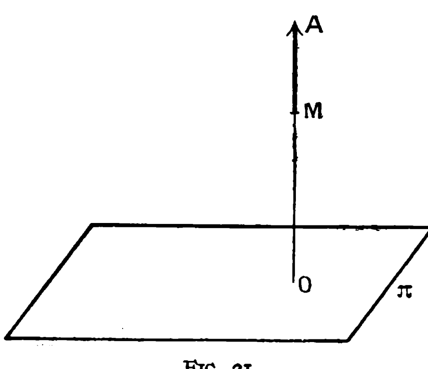


FIG. 21.

Le vecteur $\vec{A}$, en tous les points de l'espace situés d'un même côté du plan Π, a même direction, même sens et même grandeur : le champ est un champ uniforme (§ 8). Les lignes de force sont des droites perpendiculaires au plan Π, les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles au plan Π. Mais nous ne pouvons pas calculer la valeur du potentiel par la formule donnée ci-dessus, qui donne, quand on y fait $R = \infty$, des valeurs infinies : cela tient à ce que la distribution comporte des masses agissantes à l'infini, et que la convention faite pour fixer à zéro la valeur du potentiel quand on s'éloigne indéfiniment des masses agissantes n'a plus de sens (§ 14). Nous ne pourrons calculer que des différences de potentiel : entre deux points situés à des distances x_1 et x_2 du plan Π, d'un même côté de ce plan, on a la différence de potentiel :

$$V_1 - V_2 = 2\pi\sigma(x_2 - x_1).$$

19. Champ produit en un point intérieur par une couche sphérique uniforme. — Considérons une sphère S, sur la surface de laquelle sont réparties des masses agissantes, avec une densité superficielle constante σ, et un point M à l'intérieur de la sphère S (*fig.* 22). Un cône élémentaire de sommet M et d'angle $d\omega$ découpe sur la sphère deux éléments P et P' de surfaces dS, dS', auxquels correspondent des vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dA}$, $\overrightarrow{dA'}$, de même direction et de sens opposé ; les angles θ de la droite PP' avec les normales à la sphère PO et P'O sont égaux, et par suite les grandeurs de ces vecteurs, $\frac{\sigma\, d\omega}{\cos\theta}$, sont égales. Le vecteur $\overrightarrow{A}$ au point M peut donc être considéré comme la somme de vecteurs élémentaires qui s'annulent deux à deux : *le champ créé en un point intérieur par une couche sphérique uniforme est nul.*

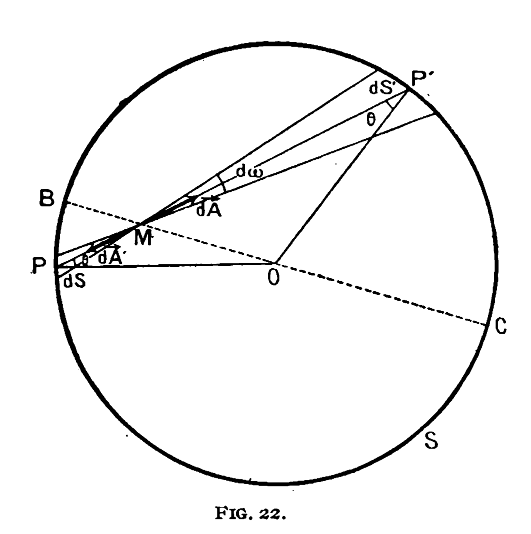


FIG. 22.

Cette propriété est caractéristique du champ newtonien. C'est parce que la grandeur du vecteur varie en raison inverse du carré de la distance r que l'expression de dA peut être mise, en fonction de l'angle solide, sous une forme $\frac{\sigma\, d\omega}{\cos\theta}$, qui ne contient plus explicitement r et qui entraîne l'égalité des grandeurs dA et dA'. Supposons que la grandeur du vecteur d'un champ de vecteurs centraux varie suivant une fonction quelconque différente de $\frac{1}{r^2}$: elle pourra être mise sous la forme $A = \frac{a}{r^2}\varphi(r)$, et l'on pourra toujours trouver un intervalle $r_1 r_2$ ($r_1 < r_2$) tel que la fonction $\varphi(r)$ varie toujours dans le même sens, par exemple aille constamment en croissant, quand r croît de r_1 à r_2. Portons alors sur une droite MO, de part et d'autre du point M, deux longueurs MB et MC égales à r_1 et r_2, et considérons la sphère S décrite sur BC comme diamètre (*fig.* 22) ; supposons que cette sphère porte une répartition uniforme de masses agissantes a, avec une densité superficielle σ, et reprenons le calcul fait tout à l'heure de l'action de cette sphère sur un point intérieur M. Si r et r' sont les longueurs MP et MP' ($r < r'$), les vecteurs élémentaires correspondants, $\overrightarrow{dA}$ et $\overrightarrow{dA'}$, ont pour grandeur $\frac{\sigma\, d\omega}{\cos\theta}\varphi(r)$ et $\frac{\sigma\, d\omega}{\cos\theta}\varphi(r')$, la grandeur dA' est plus grande que la grandeur dA : la somme de ces deux vecteurs est dirigée de M vers P, et sa composante suivant OM est dirigée de M vers B. La composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ suivant OM est la somme de composantes élémentaires toutes dirigées de M vers B, elle ne saurait être nulle. La vérification expérimentale du fait

qu'une couche sphérique uniforme crée un champ nul en tout point intérieur pourra donc servir à démontrer que le champ créé est un champ newtonien.

III. — *LOI DE COULOMB*

20. Loi de Coulomb. — Nous avons déjà indiqué, au paragraphe 12, une première hypothèse que nous admettrions pour expliquer les phénomènes d'attractions et de répulsions électrostatiques ; étant donnés deux corps électrisés en présence, S′ et S, le corps S′ crée, en chaque point de l'espace, un champ électrique représenté par un vecteur $\vec{H}$; chaque point du corps S porte une charge ou quantité d'électricité q, qui est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{H}$, et la force à laquelle est soumise le corps S est la résultante de ces forces élémentaires. De même, d'après cette hypothèse, le corps S crée un champ électrique représenté en chaque point de l'espace par un vecteur $\vec{H'}$; chaque point du corps S′ porte une charge q', qui est soumise à une force $\vec{F'} = q'\vec{H'}$, et la force à laquelle est soumis le corps S′ est la résultante de ces forces élémentaires ; d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, cette force doit être égale et directement opposée à celle qui s'exerce sur le corps S.

Le champ $\vec{H}$ est le champ créé par le corps S′ en vertu de son état d'électrisation : nous admettrons que ce champ est la résultante des champs créés par les différentes charges électriques q' réparties aux différents points du corps S′ (1) et nous n'avons plus qu'à préciser la loi permettant de calculer le champ créé par une charge élémentaire ponctuelle q'.

Considérons donc simplement deux charges q et q' placées en deux points M et M′ à une distance r l'une de l'autre (*fig.* 23) : la charge q' crée au point M un champ $\vec{H}$, et la charge q est soumise à une force donnée par l'expression

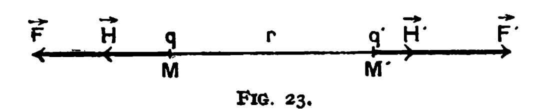


FIG. 23.

$\vec{F} = q\vec{H}$ où $\vec{H}$ est indépendant de q ; la charge q crée au point M′ un champ $\vec{H'}$, et la charge q' est soumise à une force donnée par l'expression $\vec{F'} = q'\vec{H'}$, où $\vec{H'}$ est indépendant de q'. Pour satisfaire au principe de l'égalité de l'action et de la réaction, ces deux forces doivent être égales et directement opposées :

(1) Le champ $\vec{H}$ est le champ créé par le corps S′ en vertu de son état actuel d'électrisation; il peut être différent du champ que créait ce corps avant l'introduction du corps S, car cette introduction a pu modifier la répartition des charges q' sur S′. D'autre part, on peut dire qu'une charge q est soumise à l'action, non seulement des forces produites par les charges q', mais aussi des forces produites par les autres charges q du corps S : mais ces dernières forces sont des forces intérieures qui s'annulent deux à deux lorsqu'on calcule la résultante.

les 4 vecteurs $\vec{F}, \vec{H}, \vec{F'}, \vec{H'}$ sont dirigés suivant la droite MM'; si nous comptons positivement F et H dans le sens de M' vers M, F' et H' dans le sens de M vers M', c'est-à-dire si nous comptons positivement les forces répulsives, nous aurons :

$$F = F' = qH = q'H',$$

cette relation étant vraie en grandeur et en signe, d'après les définitions données au paragraphe 12 pour les signes des quantités q et q'. Comme H est indépendant de q et H' indépendant de q', cette relation entraîne l'expression de la force :

$$F = F' = Cqq',$$

la quantité C ne dépendant ni de la charge q, ni de la charge q', mais seulement des positions des points M et M' : *les forces exercées l'une sur l'autre par deux charges électriques ponctuelles sont égales et opposées, dirigées suivant la droite qui les joint, et proportionnelles à ces deux charges.*

Pour pouvoir expliquer le fait qu'un pendule électrique, après avoir touché le bâton d'ébonite électrisé, est repoussé par lui, nous admettrons que la constante C est positive, c'est-à-dire que *deux charges électriques de même signe se repoussent, deux charges électriques de signes contraires s'attirent.* Il résulte des hypothèses faites et des conventions de signes adoptées que la quantité C est la même, que les forces soient attractives ou répulsives, que les charges électriques qui se repoussent soient positives ou négatives.

La quantité C ne dépend que de la position relative des points M et M' : c'est une fonction de leur distance r. Nous admettrons, et c'est en cela que consiste la *loi de Coulomb,* qu'elle est *inversement proportionnelle au carré de la distance; nous aurons,* ε_0 *étant une constante positive :*

$$C = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2}, \qquad F = F' = \frac{qq'}{\varepsilon_0 r^2},$$

et nous pouvons résumer toutes nos hypothèses dans l'énoncé suivant :

Les forces exercées par deux charges électriques ponctuelles l'une sur l'autre sont égales et opposées, dirigées suivant la droite qui les joint, proportionnelles aux deux charges, et inversement proportionnelles au carré de leur distance ; elles sont répulsives si les deux charges sont de même signe, attractives si elles sont de signes contraires.

Les forces exercées par deux corps électrisés l'un sur l'autre sont les résultantes de toutes les forces élémentaires exercées les unes sur les autres par les charges électriques réparties sur ces deux corps.

Nous n'indiquerons pas de vérification expérimentale directe de la loi de Coulomb, que nous considérons comme une hypothèse fondamentale vérifiée par la vérification de l'ensemble de ses conséquences. Les expériences de Coulomb (1784), quelle que soit leur importance historique, sont trop peu précises pour pouvoir servir de base à toute une théorie : il est impossible de réaliser expérimentalement deux masses électriques ponctuelles, isolées dans l'espace, et nous ne pourrons tirer des conséquences précises et numériquement vérifiables de la loi de Coulomb que lorsque nous aurons appris à calculer la distribution sur les conducteurs.

La constante ε_0 de la formule $F = qq'/\varepsilon_0 r^2$ ne dépend que des unités choisies pour mesurer les différentes grandeurs. Nous admettrons que cette formule est toujours valable avec le même coefficient ε_0, quel que soit le milieu interposé entre les charges q et q'. Nous expliquerons plus tard l'action de ce milieu par la production de charges électriques, réelles (conducteurs, chap. III) ou fictives (diélectriques, chap. XX), qui se développent toujours dans un milieu matériel quelconque soumis à un champ électrique. Signalons dès maintenant que, si ce milieu est l'air, les forces produites par les charges qui s'y développent sont en général négligeables (§ 54).

21. Conséquences de la loi de Coulomb : potentiel et flux électrostatique. — Si nous considérons une charge électrique q placée en un point O et une charge q_1 placée en un point M à une distance OM $= r$, cette dernière est soumise à une force $\vec{F}$ dirigée suivant OM, et égale, si on la compte positivement dans la direction OM, à $qq_1/\varepsilon_0 r^2$; d'après la définition donnée au paragraphe 12 et rappelée au début du paragraphe 20, le champ électrique $\vec{H}$ créé par la charge q au point M est dirigé suivant OM, et égal, si on le compte positivement dans la même direction, à $F/q_1 = q/\varepsilon_0 r^2$; le champ du vecteur $\vec{H}$ est le champ newtonien élémentaire défini au paragraphe 13, et la quantité q/ε_0 est, en grandeur et en signe, la masse agissante définie à ce même paragraphe. D'une manière générale, *un champ électrique quelconque est un champ newtonien, et les charges électriques créant ce champ sont proportionnelles aux masses agissantes créant le champ newtonien.*

Le champ électrique possède donc toutes les propriétés du champ newtonien établies dans les deux premières parties de ce chapitre :

Le champ électrique dérive d'un potentiel (§ 14). Si le champ est créé par une seule charge, l'expression du potentiel est $V = q/\varepsilon_0 r$; s'il est créé par un nombre quelconque de charges, elle est :

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum \frac{q}{r}.$$

Si l'on place, dans le champ $\vec{H}$ dérivant du potentiel V, une charge q, elle est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{H}$; pour un petit déplacement $\overrightarrow{MM'}$ de cette charge, la circulation élémentaire du vecteur $\vec{H}$ est $d\mathcal{C} = \vec{H}.\overrightarrow{MM'}$; le travail élémentaire effectué par la force $\vec{F}$ est $dW = \vec{F}.\overrightarrow{MM'} = q.d\mathcal{C}$. Lorsque la charge q se déplace d'un point M_1 à un point M_2, la circulation du vecteur champ est égale à la différence de potentiel $V_1 - V_2$: *le travail W des forces électrostatiques est égal au produit de la quantité d'électricité sur laquelle agissent ces forces par la chute de potentiel qu'elle subit :*

$$W = q(V_1 - V_2).$$

Le flux de force du champ électrique, ou *flux électrostatique*, est défini comme d'habitude, par la relation élémentaire $d\Phi = \vec{H}.\vec{dS}$. On peut lui appliquer le *théorème de Gauss* (§ 15) : *le flux qui sort d'une surface fermée est proportionnel à la somme des charges placées à l'intérieur de cette surface :*

$$\Phi = \frac{4\pi\Sigma q}{\varepsilon_0}.$$

Dans une région de l'espace ne contenant pas de charges électriques, le flux électrostatique est conservatif. Cette propriété s'exprime par les relations :

$$\text{div}\,\vec{H} = 0, \qquad \Delta V = 0.$$

Dans cette région de l'espace, le potentiel électrique ne peut présenter ni maximum ni minimum (§ 16).

Dans une région de l'espace contenant des charges électriques distribuées avec une *densité électrique cubique* ρ, le champ et le potentiel électriques satisfont à l'équation de Poisson (§ 16) :

$$\varepsilon_0\,\text{div}\,\vec{H} = 4\pi\rho, \qquad \varepsilon_0\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

Le champ produit en un point extérieur par une sphère dont les différentes couches sont uniformément chargées est le même que si toute la charge était concentrée en son centre (§ 17).

Le champ créé par un plan indéfini uniformément électrisé, de *densité électrique superficielle* σ (§ 18), est un champ uniforme, perpendiculaire à ce plan, et d'intensité :

$$H = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Le champ produit en un point intérieur par une surface sphérique uniformément électrisée est nul. La vérification expérimentale de cette propriété constituera une démonstration de la loi de Coulomb (§ 19).

22. Unités électrostatiques C. G. S. — Nous avons défini, au paragraphe 12, la quantité d'électricité comme une grandeur mesurable, puisque nous avons défini le rapport de deux quantités d'électricité; mais nous n'avons pas défini l'unité qui servira à la mesurer. Ce choix peut être fait arbitrairement : mais, une fois cette unité choisie, ainsi que les unités de force et de travail, les unités d'intensité de champ et de différence de potentiel sont définies par les formules mêmes qui traduisent les définitions du champ et du potentiel :

$$F = qH, \qquad W = q(V_1 - V_2).$$

L'unité de champ électrique est le champ qui, agissant sur une charge électrique égale à l'unité de quantité d'électricité, exerce sur elle une force égale à l'unité de force.

L'unité de différence de potentiel est la chute de potentiel que doit subir l'unité de quantité d'électricité pour que le travail des forces électriques qui agissent sur elle soit égal à l'unité de travail.

De même, le choix des unités mécaniques et de l'unité de quantité d'électricité fixe la valeur du coefficient ε_0 de la loi de Coulomb $F = qq'/\varepsilon_0 r^2$. Inversement une fois les unités mécaniques choisies, on peut se donner arbitrairement la valeur du coefficient ε_0 : ce choix détermine la quantité d'électricité que l'on doit choisir comme unité de charge électrique. On peut en particulier prendre le coefficient ε_0 égal à l'unité : l'unité de quantité d'électricité ainsi déterminée et les unités de champ et de différence de potentiel que l'on en déduit par les règles que nous venons d'énoncer s'appellent des **unités électrostatiques.** Lorsqu'on emploie un tel système d'unités, on peut faire dans toutes les formules $\varepsilon_0 = 1$; la force exercée par une charge q sur une charge q', le champ et le potentiel créés par une charge q ont pour expressions :

$$f = \frac{qq'}{r^2}, \qquad H = \frac{q}{r^2}, \qquad V = \frac{q}{r},$$

tandis que les formules exprimant le théorème de Gauss, l'équation de Poisson et le champ du plan indéfini deviennent :

$$\Phi = 4\pi\Sigma q, \qquad \Delta V + 4\pi\rho = 0, \qquad H = 2\pi\sigma.$$

Si les unités mécaniques sont les unités C. G. S., les unités ainsi définies par la condition $\varepsilon_0 = 1$ sont les **unités électrostatiques C. G. S.** Comme la loi de Coulomb, pour $q = q' = 1$, $r = 1$, donne alors $f = 1$, on voit que *l'unité électrostatique* C. G. S. *de quantité d'électricité est la charge électrique qui, placée à une distance d'un centimètre d'une charge égale, et en dehors de l'action de toute autre charge électrique, la repousse avec une force d'une dyne.* Les unités électrostatiques C. G. S. de champ et de différence de potentiel se définissent, à partir de l'unité électrostatique C. G. S. de quantité d'électricité, par les définitions générales où l'on prend *la dyne comme unité de force* et *l'erg comme unité de travail.*

23. Unités pratiques. — Les unités électrostatiques C. G. S. ne sont pas de l'ordre de grandeur des charges électriques et des différences de potentiel que l'on a généralement à considérer dans l'étude des courants électriques. On leur substitue souvent d'autres unités, dites **unités pratiques**, dont nous verrons plus tard (§ 152) la définition précise, et dont nous donnerons la définition provisoire suivante :

L'unité pratique de quantité d'électricité est le **coulomb**; *il vaut* 3.10^9 *unités électrostatiques C. G. S.*

L'unité pratique de différence de potentiel est le **volt**; *il vaut* 1/300 *d'unité électrostatique C. G. S.*

Si nous considérons une quantité d'électricité de 1 coulomb, qui subit une chute de potentiel de 1 volt, le travail effectué par les forces électrostatiques est donné par la formule $W = q\,(V_1 - V_2)$; on obtient, en faisant les calculs en unités C. G. S. : $W = 3 \cdot 10^9/300 = 10^7$ ergs. *Ce travail est l'unité pratique de travail, qu'on appelle le* **joule**, *et qui vaut* 10^7 *ergs.* On voit que, si l'on exprime la quantité d'électricité en coulombs, la différence de potentiel en volts, et le travail en joules, on peut encore appliquer la formule :

$$W = q\,(V_1 - V_2).$$

La formule définissant l'unité de champ et les autres formules du paragraphe 21 ne peuvent être appliquées en unités pratiques qu'à la condition de rattacher ces unités à un système d'unités mécaniques dans lequel l'unité de travail soit le joule. Ce système ne peut être ni le système C. G. S., dans lequel l'unité de travail est l'erg, ni le système M. T. S., dans lequel l'unité de travail est le kilojoule. Il peut être le système M. K. S., dans lequel l'unité de longueur est le mètre et l'unité de masse est le kilogramme : l'unité de force de ce système est le millisthène et l'unité de travail le joule. Deux charges électriques égales à 1 coulomb et distantes de 1 mètre se repoussent avec une force $F = (3 \cdot 10^9)^2/(10^2)^2 = 9 \cdot 10^{14}$ dynes $= 9 \cdot 10^9$ millisthènes : *les différentes formules peuvent donc être employées en exprimant les grandeurs électriques en unités pratiques et les grandeurs mécaniques en unités* M. K. S., *à condition de prendre pour le coefficient ε_0 de la loi de Coulomb la valeur :*

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9}.$$

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CORPS CONDUCTEURS

I. — *HYPOTHÈSES FONDAMENTALES*

24. Conducteurs et isolants. — Tandis que dans certains corps les charges électriques restent localisées à la place où elles ont été produites, par le frottement par exemple, dans d'autres elles paraissent se répandre sur toute la surface du corps : les premiers sont dits *isolants* ou **diélectriques,** les seconds **conducteurs.** On peut par exemple montrer cette distinction par l'expérience suivante : la boule d'un électroscope (¹) E est reliée par un fil fin de cuivre AB de quelques mètres de longueur à une boule métallique C portée par un pied de verre (*fig.* 24) ; on sait que si l'on touche la boule de l'électroscope avec le bâton d'ébonite électrisé, on observe un certain écart de la feuille d'or, qui décèle l'électrisation du bâton d'ébonite. Si, au lieu de l'électroscope, on touche la boule C avec le bâton d'ébonite, la feuille d'or dévie immédiatement, l'électricité s'est transmise à l'électroscope à travers le conducteur formé par le fil de cuivre AB. Si ensuite on touche la boule C avec le doigt, la feuille d'or retombe instantanément : l'électricité de l'électroscope s'est écoulée dans le sol ; le corps humain, le bois qui constitue le plancher, les matériaux qui composent

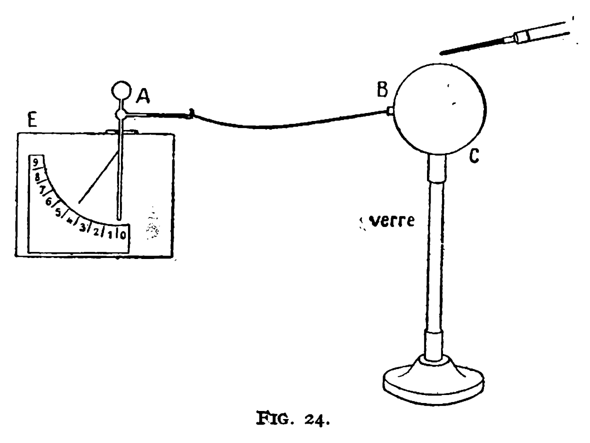


FIG. 24.

(¹) La description de l'électroscope fait partie des notions élémentaires que nous supposons connues. On trouvera d'ailleurs au paragraphe 68 quelques indications sur le fonctionnement de cet appareil.

le sol sont conducteurs. Remplaçons le fil AB par un fil de soie, et touchons à nouveau la boule C avec le bâton d'ébonite électrisé : la feuille d'or ne dévie pas. Touchons avec le bâton la boule de l'électroscope : la feuille d'or dévie ; puis touchons C avec le doigt : la feuille conserve son écart, le fil de soie AB s'oppose au passage de l'électricité, c'est un isolant.

On peut d'ailleurs avoir tous les intermédiaires entre les bons conducteurs et les isolants parfaits ; remplaçons le fil AB par un fil de chanvre et chargeons la boule C : la feuille de l'électroscope s'écarte lentement et met plusieurs minutes à atteindre sa position d'équilibre ; touchons la boule C avec le doigt, la feuille retombe lentement et met encore quelques minutes à revenir au zéro : le fil de chanvre laisse l'électricité s'écouler très lentement, c'est un mauvais conducteur ou un mauvais isolant.

Les métaux constituent toujours de bons conducteurs. Parmi les isolants employés dans la pratique industrielle, nous citerons : le verre, la porcelaine, la bakélite, la gutta, l'ébonite, la soie, la gomme laque; parmi les bons isolants employés dans les appareils d'électrostatique, le soufre, la paraffine, l'ambre; parmi les isolants liquides, le sulfure de carbone. L'eau est toujours conductrice : lorsqu'on emploie le verre comme isolant, il faut éviter que sa surface se recouvre d'eau par condensation, c'est-à-dire la dessécher, ou mieux la vernir à la gomme laque.

On comprend pourquoi les expériences d'électrisation par frottement doivent être faites avec des isolants : si on frotte avec la peau de chat un cylindre de laiton tenu à la main, l'électricité s'écoule dans le sol au fur et à mesure qu'elle se produit ; si on tient le cylindre de laiton à l'aide d'un manche isolant, on constate qu'il s'électrise.

On comprend moins bien pourquoi, lorsqu'on touche la boule de l'électroscope avec le bâton d'ébonite électrisé, une partie de la charge du bâton passe dans l'électroscope, au lieu de rester aux points du bâton où elle se trouve. Le passage de l'électricité se fait vraisemblablement par de petites aigrettes qui jaillissent d'un point à l'autre à travers l'air.

25. Définition du conducteur. — Avant de passer à l'étude de leurs propriétés, il est évidemment nécessaire de donner une définition des conducteurs plus précise, susceptible d'une traduction mathématique. Un conducteur est un corps dans lequel l'électricité peut se déplacer librement : aucune force ne s'oppose à son déplacement, qui peut être réalisé sans qu'on ait à fournir de travail. Cela ne veut pas dire que le déplacement de l'électricité dans un conducteur s'effectue sans que des forces, analogues aux forces de frottement qui existent dans les liquides, s'y opposent; nous verrons au contraire que ce frottement existe et qu'il se traduit, dans le cas des courants électriques, par la chaleur dégagée suivant la loi de Joule. Cela veut dire seulement que ce frottement est très faible quand la vitesse de déplacement de l'électricité est très faible, qu'il s'annule en même temps qu'elle, et que le travail à fournir contre ces forces de frottement peut être négligé, à condition que les déplacements soient assez lents.

Nous prendrons donc comme définition du conducteur la propriété qu'*une charge électrique ne peut être en équilibre en un point du conducteur que si elle n'est soumise à aucune force qui tende à la déplacer dans ce conducteur.*

26. Principe de la conservation de l'électricité. — Nous aurons souvent à étudier successivement différents états d'équilibre, tels que l'on passe de l'un à l'autre simplement par le déplacement de l'électricité à l'intérieur d'un conducteur. Rien n'indique, dans les hypothèses que nous avons faites jusqu'ici, que la somme des quantités d'électricité réparties dans le conducteur soit la même dans les divers états : c'est précisément en cette hypothèse supplémentaire que consiste le *principe de la conservation de l'électricité*, que nous pourrons énoncer de la façon suivante :

Etant donné un système de corps isolé, la somme algébrique des quantités d'électricité réparties aux différents points du système est constante.

Nous ne donnons pas de vérification expérimentale de ce principe, pas plus que nous n'en avons donné des autres hypothèses fondamentales : comme elles, il sera vérifié par l'ensemble de ses conséquences. Nous rappellerons seulement, pour mieux le faire comprendre, quelques-unes de ces expériences dans l'explication desquelles il aura à intervenir.

Un conducteur électrisé, portant une charge totale q, est mis en contact avec un second conducteur ; les deux conducteurs portent, après le contact, des charges totales q_1 et q_2 : nous aurons, en grandeur et en signe, $q_1 + q_2 = q$.

Un conducteur B peut, par exemple s'il se trouve en face d'un corps électrisé A (§ 33), porter sur différentes parties de sa surface des charges q_1 et q_2 égales et de signes contraires : sa charge totale, $q = q_1 + q_2$, sera nulle. Il est possible, sans toucher ce conducteur, de l'amener à l'état neutre, c'est-à-dire à un état dans lequel aucun de ses points ne porte plus d'électricité : dans l'exemple indiqué, il suffit de retirer le conducteur A. Inversement, le conducteur B étant à l'état neutre, il est possible, sans le toucher, d'y créer des charges électriques positives et négatives, égales en valeur absolue : il suffit d'en approcher le corps électrisé A. Le principe de la conservation de l'électricité se traduit ici par le fait que *les deux électricités, positive et négative, se produisent toujours en quantités égales.*

Nous appliquerons ce principe, non seulement aux conducteurs, mais encore aux isolants. Lorsque par exemple on frotte le bâton de verre avec un morceau de drap, le bâton de verre acquiert une charge positive, le drap se recouvre d'une charge négative égale. C'est ce que l'on montre grossièrement en frottant l'un contre l'autre un disque de verre et un disque semblable recouvert de drap · on constate que, tant qu'ils sont maintenus l'un contre l'autre, les deux disques n'exercent aucune action sur un pendule électrisé ; mais que, si on les sépare, l'un attire le pendule, l'autre le repousse.

Dans les conceptions de Coulomb, il existait deux fluides, l'un positif, l'autre négatif, contenus en quantités égales et illimitées dans la matière : l'électrisation avait pour effet de séparer une certaine fraction de ces fluides, d'amener en certains points un excès de fluide positif, en d'autres un excès égal de fluide négatif. Nous verrons plus tard quelles sont les conceptions modernes : chaque atome, à l'état neutre, contient un noyau chargé d'électricité positive, autour duquel gravitent un certain nombre de corpuscules d'électricité négative, d'*électrons ;* l'extrême petitesse de l'atome, et la charge relativement considérable de ses différentes parties font que l'on peut encore considérer que la matière contient des quantités pratiquement illimitées des deux électricités. Dans la théorie électronique, les conducteurs sont caractérisés par la présence, entre les atomes, d'électrons libres : aucune force, autre que des forces de frotte-

ment s'annulant avec la vitesse, ne s'oppose au déplacement de ces électrons. Quand un conducteur est à l'état neutre, un élément de volume du conducteur contient à la fois des charges positives et des charges négatives, mais leur somme est nulle ; si les électrons libres viennent à être déplacés à l'intérieur du conducteur, la partie où ils s'accumulent est chargée négativement, la partie qui en contient une moins grande quantité qu'à l'état neutre est chargée positivement.

Comme ces conceptions sont tout à fait équivalentes à celles de Coulomb, nous continuerons à employer le langage des deux fluides : nous admettrons que dans un conducteur il y a des quantités pratiquement illimitées de chacune des deux électricités, que seule la détermination de la somme algébrique de ces quantités est accessible à l'expérience, et que leur répartition apparente peut varier d'un état d'équilibre à l'autre.

27. Résumé des hypothèses fondamentales de l'électrostatique. — Les hypothèses énoncées jusqu'ici sont les hypothèses fondamentales de l'électrostatique. Elles suffisent pour l'étude de l'équilibre, électrique et mécanique, des conducteurs placés dans le vide ; nous avons d'ailleurs déjà indiqué (§ 20) que les modifications apportées, du fait que les conducteurs sont placés dans l'air, sont négligeables. Nous allons développer cette étude, à partir de ces hypothèses, que nous considérons comme posées *à priori* ; nous les vérifierons expérimentalement par la vérification de leurs conséquences. Mais auparavant, nous allons les rappeler dans un tableau d'ensemble.

1° *La force* $\vec{F}$ *qui s'exerce sur une charge électrique placée en un point* M *peut être considérée comme le produit d'une quantité scalaire, positive ou négative,* q, *caractérisant cette charge électrique, et qu'on appelle la quantité d'électricité placée en* M, *par un vecteur* $\vec{H}$, *caractérisant le point* M *de l'espace, et qu'on appelle le champ électrique en ce point.*

2° *Le champ* H *produit par une charge électrique* q' *varie en raison inverse du carré de la distance, quel que soit le milieu matériel dans lequel on se trouve.*

De ces deux hypothèses, et du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, résulte la formule de Coulomb $F = qq'/\varepsilon_0 r^2$, donnant la force qui s'exerce entre deux charges ponctuelles. Le coefficient numérique ε_0 ne dépend que du choix des unités ; il est égal à 1 si l'on mesure la charge électrique en unités électrostatiques.

Le champ créé par un corps électrisé est la résultante de tous les champs créés par les charges ponctuelles réparties sur ce corps. Les forces qui s'exercent sur un corps électrisé sont les résultantes de toutes les forces élémentaires qui s'exercent sur les charges ponctuelles portées par ce corps.

Ces hypothèses peuvent s'exprimer, soit par le théorème de Gauss, soit par la relation de Poisson.

3° *La quantité totale d'électricité portée par un système isolé est constante.* Cette quantité est la somme algébrique des quantités d'électricité positive et négative ; on doit considérer ces deux dernières quantités comme indéterminées, seule leur somme algébrique est déterminée.

4° *Il existe des corps, appelés conducteurs, tels qu'une charge électrique ne*

peut être en équilibre en un point d'un de ces corps que si elle n'y est soumise à aucune force tendant à la déplacer dans le conducteur.

II. — *ÉTUDE DU CHAMP A L'INTÉRIEUR ET AU VOISINAGE D'UN CONDUCTEUR EN ÉQUILIBRE*

28. Champ à l'intérieur d'un conducteur. — D'après l'avant-dernière des hypothèses fondamentales énumérées ci-dessus, il existe toujours des charges électriques en un point quelconque situé à l'intérieur de la masse du conducteur. D'après la dernière, ces charges ne doivent être soumises à aucune force : *le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul.*

D'après le théorème de Gauss, la densité cubique électrique, $\rho = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \operatorname{div} \vec{H}$, est nulle dans toute la région où le champ est nul : *il ne peut pas y avoir de charges électriques libres à l'intérieur du conducteur,* c'est-à-dire que les charges positives et négatives qui existent dans chaque élément de volume se neutralisent exactement. *La charge électrique d'un conducteur est entièrement répartie sur sa surface.*

Considérons par exemple une sphère métallique pleine électrisée, isolée dans l'espace. Le champ en tout point intérieur est nul, la distribution de l'électricité est uniquement superficielle, et est nécessairement uniforme, par raison de symétrie. Nous voyons pourquoi le champ est nul en tout point intérieur : c'est le champ créé en ce point par une couche sphérique uniforme, nous avons démontré, au paragraphe 19, qu'il est nul. Le champ en un point à l'intérieur d'un conducteur peut, et doit, se calculer par la loi de Coulomb, $H = \frac{q}{\varepsilon_0 r^2}$, il n'y a pas à modifier cette loi par suite de l'interposition de la matière conductrice ; il est nul, parce que les charges électriques se répartissent à la surface du conducteur de telle sorte qu'elles produisent un champ égal à zéro en tous les points intérieurs.

Le potentiel, dont le champ représente, au signe près, le gradient, est constant dans toute la région où le champ est nul. *Le potentiel a la même valeur en tous les points d'un conducteur.* Le volume occupé par la matière conductrice est un volume équipotentiel ; la surface qui la limite est une surface équipotentielle.

29. Champ au voisinage d'un conducteur : théorème de Coulomb. — Nous avons déjà fait remarquer (§ 14) que la fonction potentiel est finie et continue même sur une surface électrisée. La surface du conducteur doit donc être considérée comme l'une des surfaces équipotentielles (§ 4) relatives à la fonction potentiel à l'extérieur du conducteur. *Le champ, en un point de la surface du conducteur, est normal à cette surface.* Les lignes de force, à l'extérieur du conducteur, sont normales à la surface du conducteur ; elles s'arrêtent à cette surface, et ne se prolongent pas à l'intérieur, où le champ est nul.

Nous allons maintenant établir une relation entre l'intensité H du champ

en un point M extérieur infiniment voisin de la surface du conducteur (*fig.* 25) et la densité superficielle σ sur cette surface.

Considérons, sur le conducteur au voisinage du point M, un petit élément AB de surface dS ; prenons le tube de force, normal au conducteur, s'appuyant sur le contour de l'élément AB, et coupons-le par une surface A'B', parallèle à la surface du conducteur, et passant par le point M : la surface A'B' est encore égale à dS. Constituons une surface fermée Σ par la surface A'B', les parois du tube de force, et une surface ACB intérieure au conducteur, et appliquons-lui le théorème de Gauss. Les charges électriques contenues à l'intérieur de la surface Σ sont les charges portées par l'élément AB de la surface du conducteur; leur valeur est $\sigma\, dS$, et le flux qui sort de cette surface est $\Phi = 4\pi\sigma\, dS/\varepsilon_0$. Ce flux se compose du flux à travers la surface ACB, qui est nul, puisque le champ est nul en tout point intérieur au conducteur, du flux à travers les parois du tube de force, qui est nul puisque le champ en chaque point est tangent à ces parois, et enfin du flux à travers la surface A'B'. Le champ $\vec{H}$ est normal à la surface A'B'; comptons son intensité H positivement lorsqu'il est dirigé vers l'extérieur du conducteur, c'est-à-dire vers l'extérieur de la surface fermée Σ : le flux qui sort de la surface Σ à travers l'élément A'B' est $\Phi = H\, dS$. En égalant les deux valeurs trouvées pour Φ, on a l'expression du *théorème de Coulomb* :

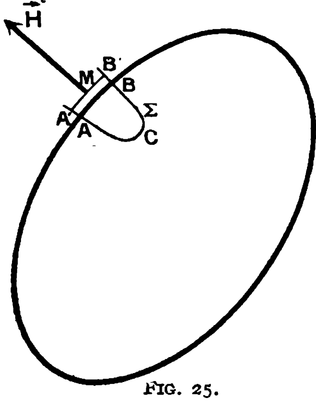


FIG. 25.

$$H = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Le champ est dirigé vers l'extérieur du conducteur quand la charge est positive, vers l'intérieur quand la charge est négative. On peut encore dire, en attribuant aux lignes de force un sens, qui sera le sens du champ, que les lignes de force partent des régions des conducteurs chargées d'électricité positive, qu'elles aboutissent aux régions chargées d'électricité négative.

Dans toute la suite de ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous supposerons, pour simplifier les formules, les différentes grandeurs mesurées en unités électrostatiques. Avec ces unités ($\varepsilon_0 = 1$), *l'intensité* $H = 4\pi\sigma$ *du champ est égale au produit par* 4π *de la densité superficielle.*

Si $\dfrac{\partial V}{\partial n}$ représente la dérivée partielle de la fonction potentiel V dans la direction normale à la surface, le sens positif de la normale étant celui qui va vers l'extérieur, on a $H = -\dfrac{\partial V}{\partial n}$, et $4\pi\sigma = -\dfrac{\partial V}{\partial n}$. La propriété donnée pour le sens des lignes de force s'exprime alors par le fait que le potentiel décroît à partir des régions chargées d'électricité positive, croît à partir de celles qui sont chargées d'électricité négative.

Représentons par exemple le champ produit par une sphère métallique électrisée, isolée dans l'espace (*fig.* 26). Par raison de symétrie, les lignes de force sont des droites issues du centre de la sphère, les surfaces équipotentielles des sphères concentriques. Lignes de force et surfaces équipotentielles n'exis-

tent qu'en dehors du conducteur ; si son électrisation est positive, les lignes de force partent de sa surface, et les potentiels décroissent à mesure qu'on s'en écarte. Nous savons d'ailleurs, l'électrisation étant uniforme par raison de symétrie, que le champ et le potentiel ont les mêmes valeurs que si toute la charge électrique Q était concentrée au centre : au voisinage immédiat de la surface du conducteur sphérique, de rayon R, l'intensité du champ est $H = \frac{Q}{R^2}$.

D'après le théorème de Coulomb, cette intensité est $H = 4\pi\sigma$; comme la surface de la sphère est $4\pi R^2$, la charge totale est $Q = 4\pi\sigma R^2$, et la valeur trouvée par le théorème de Coulomb est bien la même que celle précédemment calculée.

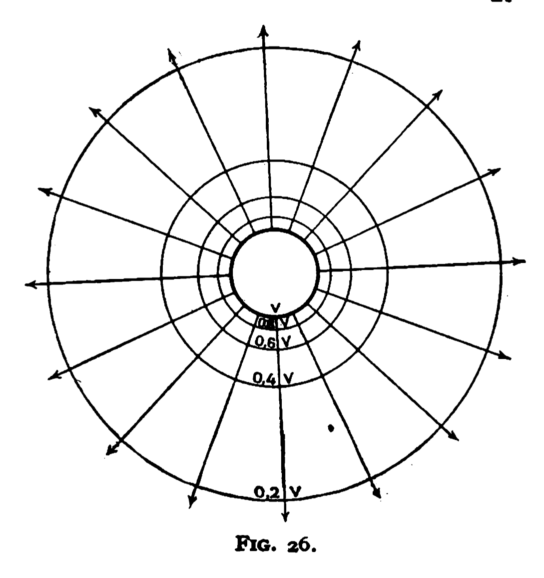


FIG. 26.

30. Pression électrostatique. — Nous allons maintenant calculer les forces auxquelles sont soumises les charges électriques réparties à la surface d'un conducteur en équilibre. Si nous considérons la charge $\sigma\, dS$, placée, autour d'un point P, sur un élément de surface AB (*fig.* 27) elle est soumise à une force $\vec{dF} = \vec{H}\sigma\, dS$, en désignant par $\vec{H}$ le champ créé par toutes les charges électriques autres que la charge $\sigma\, dS$, réparties sur le conducteur ou en d'autres points de l'espace.

Choisissons deux points P_1P_2 infiniment voisins du point P, l'un à l'extérieur, l'autre à l'intérieur du conducteur, les distances P_1P, P_2P étant infiniment petites par rapport aux dimensions linéaires de l'élément AB. En chacun de ces points nous pouvons calculer les champs $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$, comme la résultante des champs $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, créés par les charges portées par l'élément de surface AB, et du champ $\vec{H}$, créé par toutes les autres charges électriques : ce dernier champ $\vec{H}$ est le même qu'au point P, puisque les distances du point P aux points P_1P_2 sont infiniment petites par rapport à sa distance à une quelconque des charges qui créent le champ $\vec{H}$. On a :

$$\vec{H}_1 = \vec{H} + \vec{h}_1, \qquad \vec{H}_2 = \vec{H} + \vec{h}_2.$$

Le champ total $\vec{H}_2$ est nul, puisque le point P_2 est à l'intérieur du conducteur ; les champs $\vec{h}_2$ et $\vec{h}_1$, créés par l'élément AB aux deux points P_1P_2 infini-

ment voisins de part et d'autre, sont égaux et directement opposés comme pour un plan indéfini. On a :

$$\vec{H}_2 = 0, \qquad \vec{h}_1 + \vec{h}_2 = 0;$$
$$\vec{H}_1 = 2\vec{H}.$$

Le champ $\vec{H}_1$ au point P_1 voisin du conducteur est normal à la surface du conducteur, et égal, d'après le théorème de Coulomb, à $4\pi\sigma$; le champ $\vec{H}$ est également normal à la surface du conducteur et est égal à $2\pi\sigma$. La force $d\vec{F}$ est donc normale à la surface du conducteur et égale à $2\pi\sigma^2 dS$. La formule $H_1 = 4\pi\sigma$ donne également le sens du champ H_1, à condition de prendre comme direction positive de la normale celle qui va vers l'extérieur du conducteur ; il en est de même pour la formule qui donne la force :

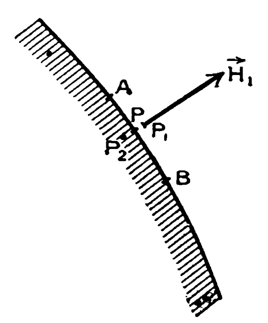


FIG. 27.

$$dF = 2\pi\sigma^2 dS.$$

Les charges électriques réparties sur la surface d'un conducteur en équilibre sont soumises à des forces, normales à cette surface, dirigées vers l'extérieur quel que soit le signe des charges, et dont la valeur, par unité de surface, est égale au produit par 2π du carré de la densité superficielle mesurée en unités électrostatiques. Ces forces, normales à la surface, et proportionnelles à cette surface, sont analogues à des forces de pression : c'est pourquoi la force par unité de surface, $2\pi\sigma^2$, s'appelle la **pression électrostatique.**

La force totale qui s'exerce sur un conducteur en équilibre avec des charges électriques extérieures est la résultante des forces qui s'exercent sur toutes les charges électriques réparties à la surface du conducteur : elle pourra se calculer comme la résultante de toutes les forces de pression électrostatique sur la surface du conducteur.

On peut montrer expérimentalement l'existence des forces de pression électrostatique, en rendant mobile une portion de la surface d'un conducteur. Un aréomètre flotte dans un vase isolé rempli d'eau ; la surface du conducteur est constituée par la surface du vase, la surface de l'eau, et la surface de la partie émergente de l'aréomètre. Les forces de pression électrostatique sur cette dernière surface ont évidemment une résultante verticale et dirigée vers le haut : on constate effectivement, en électrisant l'eau à l'aide d'une machine électrostatique, un déplacement de l'aréomètre vers le haut.

31. Champ dans une cavité creusée à l'intérieur d'un conducteur. — Considérons maintenant un conducteur C (*fig.* 28), présentant une cavité entièrement entourée par la matière conductrice et supposons qu'il n'y ait pas de charges électriques à l'intérieur de la cavité. La surface intérieure du conducteur est une surface équipotentielle ; dans le volume qu'elle limite, le potentiel doit avoir une valeur constante, car, s'il n'en était pas ainsi, il y aurait nécessairement des points où il serait maximum ou minimum, ce qui est im-

possible dans une région ne contenant pas de charges électriques (§§ 16 et 21). Donc : *le potentiel est constant dans tout le volume du conducteur et de la cavité ; le champ électrique est nul en tous les points situés à l'intérieur du conducteur ou à l'intérieur de la cavité.*

Prenons une surface fermée quelconque Σ, dont une partie est dans la masse conductrice, une partie dans la cavité, à l'intérieur de laquelle se trouve par conséquent une portion de la surface intérieure du conducteur. Le champ est nul en tous les points de la surface Σ, le flux à travers cette surface est nul ; d'après le théorème de Gauss, la charge électrique qu'elle renferme est nulle : *il n'y a pas d'électricité sur la surface intérieure du conducteur.*

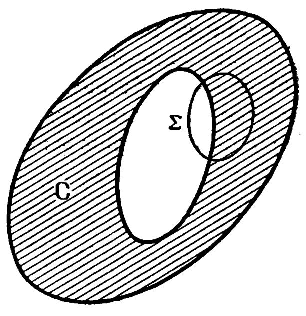


FIG. 28.

On voit que, lorsqu'on étudiera l'équilibre des conducteurs, il n'y aura pas à s'occuper de savoir si ces conducteurs sont pleins ou creux : du moment où l'on ne place pas de corps chargés à l'intérieur de la cavité, le champ est nul dans la cavité, et la charge est nulle sur la surface qui la limite, exactement comme si la cavité était remplie de matière conductrice.

La vérification expérimentale des propriétés du conducteur creux peut se faire à l'aide de l'appareil représenté par la figure 29 : une sphère métallique creuse S, portée par un pied isolant, présente une ouverture BC, qu'on peut fermer par un couvercle A, auquel est suspendue, par un fil isolant, une petite sphère S′. On charge la boule S′, on l'introduit à l'intérieur de S et on laisse reposer le couvercle sur la sphère S. On incline l'appareil de façon que S et S′ se touchent : la surface de S′ fait partie de la surface intérieure du conducteur unique constitué par S et S′, la boule se décharge entièrement et sa charge se répartit sur la surface extérieure de S. On remet l'appareil vertical, et, à l'aide d'un crochet isolant, on enlève le couvercle A et la boule S′, en ayant soin que cette dernière ne touche pas les bords du trou percé dans S. On décharge A par contact, sans toucher S′, et l'on peut vérifier, par exemple en touchant l'électroscope avec la boule S′, que cette boule ne porte effectivement aucune charge. Si la sphère extérieure S était primitivement neutre, on peut constater que sa surface extérieure porte maintenant une charge : il suffit par exemple de la toucher avec la boule S′, toujours portée par le crochet isolant, pour que cette boule prenne une charge décelable à l'électroscope.

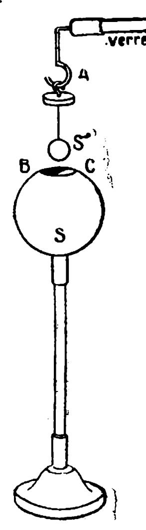
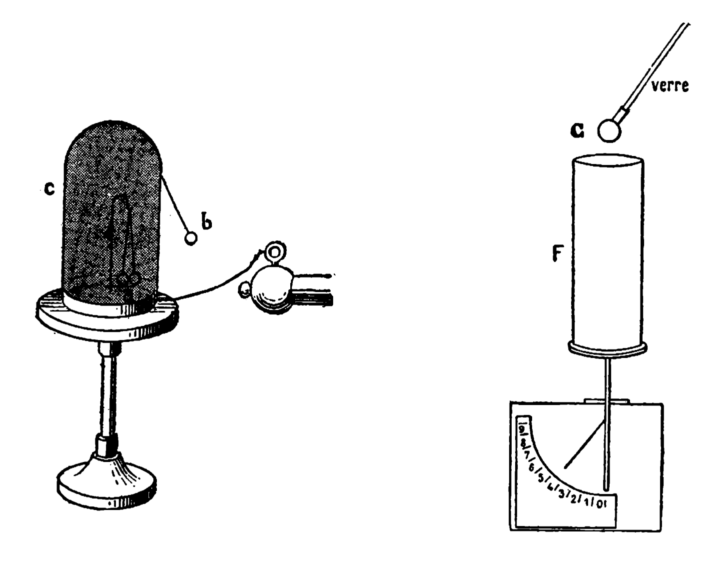


FIG. 29.

Cette expérience présente un intérêt théorique considérable. La propriété que nous vérifions ainsi, que la surface intérieure d'un conducteur ne porte aucune charge, a été déduite de la loi de Coulomb : sa vérification expérimentale est une vérification de la loi de Coulomb.

La forme de l'expérience peut d'ailleurs être modifiée, de façon que les sphères S et S′ soient concentriques au moment du contact : il suffit d'établir

ce contact par un fil passant à travers un petit trou de la sphère S. Quand l'équilibre est atteint, il résulte des propriétés du conducteur (hypothèses 3 et 4 du § 27), indépendamment de la loi de Coulomb, que le champ à l'intérieur de la boule S′ est nul; puisque l'expérience montre que la boule S′ ne porte aucune charge, ce champ nul est précisément celui que crée la sphère S. La charge portée par cette sphère est, par raison de symétrie, répartie uniformément sur sa surface : l'expérience montre donc qu'une couche sphérique uniforme produit un champ nul en tout point intérieur, et constitue par suite une vérification de la loi de Coulomb (§ 19). Cette vérification a été faite par Maxwell; elle est plus précise qu'une vérification directe, comportant une série de mesures de forces; il suffit ici de constater que la boule S′ n'exerce aucune action sur un appareil de mesure, qui peut d'ailleurs être un électromètre plus sensible qu'un électroscope à feuille d'or : tandis que la



précision des vérifications directes atteint à peine 1/20, Maxwell a vérifié que la charge conservée par la boule S′ n'était certainement pas 1/2.000 de sa charge primitive. L'expérience a d'ailleurs été reprise récemment avec des méthodes de mesure modernes : on a trouvé que la loi de Coulomb était parfaitement vérifiée, l'erreur possible étant bien inférieure à 1/1.000.000.

On peut encore montrer d'une façon frappante les propriétés du conducteur creux par l'expérience de la cage de Faraday. Une cage métallique *c* (*fig.* 30) porte des pendules extérieurs et intérieurs. On l'électrise fortement par une machine électrostatique : les pendules extérieurs *b* divergent, les pendules intérieurs *a* restent immobiles, même si on électrise assez fortement la cage pour en tirer des étincelles de plusieurs centimètres de longueur. On voit qu'il n'est pas nécessaire que la cavité soit entièrement entourée de matière conductrice, et qu'un treillage peut jouer pratiquement le même rôle qu'une plaque métallique (voir § 41). On sait qu'on applique cette pro-

priété à la protection des édifices contre la foudre, en les entourant d'un treillage à larges mailles constitué par des câbles métalliques reliés au sol.

32. Cylindre de Faraday. — On peut réaliser un conducteur creux, avec une précision suffisante pour la plupart des expériences, par un cylindre métallique F dont la hauteur est égale à plusieurs fois le diamètre (*fig.* 31). Si l'on introduit dans le cylindre un conducteur chargé C, tenu à l'extrémité d'un manche isolant, et si on lui fait toucher la paroi intérieure du cylindre, en un point qui ne soit pas trop rapproché de l'ouverture, sa charge passe sur la surface extérieure du cylindre, et l'on peut constater, par exemple avec un électroscope, que le conducteur C est entièrement déchargé. On place généralement le cylindre, dit **cylindre de Faraday,** sur le plateau de l'électroscope : l'écart α de la feuille caractérise expérimentalement la charge q que portait le corps C. Un conducteur C′ portera la même charge q si, en l'introduisant dans le cylindre préalablement ramené à l'état neutre, on obtient la même déviation α de l'électroscope.

Après avoir fait passer la première charge q dans le cylindre de Faraday, chargeons à nouveau, exactement dans les mêmes conditions, le conducteur C, et reportons-le dans le cylindre, qui n'a pas été déchargé : la nouvelle charge q du conducteur C passe dans le conducteur formé par le cylindre et l'électroscope, qui a ainsi acquis le même état d'électrisation que si l'on avait apporté directement dans le cylindre une charge $2q$: la déviation β de l'électroscope caractérise la charge $2q$. On peut ainsi continuer, et dresser un tableau des déviations α, β, γ..., correspondant à des charges q, $2q$, $3q$..., apportées dans le cylindre. On a *étalonné* l'électroscope, et l'appareil constitué par le cylindre de Faraday et l'électroscope peut désormais servir à la **mesure des charges ;** il suffira d'apporter une charge électrique dans le cylindre, de mesurer la déviation obtenue et de se reporter au tableau pour savoir combien de fois cette charge vaut la charge étalon q. On a un appareil de mesures relatives permettant de mesurer les quantités d'électricité avec une unité arbitraire q.

FIG. 32.

On emploiera cet appareil à la détermination de la densité électrique à la surface d'un conducteur au moyen d'un appareil auxiliaire, le **plan d'épreuve** (*fig.* 32) : c'est un petit disque de clinquant porté par un manche isolant, que l'on applique sur la partie de la surface du conducteur que l'on veut étudier. L'électricité portée par cette partie de surface passe sur le disque de clinquant; si on le porte ensuite dans le cylindre de Faraday, la charge apportée dans ce cylindre est proportionnelle à la densité électrique au point du conducteur qu'on a touché avec le plan d'épreuve : on mesure ainsi cette densité en valeur relative.

III. — *PHÉNOMÈNES D'INFLUENCE*

33. Généralités sur les phénomènes d'influence. — Prenons un conducteur B isolé et neutre, et plaçons-le dans un champ électrique $\vec{H}$ (*fig.* 33). Sous l'influence de ce champ $\vec{H}$, les charges électriques, qui existent en quan-

tité illimitée aux différents points du conducteur B, vont se déplacer : dans le cas de la figure, les charges électriques positives viendront s'accumuler sur la partie gauche D du conducteur, les charges négatives sur la partie droite C, Les charges ainsi déplacées créeront un champ, dont le sens, à l'intérieur du conducteur, sera opposé au sens du champ $\vec{H}$, et le déplacement de l'électricité ne s'arrêtera que lorsque la résultante de ces deux champs sera nulle en tous les points de l'intérieur du conducteur. On dit que le conducteur B s'est électrisé par *influence:* il semble s'être créé, sur sa surface, des charges électriques. *La somme des charges électriques positives et négatives développées par influence sur un conducteur isolé est nulle,* d'après le principe de la conservation de l'électricité ; *leur distribution est telle que le champ total à l'intérieur du conducteur soit nul ;* le champ en un point extérieur voisin de la surface et les forces auxquelles sont soumises les charges électriques créées par influence sont donnés par les théorèmes généraux énoncés aux paragraphes précédents.

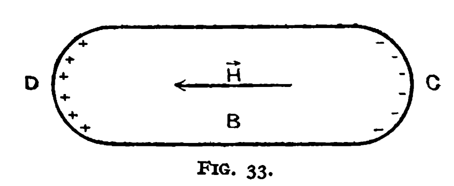


FIG. 33.

Pour montrer l'existence des phénomènes d'influence, on peut prendre pour

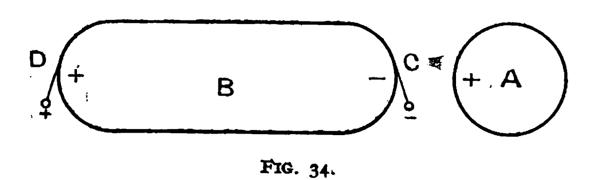


FIG. 34.

conducteur B un cylindre métallique terminé par des parties arrondies et créer le champ $\vec{H}$ en approchant de ce cylindre une sphère chargée A (*fig.* 34) : si la sphère A est chargée positivement, le cylindre B se charge négativement sur la partie C voisine de A, positivement sur la partie D opposée. De petits pendules électriques à fil conducteur collés sur le conducteur B divergent : on vérifie facilement le signe de l'électrisation à l'aide du plan d'épreuve.

Si l'on touche avec le doigt, en un point quelconque, le cylindre B, on constitue un conducteur unique avec B et le sol, et toute l'électricité positive s'écoule dans le sol : les pendules D retombent. Si maintenant, après avoir retiré le doigt, on enlève le corps A, l'électricité négative qui reste sur B se répartit sur toute sa surface, de façon à réaliser une nouvelle distribution d'équilibre créant un champ nul à l'intérieur du conducteur : les pendules D divergent à nouveau, tandis que la déviation des pendules C diminue, et l'on peut vérifier que tous les pendules sont chargés négativement. On a chargé le conducteur B par influence, et la charge obtenue est de signe contraire à la charge influençante A.

La même expérience peut être réalisée en prenant pour conducteur influencé l'électroscope lui-même, et pour charges influençantes des charges

quelconques, par exemple les charges positives portées par le bâton de verre électrisé A, qu'on approche de l'électroscope (*fig.* 35) : la boule C se charge négativement, la feuille D positivement. Si l'on touche la boule avec le doigt, la feuille retombe : l'électricité positive s'est écoulée dans le sol. Si on enlève le doigt et qu'on écarte le bâton de verre A, la feuille dévie à nouveau : elle est maintenant chargée d'électricité négative. Si de l'électroscope ainsi chargé on approche le bâton d'ébonite chargé négativement, il se crée par influence de l'électricité négative dans la feuille, sa déviation augmente ; si on en approche le bâton de verre chargé positivement, il se crée par influence de l'électricité positive dans la feuille, sa déviation diminue ; si on l'approchait plus près, la charge positive créée pourrait l'emporter sur la charge négative préexistante, et l'on pourrait observer un nouvel écart. L'électroscope, préalablement chargé par l'influence d'un corps portant une charge de signe connu, peut servir à reconnaître, par influence, le signe de la charge portée par un corps quelconque, à condition qu'on l'en approche lentement.

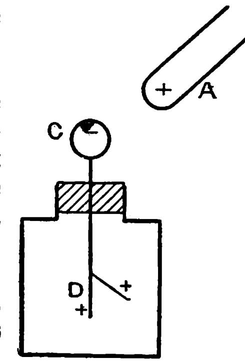


FIG. 35

On peut illustrer par une expérience l'interprétation donnée au début de ce paragraphe des phénomènes d'influence, en étudiant ces phénomènes sur un corps assez mauvais conducteur pour que les déplacements des charges électriques y soient lents. Plaçons un électroscope sous une cloche de verre imparfaitement desséchée et approchons le bâton d'ébonite chargé : la feuille de l'électroscope dévie, l'électroscope se charge par influence, sous l'action du champ $\vec{H}$ créé par le bâton d'ébonite. Mais, si on laisse le bâton immobile, la déviation de la feuille diminue peu à peu, jusqu'à s'annuler : les charges se sont déplacées lentement sur la cloche de verre mauvaise conductrice, et se sont réparties à sa surface extérieure de façon à annuler le champ à l'intérieur. Retirons maintenant le bâton d'ébonite : le champ —$\vec{H}$ des charges créées par influence subsiste seul, la feuille de l'électroscope dévie à nouveau, pour revenir bientôt au zéro lorsque ces charges auront eu le temps de se déplacer et de se détruire.

34. Attraction des corps légers conducteurs. — Nous pouvons maintenant expliquer une des expériences en apparence les plus simples de l'électrostatique, l'attraction des corps légers. Prenons par exemple un pendule électrique B, constitué par une petite boule conductrice suspendue à un fil isolant. Nous avons, dès le début de notre étude, envisagé de tels pendules, et parlé des forces auxquelles ils étaient soumis dans un champ électrique; mais nous avons toujours supposé que ces pendules étaient électrisés. Nous supposons maintenant, au contraire, que le conducteur B est à l'état neutre. Approchons-en la sphère A électrisée positivement (*fig.* 36) : il se développe sur B des charges négatives et positives, qui sont respectivement attirées et repoussées par la sphère A. Comme ces charges sont égales en valeur absolue, et que les charges négatives sont plus près de A que les charges positives, les forces d'attraction sont supérieures aux forces de répulsion, le pendule B est attiré.

Supposons maintenant que la boule conductrice B soit suspendue à un fil

conducteur, et en communication par ce fil avec le sol. Les charges développées par influence par l'action de la sphère A sont uniquement des charges négatives (*fig.* 37), les forces qui s'exercent sur elles sont uniquement des forces d'attraction. Ces charges sont d'ailleurs plus grandes, en valeur absolue, que les charges négatives qui se développeraient sur le conducteur B

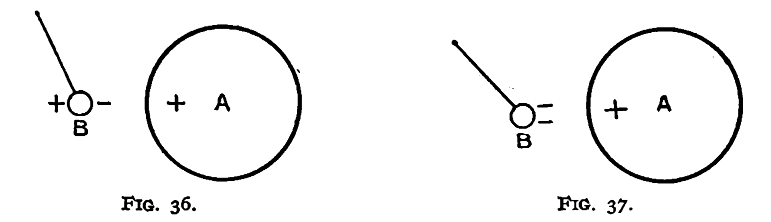


FIG. 36. FIG. 37.

isolé et neutre : leur action doit suffire à compenser, à l'intérieur de B, le champ créé par A, tandis que cette compensation est obtenue, dans le pendule neutre, par l'addition des actions des charges positives et négatives créées par influence. La force d'attraction qui s'exerce sur le pendule conducteur est donc plus grande que celle qui s'exerce sur le pendule isolé et primitivement neutre.

Il est facile de constater expérimentalement ces faits, et en particulier de constater que, de deux pendules identiques, mais dont l'un est suspendu par un fil isolant et l'autre par un fil conducteur, c'est ce dernier qui est le plus fortement dévié quand on le place à la même distance de la sphère A.

On expliquera de même l'attraction des corps légers électrisés par les corps métalliques, par l'action des charges électriques créées par influence sur ces derniers. Si du pendule B, isolé et électrisé, on approche la sphère A isolée et neutre, le pendule B est attiré. Si on touche la sphère A avec le doigt, cette attraction augmente, le pendule B s'écarte davantage de la verticale. Nous calculerons plus tard (§ 44) les forces d'attraction correspondant à ces deux cas, en supposant les dimensions de la boule B négligeables.

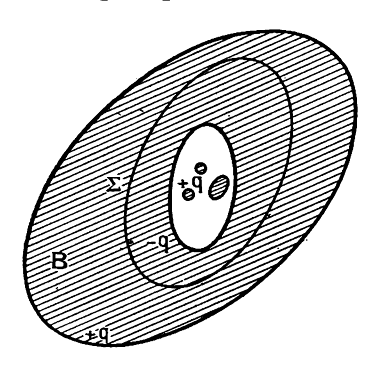


FIG. 38.

35. Influence totale. — On dit que l'influence est totale quand le conducteur influencé entoure complètement les charges électriques influençantes. Dans la cavité d'un conducteur creux B sont placées, n'importe où et en nombre quelconque, des charges électriques ; soit q la somme de ces charges, que nous supposerons, par exemple, positive. Évaluons le flux à travers une surface fermée Σ prise tout entière à l'intérieur de la masse conductrice B (*fig.* 38) : le champ est nul en tous ses points, le flux qui la traverse est nul. Il en résulte, d'après le théorème de Gauss, qu'elle contient une charge électrique totale nulle ; la charge portée par la surface intérieure du conducteur B est égale à — q : *la somme des quantités d'électricité réparties sur la surface intérieure d'un conducteur creux est égale en valeur absolue et de*

signe contraire à la somme des quantités d'électricité placées à l'intérieur de la cavité. Si le conducteur B est isolé, et s'il était à l'état neutre avant l'introduction des charges intérieures, la somme des quantités d'électricité réparties sur sa surface extérieure est égale à $+ q$.

Ces résultats peuvent se vérifier expérimentalement à l'aide du cylindre de Faraday (§ 32). Si nous introduisons la petite boule conductrice C, portant une charge $+ q$, à l'intérieur de ce cylindre (*fig.* 39), et si nous l'enfonçons suffisamment pour qu'elle ne soit plus voisine de l'ouverture, nous constatons que la déviation de la feuille de l'électroscope ne dépend plus de la position de C à l'intérieur du cylindre. Cette déviation caractérise la charge $+ q'$ développée par influence, et répartie sur la surface extérieure du cylindre et sur l'électroscope : nous vérifions que la charge totale $+ q'$ est indépendante de la position de la charge influençante. Touchons la surface intérieure du cylindre avec la boule : la déviation ne varie pas non plus. La boule est maintenant entièrement déchargée, et c'est la charge $+ q$ qui est répartie sur la surface extérieure du cylindre et sur l'électroscope. Nous avons constaté que la déviation n'a pas été modifiée par la substitution de la charge $+ q$ à la charge $+ q'$, nous avons donc vérifié que ces deux charges sont égales. Au lieu de toucher le cylindre avec la boule C, touchons-le avec le doigt, et retirons ensuite la boule C : c'est maintenant la charge $- q'$, développée par influence sur la surface intérieure du cylindre, qui se répartit sur la surface extérieure et sur l'électroscope ; cette charge est égale en valeur absolue à la charge q, et nous vérifions en effet que la déviation de l'électroscope est encore la même. L'expérience peut d'ailleurs être rendue plus précise si on le désire, en remplaçant l'électroscope par un électromètre plus sensible, par exemple l'électromètre à quadrants, que nous décrirons au chapitre VII ; nous indiquerons plus tard (§ 86) comment le montage doit alors être effectué, et quelles sont les précautions à prendre.

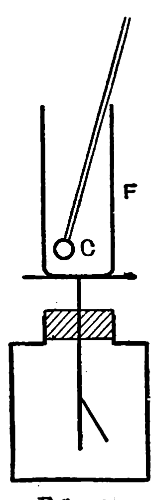


FIG. 39.

On voit que le cylindre de Faraday associé à l'électroscope permet de mesurer une quantité d'électricité, non seulement par contact, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 32, mais encore par influence : il n'est pas nécessaire que la quantité d'électricité à mesurer puisse passer sur le cylindre, il suffit qu'elle puisse être amenée à l'intérieur du cylindre, et elle peut par exemple être portée par un isolant. C'est ainsi qu'on pourra vérifier le principe de la conservation de l'électricité dans le phénomène d'électrisation par frottement: plaçons au fond du cylindre un morceau de peau de chat, et enfonçons dans le cylindre le bâton d'ébonite : si les deux corps ne sont pas chargés, la feuille de l'électroscope ne dévie pas. Frottons à l'intérieur du cylindre le bâton d'ébonite sur la peau de chat, la feuille ne bouge pas : la quantité d'électricité totale est nulle ; retirons le bâton, l'électricité positive créée sur la peau de chat reste seule dans le cylindre, la feuille dévie. L'expérience peut aussi être faite en remplaçant l'électroscope par un électromètre plus sensible, la seule difficulté est de décharger suffisamment les isolants avant leur introduction dans le cylindre.

36. Théorème des éléments correspondants. — Considérons deux conducteurs en équilibre C et C′, et un tube de force T allant de l'un à l'autre (*fig.* 40) : il découpe, sur les surfaces de ces conducteurs, deux éléments AB, A′B′, qui sont appelés des **éléments correspondants.** Rappelons que les lignes de force sont normales aux surfaces des conducteurs, et vont du conducteur au potentiel le plus élevé au conducteur au potentiel le plus faible, des parties chargées positivement aux parties chargées négativement (§ 29).

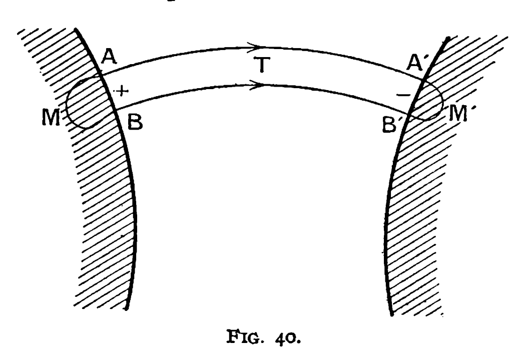


FIG. 40.

Constituons une surface fermée Σ par les parois du tube de force T et deux surfaces quelconques AMB, A′M′B′ prises à l'intérieur des conducteurs, et évaluons le flux qui traverse la surface Σ. Le flux à travers les parois du tube de force est nul, puisque le champ est tangent en chaque point à la surface ; le

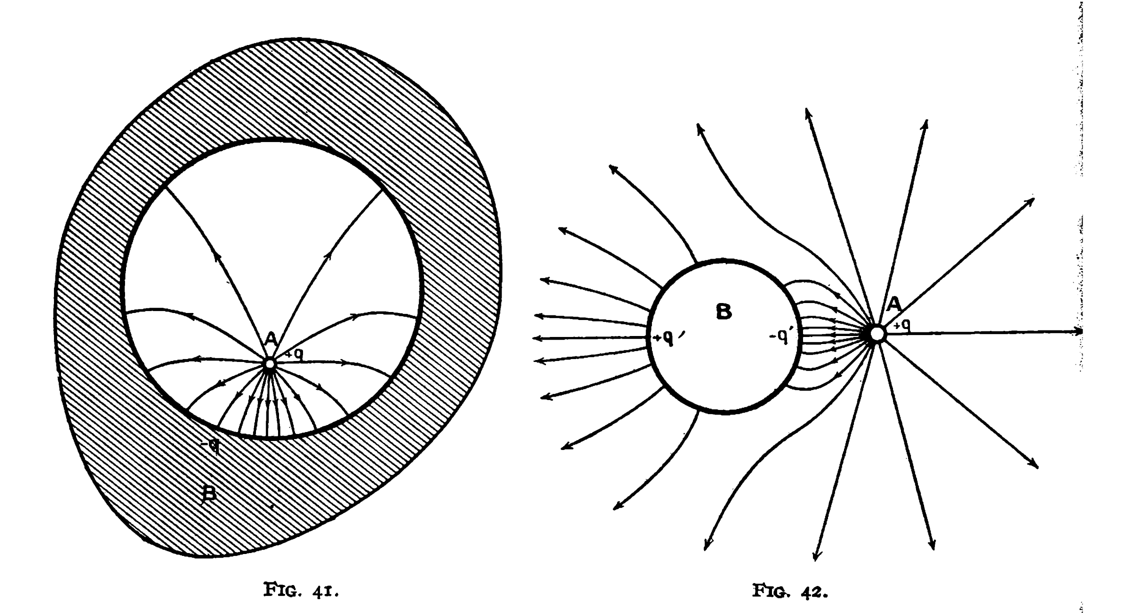


FIG. 41. FIG. 42.

flux à travers les surfaces AMB, A′M′B′ est nul, puisque le champ est nul en tout point intérieur à un conducteur : le flux qui traverse la surface fermée Σ est nul. Il en résulte, d'après le théorème de Gauss, que la somme des quantités d'électricité qu'elle renferme est nulle ; ces quantités d'électricité sont réparties sur les éléments correspondants AB et A′B′ des surfaces des conducteurs C et C′; *les quantités d'électricité portées par deux éléments correspondants sont égales en valeur absolue et de signes contraires.*

On pourrait déduire de ce théorème les résultats indiqués au paragraphe précédent dans le cas de l'influence totale. Si par exemple un conducteur A, chargé positivement, est entouré par un conducteur B (*fig.* 41), toutes les lignes de force parties du conducteur A viennent nécessairement aboutir au conducteur B ; on peut faire correspondre, élément par élément, la surface intérieure

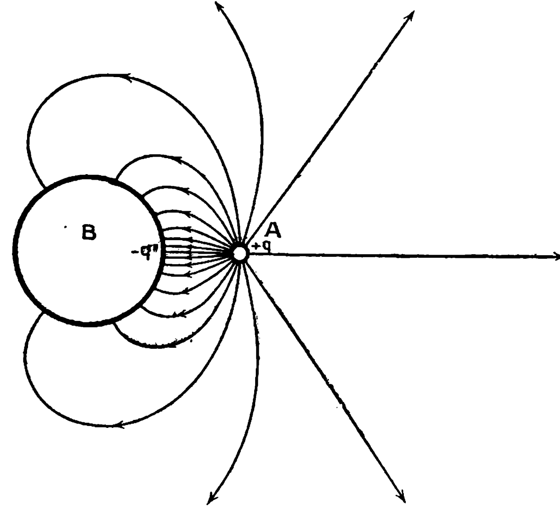


Fig. 43.

de B à la surface extérieure de A, ces deux surfaces portent des charges égales en valeur absolue et de signes contraires.

Si au contraire le conducteur B n'entoure pas complètement le conducteur A, il n'y a qu'une partie des lignes de force issues de A qui rencontrent le conducteur B : les autres s'éloignent indéfiniment sans rencontrer le conducteur B. La partie de la surface de B chargée d'électricité négative ne correspond donc qu'à une partie de la surface de A: *la quantité d'électricité négative développée par influence sur le conducteur* B *est inférieure, en valeur absolue, à la quantité d'électricité positive portée par* A, *que le conducteur* B *soit isolé et primitivement neutre* (*fig.* 42), *ou qu'il soit réuni au sol* (*fig.* 43).

CHAPITRE IV

ÉQUILIBRE DES CONDUCTEURS

I. — *PROBLÈME DE L'ÉQUILIBRE DES CONDUCTEURS*

37. Position du problème. — Le problème de l'équilibre des conducteurs se présente sous deux formes. On peut d'abord se proposer le problème général suivant : *étant donnés un certain nombre de conducteurs en présence, trouver toutes les distributions électriques qui peuvent être en équilibre sur ces différents conducteurs, et les valeurs correspondantes du champ aux différents points de l'espace qui entoure les conducteurs.* On peut aussi se donner des conditions particulières précisant le problème : un conducteur peut être isolé, c'est-à-dire porter une charge donnée à l'avance, ou bien il peut être en communication avec une « source » d'électricité, c'est-à-dire avec un appareil, tel que ceux que nous décrirons plus loin (chap. VIII), qui le maintient à un potentiel donné. Le second aspect du problème est alors le suivant : *étant donnée, pour chaque conducteur du système, la valeur, soit de la charge totale, soit du potentiel, trouver les distributions et les champs.* Comme ce problème correspond à une expérience effectivement réalisable, que le système auquel on impose ces conditions atteint nécessairement un état d'équilibre, il est certain qu'il a une solution ; cette solution du problème particulier est évidemment une des solutions du problème général.

Nous avons vu au chapitre précédent que, de la définition même du conducteur, il résulte que le champ est nul en tous les points situés à l'intérieur d'un conducteur en équilibre. Il suffirait d'écrire cette condition pour en déduire quelles sont les distributions possibles. Pour une distribution donnée, on peut calculer en chaque point le champ et le potentiel : il serait facile d'écrire que la distribution satisfait aux conditions particulières imposées. Mais ce mode de procéder conduit généralement à des calculs pénibles; il est plus simple d'introduire la fonction potentiel V, et de réduire l'un et l'autre problème au calcul de la fonction V en tous les points de l'espace qui entoure les conducteurs. On sait que, lorsqu'on connaît la fonction V, on peut en déduire le champ $\vec{H}$ en un point de l'espace par la relation $\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, et la densité électrique superficielle σ en un point d'un conducteur par le théorème de Coulomb, dont l'expression, en unités électrostatiques, est $\sigma = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial n}$. La connaissance de la fonction V donne donc la solution complète du problème.

Cherchons les conditions mathématiques auxquelles doit satisfaire la fonction V, qui représente le potentiel dans tout l'espace en dehors des conducteurs. Elle doit satisfaire à l'équation de Laplace, $\Delta V = 0$ (§ 21), puisque cet espace ne contient pas de charges électriques libres. Elle doit tendre vers 0 lorsqu'on s'écarte indéfiniment des conducteurs (§ 14) : $V_\infty = 0$. Enfin, sur la surface de chacun des conducteurs, elle doit prendre une valeur constante, $V = C^{te}$ (§ 29). Nous sommes ramenés au problème mathématique suivant : *chercher, dans l'espace limité par les surfaces des conducteurs, les solutions de l'équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre* $\Delta V = 0$ $\left(\text{ou } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\right)$, *satisfaisant aux conditions aux limites* $V = 0$ *à l'infini*, $V = C^{te}$ *sur la surface de chaque conducteur*. La fonction potentiel cherchée est nécessairement une de ces solutions.

Si maintenant nous avons à traiter le second problème, il nous reste à traduire les conditions particulières qui nous sont imposées. Si, sur le conducteur 1 par exemple, la valeur du potentiel nous est donnée, égale à V_1, il suffira d'écrire que la constante ($V = C^{te}$) relative à ce conducteur est précisément V_1. Si sur le conducteur 2 la charge totale nous est donnée, égale à Q_2, il suffira de calculer cette charge, à partir de la fonction potentiel, et l'on aura la condition $\int_{S_2} -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n} \cdot dS = Q_2$. La solution physique du problème sera une des solutions de l'équation aux dérivées partielles correspondant aux conditions aux limites ainsi précisées.

38. Problème général : théorème d'addition. — Supposons que nous ayons trouvé deux solutions V et V′ du problème général. L'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites étant linéaires, il en résulte que *la somme de ces deux solutions*, c'est-à-dire la fonction $V'' = V + V'$, *est aussi une solution de ce problème*. En effet, V et V′ étant solutions, on a, en tous les points de l'espace, $\Delta V = \Delta V' = 0$; à l'infini $V_\infty = V'_\infty = 0$; sur un conducteur $V = V_1$, $V' = V_1'$, V_1 et V_1' étant deux constantes ; les quantités correspondantes pour la fonction V″ sont :

$$\Delta V'' = \Delta V + \Delta V' = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 V''}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial x^2}, \dots\right),$$
$$V''_\infty = V_\infty + V'_\infty = 0, \qquad V'' = V_1 + V'_1 = C^{te} ;$$

la fonction V″ satisfait bien à toutes les conditions imposées.

Si nous calculons les densités superficielles et les charges totales des différents conducteurs correspondant aux trois solutions V, V′ et V″, il résulte du fait que les formules employées sont linéaires, que les valeurs correspondant à la fonction V″ sont les sommes des valeurs correspondant aux deux fonctions V et V′. On a en effet :

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}, \qquad \sigma' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V'}{\partial n}, \qquad \sigma'' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V''}{\partial n},$$

et comme $\frac{\partial V''}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V'}{\partial n}$, on a $\sigma'' = \sigma + \sigma'$. De même les charges totales

d'un des conducteurs sont données par les expressions :

$$Q = \int_S \sigma \, dS, \qquad Q' = \int_S \sigma' \, dS, \qquad Q'' = \int_S \sigma'' \, dS,$$

et on a : $Q'' = Q + Q'$. Enfin, on a le même théorème d'addition pour les champs dérivant des fonctions potentiel considérées (§ 3), à condition d'employer l'addition géométrique : $\vec{H}'' = \vec{H} + \vec{H}'$.

On démontrera de même que, si V est une solution du problème, et λ une constante, la fonction λV est aussi une solution, à laquelle correspondent les valeurs des densités et des charges $\lambda\sigma$ et λQ ; le même théorème s'applique à toute combinaison linéaire, de la forme $\lambda V + \mu V'$.

39. Problème particulier : la solution est unique. — Considérons d'abord le cas où, pour chaque conducteur, nous nous donnons la condition, soit que son potentiel soit nul, soit que sa charge totale soit nulle. Nous allons montrer que la seule solution de l'équation $\Delta V = 0$ qui satisfasse à ces conditions est la solution $V = 0$, nulle en tous les points de l'espace.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la fonction V présenterait certainement quelque part un maximum ou un minimum. Elle ne peut pas être maxima ni minima en un point de l'espace compris entre les conducteurs, puisque ΔV est nul en tous ces points (§ 16) ; elle devrait donc atteindre son maximum — ou son minimum — sur un des conducteurs dont la charge totale est nulle. Il en résulterait, s'il s'agit d'un maximum par exemple, que la fonction potentiel irait en décroissant quand on s'éloigne de ce conducteur à partir d'un point quelconque de sa surface, et par conséquent que le conducteur serait chargé positivement en tous ses points, ce qui est incompatible avec l'hypothèse que sa charge totale est nulle.

La fonction V est donc nulle en tous les points de l'espace.

Considérons maintenant un problème quelconque : nous nous donnons sur certains conducteurs la valeur du potentiel, par exemple sur le conducteur 1 la valeur V_1, et sur les autres la valeur de la charge totale, par exemple sur le conducteur 2 la valeur Q_2. Supposons que nous ayons trouvé deux solutions du problème mathématique, c'est-à-dire deux fonctions V et V', solutions du problème général, satisfaisant aux conditions aux limites particulières. D'après le théorème démontré au paragraphe précédent, la fonction $V'' = V - V'$ est aussi une solution du problème général ; la valeur du potentiel du conducteur 1 correspondant à la fonction V'' est la différence des valeurs correspondant aux fonctions V et V', elle est nulle. La valeur de la charge totale du conducteur 2 correspondant à la fonction V'' est la différence des valeurs correspondant aux deux fonctions V et V', elle est nulle. La fonction V'' correspond à une valeur nulle, soit du potentiel, soit de la charge, sur chaque conducteur ; nous venons de démontrer qu'elle est identiquement nulle : les deux fonctions V et V' sont identiques.

On voit donc qu'il ne peut exister qu'une seule solution de l'équation aux dérivées partielles satisfaisant aux conditions imposées. La fonction potentiel, solution du problème physique, est nécessairement cette solution unique du problème mathématique. De même, toute solution du problème mathéma-

tique général est une solution d'un problème physique particulier, correspondant, par exemple, aux valeurs du potentiel qu'elle fournit sur la surface de chaque conducteur : il y a identité complète entre les deux points de vue, physique et mathématique. On peut résumer cette discussion par les deux théorèmes suivants :

Étant donné un système de conducteurs possédant chacun soit un potentiel, soit une charge totale donnés, il n'existe qu'un état d'équilibre possible : la densité électrique en chaque point de la surface d'un conducteur et le champ en chaque point de l'espace sont déterminés.

Si l'on a construit, par un procédé quelconque, une fonction V *satisfaisant aux conditions* $\Delta V = 0$ *en tous les points de l'espace compris entre les conducteurs,* $V = 0$ *à l'infini, et* $V = C^{te}$ *à la surface de chaque conducteur, cette fonction représente un état d'équilibre possible du système de conducteurs.* Cet état d'équilibre est celui qui correspond aux valeurs particulières que l'on déduit de la fonction V pour le potentiel ou pour la charge des conducteurs.

II. — *ÉCRANS ÉLECTRIQUES*

40. Théorème des écrans électriques. — Considérons un conducteur creux A, comprenant une cavité entièrement entourée par la matière conductrice (*fig.* 44). Supposons que le conducteur A soit porté à un potentiel V_0, qu'il y ait dans la cavité des conducteurs B', C', ... portant des charges q'_1, q'_2, ..., et à l'extérieur des conducteurs B'', C'', ... portant des charges q''_1, q''_2,... Nous allons chercher à déterminer l'état d'équilibre correspondant, c'est-à-dire la fonction potentiel V correspondante. Nous désignerons par V_e et V_i ses valeurs en un point P extérieur au conducteur A, et en un point Q à l'intérieur de la cavité; par $\vec{H}_e$ et $\vec{H}_i$ les champs en ces points; par σ_e et σ_i les valeurs de la densité électrique en un point M situé sur la surface extérieure du conducteur A et en un point N situé sur sa surface intérieure.

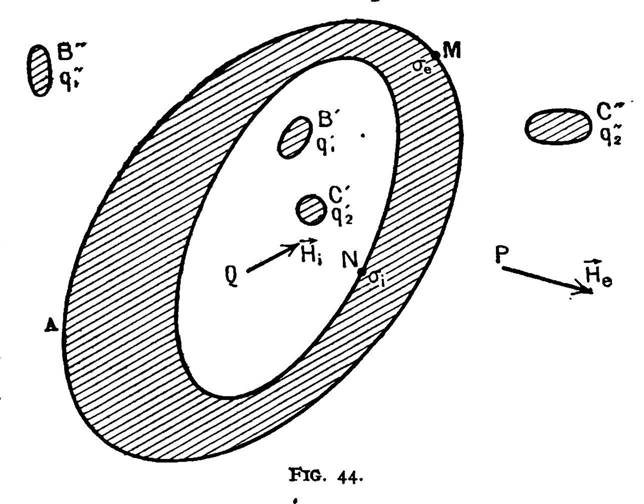


FIG. 44.

Étudions d'abord un état d'équilibre correspondant aux valeurs particulières $V'_0 = 0$ du potentiel de A, $q''_1 = q''_2 ... = 0$ des charges des conducteurs extérieurs. Désignons par des lettres accentuées, V'_e, V'_i, ... σ'_i, les valeurs particulières des différentes quantités considérées. Dans tout l'espace extérieur au conducteur A, il n'y a pas de charges électriques, la fonction V'_e ne peut pré-

senter ni maximum ni minimum : comme elle est nulle à l'infini et sur la surface extérieure du conducteur A, elle est nulle en tous les points de cet espace. Il en est de même du champ ($\vec{H}'_e = - \vec{\text{grad}}\, V'_e$) et de la densité superficielle sur la surface extérieure de A $\left(\sigma'_e = \frac{H'_e}{4\pi}\right)$ ou sur la surface d'un des conducteurs B″ : ces conducteurs ne portant aucune charge n'interviennent pas dans le calcul du potentiel $\left(V = \sum \frac{q}{r}\right)$, ils peuvent être déplacés ou supprimés sans que rien soit modifié à l'état d'équilibre existant. Le potentiel V'_i en un point intérieur, et les quantités qui en dérivent $\vec{H}'_i$ et σ'_i, ne dépendent que de la forme de la surface intérieure du conducteur A, de la forme et de la position des conducteurs situés dans la cavité, et de leurs charges q'_1, q'_2, ... Nous les représenterons par les fonctions V', $\vec{H}'$, σ', en attachant à cette notation accentuée la signification de représenter des fonctions de ces seules quantités, indépendantes en particulier de la forme de la surface extérieure de A et de la position des conducteurs extérieurs B″, C″, ...

Étudions maintenant un second état d'équilibre correspondant aux valeurs particulières $V''_0 = V_0$ du potentiel de A, $q'_1 = q'_2 ... = 0$ des charges intérieures, et désignons par des lettres doublement accentuées, V''_e..., σ''_i, les nouvelles valeurs obtenues pour les diverses quantités. Dans tout l'espace intérieur au conducteur A, la fonction V''_i, ne peut présenter ni maximum, ni minimum, elle a la valeur constante $V''_i = V_0$. Ses dérivées sont nulles : le champ $\vec{H}''_i$ et la densité σ''_i sont nulles ; de même les conducteurs B′ ne portent aucune charge, ils peuvent être déplacés ou supprimés sans rien modifier à l'état d'équilibre. Le potentiel V''_e en un point extérieur, et les quantités $\vec{H}''_e$ et σ''_e qui en dérivent sont donc indépendantes de l'existence et de la position de la surface intérieure du conducteur A et des conducteurs situés dans la cavité ; ils ne dépendent que de la forme de la surface extérieure de A et de son potentiel V_0, de la forme et des positions des conducteurs extérieurs B″, C″, ... et de leurs charges q''_1, q''_2, ... Nous les représenterons par les fonctions V'', $\vec{H}''$, σ'', en attachant à cette notation la signification de représenter des fonctions des seules variables qui viennent d'être précisées.

Nous savons (§ 38) que nous pouvons obtenir un troisième état d'équilibre du système de conducteurs en additionnant les deux états d'équilibre considérés jusqu'ici. Les valeurs des potentiels, des champs, des densités, des charges totales s'obtiennent par addition des valeurs correspondant aux deux premiers états. Nous pouvons alors dresser le tableau suivant, qui donne, pour les trois états d'équilibre considérés, les valeurs de toutes les quantités envisagées : les quantités V_e, ... σ_i relatives au troisième état et inscrites dans la dernière colonne s'obtiennent en faisant la somme des quantités correspondantes inscrites dans les deux premières :

	1er ÉTAT	2e ÉTAT	3e ÉTAT
Potentiel de A	$V'_0 = 0$	$V''_0 = V_0$	V_0
Charge de B′	q'_1	0	q'_1
Charge de B″	0	q''_1	q''_1
Potentiel en P	$V'_e = 0$	$V''_e = V''$	$V_e = V''$
Champ en P	$\vec{H}'_e = 0$	$\vec{H}''_e = \vec{H}''$	$\vec{H}_e = \vec{H}''$
Densité en M	$\sigma'_e = 0$	$\sigma''_e = \sigma''$	$\sigma_e = \sigma''$
Potentiel en Q	$V'_i = V'$	$V''_i = V_0$	$V_i = V_0 + V'$
Champ en Q	$\vec{H}'_i = \vec{H}'$	$\vec{H}''_i = 0$	$\vec{H}_i = \vec{H}'$
Densité en N	$\sigma'_i = \sigma'$	$\sigma''_i = 0$	$\sigma_i = \sigma'$

On voit que les valeurs du potentiel de A et des charges des autres conducteurs, tant extérieurs qu'intérieurs, sont précisément celles fixées au début de ce paragraphe, dans l'énoncé du problème à résoudre : la solution étant unique, les différentes fonctions trouvées représentent cette solution. Des définitions données pour les fonctions V'', $\vec{H}''$, σ'' et V', $\vec{H}'$, σ', il résulte que : *Le potentiel et le champ en un point extérieur, et la distribution sur la surface extérieure d'un conducteur creux, porté à un potentiel donné, sont indépendants de l'existence, de la position et de la charge de la surface intérieure de ce conducteur et des conducteurs placés dans la cavité. Le potentiel et le champ en un point de la cavité et la distribution sur la surface intérieure d'un conducteur creux, porté à un potentiel donné, sont indépendants de l'existence, de la position et de la charge de la surface extérieure de ce conducteur et des conducteurs placés à l'extérieur.*

Ce théorème porte le nom de théorème des **écrans électriques.** Le conducteur A joue le rôle d'un écran : lorsqu'il est maintenu à un potentiel constant, il sépare l'espace en deux régions, qui sont complètement indépendantes l'une de l'autre au point de vue électrique ; on peut apporter de nouvelles charges ou déplacer les charges existantes dans l'une des deux régions sans rien modifier aux phénomènes qui existent dans l'autre région.

Si l'on fait varier le potentiel V_0 du conducteur A, on ne modifie pas les fonctions V', $\vec{H}'$, σ' ; cette variation, qui modifie complètement les phénomènes extérieurs, n'agit pas sur les phénomènes intérieurs. Les champs et les distributions à l'intérieur ne sont pas modifiés, non plus que les différences de potentiel : nous savons que ce sont là les seuls phénomènes observables ; la fonction potentiel elle-même ne correspond à aucune réalité physique ; elle n'est définie qu'à une constante près (§ 3). Nous pouvons dire que *les phénomènes électriques à l'intérieur d'un conducteur creux ne dépendent que de la forme de la surface intérieure de ce conducteur, des formes, des positions et des charges des conducteurs que l'on place dans la cavité.* Si l'on veut définir l'état d'équilibre par les potentiels des conducteurs au lieu de le définir par leurs charges, la démonstration donnée montre qu'il faut remplacer dans cet énoncé les *charges des conducteurs intérieurs* par les *différences de potentiel entre ces conducteurs et le conducteur* A (valeurs de la fonction V' sur leur surface).

Ce théorème, comme les théorèmes des paragraphes 38 et 39 sur l'addition des états d'équilibre et l'existence d'un état d'équilibre unique, s'étend facilement au cas où les systèmes électriques contiennent des charges électriques

autres que celles portées par des conducteurs. En particulier, si une certaine région de l'espace contient des charges électriques réparties avec la densité cubique ρ, il faut, pour cette région, remplacer l'équation de Laplace, $\Delta V = 0$, par l'équation de Poisson, $\Delta V + 4\pi\rho = 0$. La forme linéaire de l'équation est conservée : toutes les démonstrations, qui sont basées sur la forme linéaire des relations, subsistent.

41. Applications. — Nous avons déjà indiqué l'application des propriétés des conducteurs creux à la mesure des charges par influence à l'aide du cylindre de Faraday et de l'électroscope (§ 35). Le théorème des écrans électriques montre, à partir des hypothèses fondamentales, que, dans cette expérience, la distribution et le champ à l'extérieur du cylindre sont indépendants de la position du conducteur chargé à l'intérieur du cylindre de Faraday ; il en est de même des forces qui agissent sur la feuille de l'électroscope, et par conséquent de sa déviation : c'est ce que nous avons déjà vérifié expérimentalement. Nous avons également constaté que, si le cylindre est réuni au sol, c'est-à-dire porté à un potentiel constant, l'introduction d'une charge à l'intérieur ne modifie pas les phénomènes extérieurs, c'est-à-dire ne fait pas dévier la feuille.

Nous pouvons maintenant préciser ce que nous entendons expérimentalement par le potentiel zéro. Théoriquement, c'est le potentiel d'un point à l'infini ; pratiquement, nous disons que nous mettons un conducteur au potentiel zéro lorsque nous le relions à la masse conductrice formée par la Terre, par exemple en le réunissant par un fil métallique à une conduite d'eau ou de gaz. Rien ne prouve que le potentiel de la Terre soit le même que le potentiel d'un point à l'infini : il n'en est même certainement pas ainsi, puisqu'il existe des différences de potentiel entre les différents points de l'atmosphère terrestre. Mais le sol et les parois de la salle dans laquelle nous opérons forment un véritable conducteur creux, un écran électrique ; nos expériences consistent à déplacer dans la cavité de ce conducteur des charges électriques, ou à y créer des différences de potentiel à l'aide de « sources » d'électricité, c'est-à-dire d'appareils qui établissent entre leurs deux pôles une différence de potentiel donnée ; nous mesurons les charges et les forces électriques produites, ou encore les travaux de ces forces entre deux points de la cavité, c'est-à-dire des quantités qui ne dépendent jamais que des différences de potentiel. Dans ces conditions, toutes nos observations sont indépendantes des phénomènes qui se passent à l'extérieur de la salle et du potentiel de ses parois, et il ne peut y avoir aucun inconvénient à attribuer à ce potentiel la valeur arbitraire zéro.

Mais les phénomènes électriques dans la salle dépendent de tous les conducteurs qui s'y trouvent ; en particulier, ils dépendent de la position du corps de l'observateur qui est généralement chargé, soit par contact — plus ou moins parfait — avec une source, soit simplement par influence. Aussi, dans les expériences de précision, les appareils doivent-ils être soustraits à ces perturbations par des écrans électriques appropriés. On réalise leur **protection électrostatique** en les entourant d'une enveloppe métallique complètement fermée ; chaque appareil est placé dans une telle cage ; les fils de connexion eux-mêmes sont des fils métalliques tendus dans l'axe d'un tube métallique. Toutes ces enveloppes sont réunies métalliquement ; leur ensemble constitue le conducteur creux à l'intérieur duquel se déroulent les phénomènes

à étudier, et dont le potentiel est pris comme origine des potentiels. Les sources sont placées à l'extérieur de cette enveloppe, avec laquelle communique toujours l'un de leurs pôles ; l'observateur et les parois de la salle, placés également à l'extérieur, n'exercent aucune influence sur les phénomènes intérieurs, et il est absolument inutile de réunir la cage métallique au sol de la salle. On conserve généralement néanmoins l'expression de *sol* ou de *terre* pour désigner l'ensemble de l'écran électrique formé par les cages métalliques, et nous continuerons à employer cette expression dans ce sens.

Nous pouvons remarquer que l'électroscope rentre dans la catégorie d'appareils que nous venons de définir : il est formé d'un conducteur mobile, placé à l'intérieur d'une cage conductrice, et communiquant électriquement avec l'extérieur par une tige qui passe à travers une petite ouverture ménagée dans la cage. L'état d'équilibre électrique, les forces qui s'exercent sur la feuille, et sa déviation ne dépendent que de la différence de potentiel établie entre la feuille et la cage ; la déviation croît avec cette différence de potentiel, et sa mesure permet de la repérer. L'électroscope est un instrument qui mesure des potentiels ; si on le met en communication avec un conducteur par un fil métallique, sa déviation dépend uniquement du potentiel du conducteur; si par exemple le conducteur est le cylindre influencé de la figure 34 (§ 33), la déviation sera la même, que le fil métallique aboutisse à la région D chargée positivement, à la région C chargée négativement, ou à la ligne neutre qui les sépare.

Dans tout appareil, la cage, théoriquement fermée, présente toujours des solutions de continuité, ne serait-ce que pour laisser passer les fils isolés qui

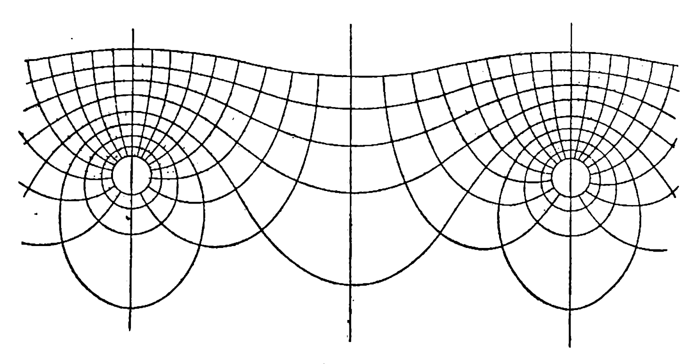


FIG. 45.

établissent les connexions avec les sources, ou pour permettre d'observer les déplacements des conducteurs mobiles. Nous avons déjà fait quelques expériences avec des conducteurs creux incomplètement fermés (cage de Faraday, § 31, cylindre de Faraday, § 35), et nous avons observé chaque fois que l'existence des ouvertures ne modifiait pas les phénomènes, à condition que l'on se place à une distance de la paroi assez grande par rapport aux dimensions des ouvertures. Ces dimensions devront naturellement être d'autant plus petites que les mesures devront être plus précises. On se rendra compte expérimentalement du rôle de la largeur des ouvertures en recouvrant un électroscope ordinaire successivement avec deux cages de mêmes dimensions,

formées de toiles métalliques dont l'écartement des mailles est, par exemple, 1 millimètre pour l'une et 1 centimètre pour l'autre; ces cages sont reliées métalliquement à la cage de l'électroscope, et disposées de façon que la boule de l'électroscope soit à 1 centimètre de la toile métallique. On approche de cette boule, à l'extérieur de la cage, le bâton d'ébonite électrisé ; tandis qu'avec la toile fine on n'observe aucune déviation de la feuille, avec la toile à larges mailles on observe une déviation appréciable, quoique moins grande que si la cage était supprimée.

On peut également se rendre compte de l'effet du grillage par l'examen de la figure 45, qui représente, d'après Maxwell, le champ au voisinage d'un grillage formé de fils cylindriques parallèles. Les lignes de force du champ établi au-dessus du grillage viennent se terminer sur les fils, après avoir pénétré de quantités relativement faibles dans leur intervalle : en un point situé suffisamment au-dessous du grillage n'arrivent plus de ces lignes de force, ce point est protégé contre le champ. De même les surfaces équipotentielles du champ supérieur deviennent très rapidement presque planes : en un point situé suffisamment au-dessus du grillage, le champ est le même que si la région où il est établi était limitée par un plan conducteur.

III. — *ÉTUDE DE QUELQUES SYSTÈMES PARTICULIERS*

42. Généralités. — Nous avons démontré au paragraphe 39 que si, étant donné un système de conducteurs, on construit, par un procédé quelconque, une fonction V satisfaisant aux conditions $\Delta V = 0$ en tous les points de l'espace compris entre les conducteurs, $V = 0$ à l'infini, et $V = C^{te}$ sur la surface de chaque conducteur, cette fonction représente un état d'équilibre possible du système de conducteurs. Or il est facile de construire une fonction V satisfaisant aux deux premières conditions : il suffit de considérer des charges électriques q, q'... placées en des points A, B... (*fig.* 46) et de calculer le potentiel, $V = \sum \frac{q}{r}$, qu'elles produisent en un point M. La fonction V, définie en tous les points autres que les points A, B ... où se trouvent les charges électriques, y satisfait à la condition $\Delta V = 0$, et elle satisfait aussi à la condition $V_\infty = 0$. Il suffira de choisir la forme et la position de la surface des conducteurs de façon qu'elle satisfasse aux conditions $V = C^{te}$ pour avoir résolu le problème de l'équilibre électrique de ces conducteurs.

Supposons par exemple que la fonction $V = \sum \frac{q}{r}$ présente une surface équipotentielle Σ fermée, correspondant à une valeur V_0 du potentiel, entourant toutes les charges A, B... (*fig.* 46), et considérons le problème de l'équilibre électrique d'un conducteur C limité par la surface Σ. La fonction V satisfait en tous les points extérieurs au conducteur à l'équation $\Delta V = 0$; elle satisfait à l'infini à la condition $V = 0$, et sur la surface Σ du conducteur C à la condition $V = V_0$: elle représente donc l'équilibre du conducteur C isolé dans l'espace et porté au potentiel V_0. En particulier, on pourra calculer la charge en chaque point du conducteur par le théorème de Coulomb, $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$.

L'application du théorème de Gauss, dans les deux équilibres considérés, à une surface fermée entourant la surface Σ, montre que la charge totale du conducteur C est égale à la somme des charges $q + q' \ldots$

Supposons maintenant que la fonction V présente une surface équipotentielle fermée Σ, correspondant à une valeur V_0 du potentiel, et entourant seulement une partie des charges électriques (*fig.* 47), les charges $q' \ldots$ étant placées en des points B extérieurs à cette surface. La fonction V représente maintenant l'équilibre du conducteur C, limité par la surface Σ, porté au potentiel V_0 en présence des charges $q' \ldots$ placées aux points B... La démonstration est un peu plus compliquée, parce que les points B... sont des points singuliers où la fonction V n'est pas définie ; mais on peut toujours supposer que les points matériels B... qui portent les charges $q' \ldots$ sont en réalité des conducteurs, de dimensions extrêmement petites. La fonction V est alors définie par l'équilibre de ces conducteurs et des masses intérieures à Σ telles que A ; elle satisfait à toutes les conditions qui définissent l'équilibre du conducteur C porté au potentiel V_0 et des conducteurs B... portant les charges $q' \ldots$, et représente par suite cet équilibre ; d'ailleurs, comme les dimensions des conducteurs B... sont aussi petites que l'on veut, elles peuvent être négligées dans le calcul de la fonction $V = \sum \frac{q}{r}$, aux différents points de l'espace autres que les points B, et en particulier aux points de la surface Σ.

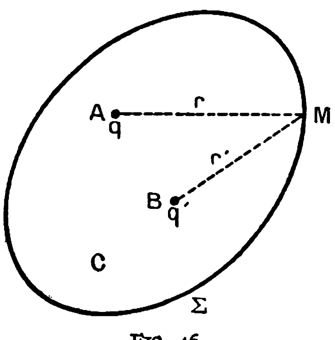


FIG. 46.

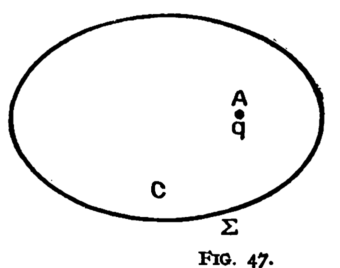


FIG. 47.

On se rendra mieux compte de l'emploi de ces méthodes par l'étude qui suit de deux cas particuliers.

43. Distribution sur un ellipsoïde de révolution allongé. — Pouvoir des pointes. — Considérons des charges électriques réparties suivant un segment de droite F_1F_2, de longueur $2c$ (*fig.* 48), de telle sorte qu'un élément PP' de longueur dx porte une charge $\lambda\, dx$. Cette charge crée, en un point M, un champ $\overrightarrow{dH}$, dirigé suivant PM, et dont la grandeur, en unités électrostatiques, est $dH = \frac{\lambda\, dx}{r^2}$; si nous désignons par h la distance MQ du point M à la droite F_1F_2, par x la distance QP, et par α l'angle $\widehat{QMP}$, on a :

$$r = \frac{h}{\cos\alpha}, \qquad x = h \operatorname{tang}\alpha, \qquad dx = \frac{h}{\cos^2\alpha}\, d\alpha \qquad \text{et} \qquad dH = \frac{\lambda}{h}\, dz,$$

Considérons l'élément $P_1P'_1$, limité sur la droite F_1F_2 par deux droites MP_1, MP'_1, symétriques de MP et MP' par rapport à la bissectrice MN de l'angle $\widehat{F_1MF_2}$: il crée un champ $d\vec{H}_1$, de même grandeur que $d\vec{H}$, et symétrique de $d\vec{H}$ par rapport à MN : le champ résultant des deux éléments, $d\vec{H} + d\vec{H}_1$, est donc dirigé suivant MN. Comme tous les éléments de la droite F_1F_2 peuvent être ainsi groupés deux à deux, le champ $\vec{H}$ que crée l'ensemble de cette droite est dirigé suivant la bissectrice MN de l'angle $\widehat{F_1MF_2}$, et la surface

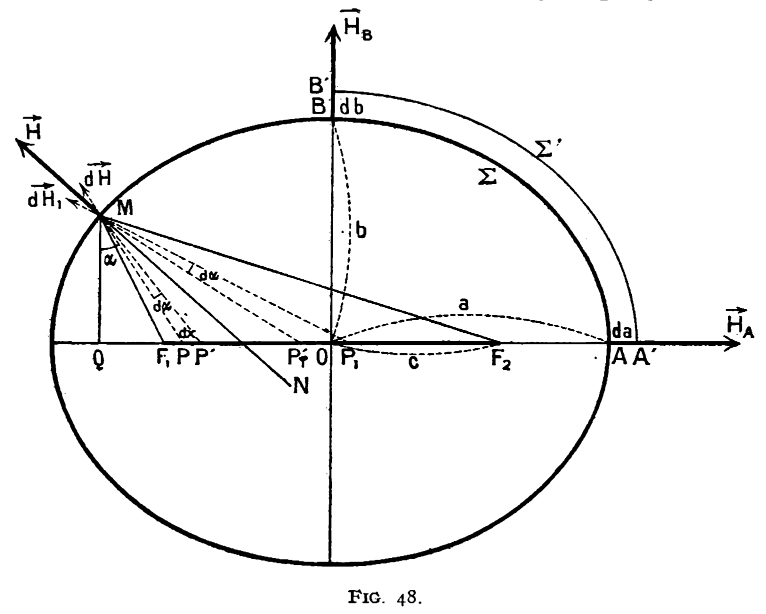


Fig. 48.

équipotentielle passant par le point M y est normale à cette bissectrice. C'est la définition géométrique d'un ellipsoïde de révolution, ayant les points F_1 et F_2 pour foyers. Les surfaces équipotentielles du champ considéré sont des ellipsoïdes homofocaux, dont les demi-axes a et b sont liés par la relation $a^2 - b^2 = c^2$. Le potentiel sur l'une de ces surfaces Σ se calcule facilement en calculant le potentiel au point A :

$$V = \int_{a-c}^{a+c} \frac{\lambda\, dr}{r} = \lambda \log \frac{a+c}{a-c}.$$

Considérons maintenant, à la place de la droite F_1F_2, un conducteur C limité par la surface Σ et porté au potentiel $V = \lambda \log \frac{a+c}{a-c}$. Les ellipsoïdes extérieurs à Σ représentent les surfaces équipotentielles du champ ainsi créé ; ce champ est donc complètement connu. La charge Q portée par l'ellipsoïde Σ

est la charge primitivement portée par la droite F_1F_2 ; on a $Q = 2\lambda c$. Le rapport de cette charge Q au potentiel V est indépendant de λ et ne dépend que des dimensions de l'ellipsoïde ; c'est ce rapport que nous appellerons la *capacité* C de l'ellipsoïde (voir chap. V) ; on a :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2c}{\log \frac{a+c}{a-c}}.$$

On peut l'exprimer en fonction du demi-grand axe a et de l'excentricité $e = \frac{c}{a}$, et, pour avoir une formule applicable quand l'ellipsoïde se rapproche d'une sphère ($c = 0$), développer en série $\log(1 + e)$ et $\log(1 - e)$. On obtient :

$$C = \frac{2ae}{\log \frac{1+e}{1-e}} = \frac{a}{1 + \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{5}}$$

Si nous supposons tracée la surface équipotentielle voisine Σ' correspondant à une valeur $V + dV$ du potentiel, nous savons (§ 4) que le champ en un point de la surface Σ est inversement proportionnel à la distance en ce point des deux surfaces Σ et Σ'. Le rapport des champs H_A et H_B au sommet de l'ellipsoïde et sur l'équateur est égal au rapport inverse des distances correspondantes $AA' = da$ et $BB' = db$; ces distances sont liées par la relation qui résulte du fait que les ellipsoïdes sont homofocaux; on a : $a^2 - b^2 = c^2$, d'où $a\,da - b\,db = 0$, et on en déduit :

$$\frac{H_A}{H_B} = \frac{db}{da} = \frac{a}{b}.$$

Les densités σ_A et σ_B aux points A et B sont proportionnelles aux champs en ces points, d'après le théorème de Coulomb : *Les densités électriques et les champs aux sommets de l'ellipsoïde sont proportionnels aux longueurs des axes.*

La propriété des densités peut se vérifier expérimentalement par la méthode du plan d'épreuve. De la propriété des champs résulte que, si l'ellipsoïde devient très allongé, s'il se termine en A par une véritable pointe, le champ au voisinage de A devient très grand. On démontrera aisément, à partir des formules données, que si, le potentiel de l'ellipsoïde restant constant, ainsi que son petit axe $2b$, son grand axe $2a$ augmente indéfiniment, le champ H_A augmente indéfiniment. Or nous verrons plus tard (chap. XXXIV) que l'air soumis à un champ électrique intense devient conducteur ; l'air devient donc conducteur au voisinage d'une pointe : un conducteur terminé par une pointe se décharge, son potentiel s'égalise avec celui des corps environnants.

Ce **pouvoir des pointes** est un phénomène bien connu ; c'est sur cette propriété que sont basés les paratonnerres. L'écoulement de l'électricité par les pointes est facile à mettre en évidence, grâce aux phénomènes lumineux qui l'accompagnent. On aperçoit une aigrette partant de la pointe si elle est chargée positivement, une petite étoile sur la pointe si elle est chargée négative-

ment ; remarquons que c'est le premier phénomène que nous rencontrons dans lequel les deux électricités produisent des effets différents, qui ne se réduisent pas à un simple changement de signe.

44. Sphère influencée par une charge ponctuelle. — Prenons deux charges électriques de signes contraires, $+q$ et $-q'$, placées en deux points A et B (*fig.* 49). La fonction potentiel du champ ainsi créé est, en désignant par r et r' les distances d'un point M de l'espace aux points A et B :

$$V = \frac{q}{r} - \frac{q'}{r'}.$$

La surface équipotentielle $V = 0$ est le lieu des points dont le rapport des distances aux deux points fixes A et B est $\frac{q}{q'}$. C'est une sphère Σ, de rayon R, dont le centre O est situé sur la droite AB ; les distances $OA = d$, $OB = d'$ sont :

$$d = R\frac{q}{q'}, \qquad d' = R\frac{q'}{q}.$$

Si par exemple la charge q' est plus petite en valeur absolue que la charge q, le point A est à l'extérieur de la sphère Σ, et le point B est à l'intérieur.

Considérons maintenant un conducteur C, maintenu au potentiel zéro, dont

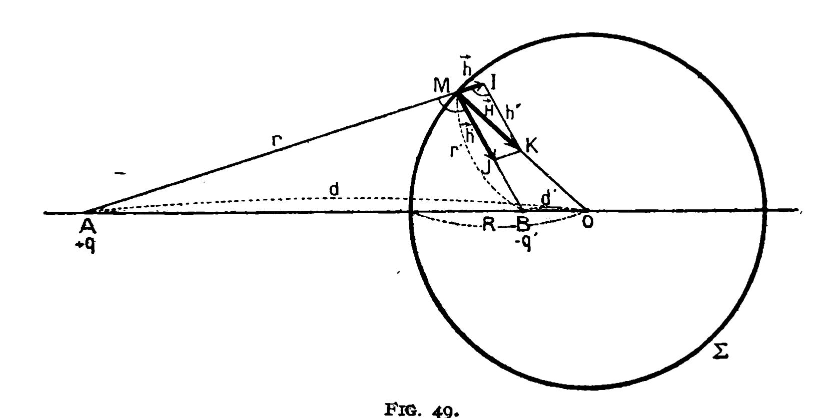


FIG. 49.

la surface est constituée par la sphère Σ, et plaçons au point A une charge q : la fonction V à l'extérieur de la sphère Σ représente l'équilibre du conducteur en présence de la charge q. On voit que *le potentiel et le champ en tous les points de l'espace extérieur à une sphère conductrice Σ, de centre O et de rayon R, maintenue au potentiel zéro et soumise à l'influence d'une charge q, placée en un point A à une distance $OA = d$ du centre de la sphère, sont les mêmes que ceux résultant de l'action de la charge q placée au point A et d'une charge $-q'$, égale à $-q\frac{R}{d}$, placée en un point B du segment de droite OA, à une distance d' du point O*

égale à $\frac{R^2}{d}$. La charge q' placée en B est dite l'**image électrique** par rapport à la sphère Σ de la charge q placée en A.

Calculons le champ $\vec{H}$ créé par les charges q et $-q'$ en un point M de la sphère Σ, situé à une distance r de A et r' de B $\left(\frac{r}{r'} = \frac{q}{q'}\right)$: c'est la résultante des champs $\vec{h}$ et $\vec{h'}$ créés par les deux charges. Ces deux champs sont dirigés respectivement suivant les droites AM et MB, et leur résultante $\vec{H}$, normale à la surface équipotentielle Σ, est dirigée suivant le rayon MO de cette sphère.

Leurs grandeurs sont $h = \frac{q}{r^2}$ et $h' = \frac{q'}{r'^2}$, et leur rapport est $\frac{h}{h'} = \frac{q}{q'} \cdot \frac{r'^2}{r^2} = \frac{r'}{r}$. Le triangle MIK de composition des champs est semblable au triangle BMA, comme ayant un angle égal $(\widehat{I} = \widehat{M})$, compris entre côtés proportionnels. On a :

$$\frac{H}{h} = \frac{d-d'}{r'}, \qquad H = \frac{q}{r^2 r'}\left(d - \frac{R^2}{d}\right) = \frac{q}{r^3} \cdot \frac{q}{q'} \cdot \frac{d^2 - R^2}{d} = q \cdot \frac{d^2 - R^2}{R} \cdot \frac{1}{r^3}.$$

On voit que le champ, aux différents points M de la sphère Σ, varie en raison inverse du cube de la distance AM. Dans le problème de la sphère influencée par la charge q, le champ H ainsi calculé représente le champ en un point infiniment voisin de la surface conductrice ; la densité électrique en M se déduit du champ par le théorème de Coulomb :

$$\sigma = -\frac{H}{4\pi} = -\frac{q\,(d^2 - R^2)}{4\pi R} \cdot \frac{1}{r^3}.$$

La charge totale portée par la sphère conductrice pourrait se calculer en intégrant cette expression par une intégrale étendue à la surface de la sphère Σ Il est plus simple de remarquer que, si l'on applique le théorème de Gauss à une surface fermée qui entoure la sphère Σ, on obtient la même valeur de la charge totale intérieure à cette surface dans les deux systèmes (charges q et $-q'$, charge q et sphère conductrice Σ au potentiel 0), pour lesquels le champ est le même en tous les points extérieurs à Σ. La charge totale répartie sur la sphère influencée est donc égale à $-q'$, c'est-à-dire à $-q\,\frac{R}{d}$. Remarquons en passant que cette charge est toujours inférieure à q (cf. § 36).

La force F avec laquelle la charge q attire la sphère pourrait se calculer comme la résultante des forces $\vec{h}\sigma dS$ exercées par la charge q sur les masses réparties sur la sphère, ou encore comme la résultante des forces $2\pi\sigma^2\vec{dS}$ de pression électrostatique. Nous pouvons aussi remarquer que cette force est égale et opposée à celle que la sphère exerce sur le point A, et comme le champ créé en un point extérieur par les charges réparties sur la sphère est le même que celui créé par la charge $-q'$, la force F est simplement la force avec laquelle s'attirent les deux charges $+q$ et $-q'$:

$$F = \frac{qq'}{(d-d')^2} = q \cdot q\,\frac{R}{d} \cdot \frac{1}{\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} = q^2\,\frac{Rd}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Nous venons d'étudier l'équilibre électrique d'un point A portant une charge q et d'une sphère Σ conductrice au potentiel o, ou, si l'on veut, d'un point A portant une charge $+q$ et d'une sphère Σ portant une charge $-q' = -q\frac{R}{d}$. Nous savons également quel est l'état d'équilibre électrique, en face d'un point A portant une charge o, d'une sphère Σ portant une charge $+q'$, c'est-à-dire d'une sphère conductrice chargée isolée dans l'espace : la répartition de l'électricité sur cette sphère est uniforme, sa densité est $\sigma' = \frac{q'}{4\pi R^2} = +\frac{q}{4\pi R d}$; le champ en un point extérieur est le même que si la masse q' était placée en O; le potentiel de la sphère est $V_\Sigma = \frac{q'}{R} = \frac{q}{d}$.

Superposons ces deux états d'équilibre : leur addition donne un nouvel état d'équilibre, dans lequel la charge du point A est q, et la charge de la sphère Σ est o. Nous avons donc résolu un nouveau problème, celui de *l'influence d'une charge q placée en* A *sur une sphère isolée et primitivement neutre.* Dans l'état d'équilibre ainsi obtenu, le champ en un point de l'espace extérieur à la sphère s'obtient par la composition des champs de trois charges ponctuelles, une charge q placée en A, une charge $-q'$ placée en B, et une charge $+q'$ placée en O. Le potentiel de la sphère est $V_\Sigma = \frac{q}{d}$. Ce dernier résultat était d'ailleurs facile à obtenir directement ; le potentiel est le même en tous les points situés à l'intérieur du conducteur, et, lorsqu'on calcule sa valeur en O par la formule $V = \sum \frac{q}{r}$, les termes relatifs aux charges réparties sur la sphère peuvent se mettre sous la forme $\frac{\Sigma q}{R}$, et donnent une somme nulle.

La densité σ_1 en un point M de la sphère Σ est la somme des densités σ et σ' :

$$\sigma_1 = \sigma + \sigma' = -\frac{q(d^2 - R^2)}{4\pi R} \cdot \frac{1}{r^3} + \frac{q}{4\pi R d} = \frac{q}{4\pi R}\left(\frac{1}{d} - \frac{d^2 - R^2}{r^3}\right).$$

On calcule facilement la position de la ligne neutre, en égalant cette valeur à o; on trouve :

$$r^3 = d(d^2 - R^2).$$

Cette valeur de r est comprise entre d et $\sqrt{d^2 - R^2}$; elle définit sur la sphère un petit cercle perpendiculaire à AO, et compris entre le grand cercle perpendiculaire à AO $\left(r = \sqrt{d^2 + R^2}\right)$ et le petit cercle de contact du cône tangent de sommet A $\left(r = \sqrt{d^2 - R^2}\right)$, dont le plan passe par B.

La force F_1 qui s'exerce entre la charge q placée en A et la sphère isolée Σ est égale à la somme des forces exercées sur la charge $+q$ placée en A par les charges $-q'$ et $+q'$ placées en B et O. Elle est attractive, mais est plus faible que la force F créée par la charge $-q'$ seule : nous retrouvons ici un résultat déjà signalé et vérifié expérimentalement au paragraphe 34. La valeur de la force F_1 est :

$$F_1 = \frac{qq'}{(d - d')^2} - \frac{qq'}{d^2} = q^2\frac{R}{d}\left[\frac{1}{\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} - \frac{1}{d^2}\right] = q^2 \cdot \frac{R^3}{d^3} \cdot \frac{2d^2 - R^2}{(d^2 - R^2)^2}.$$

On pourrait traiter d'autres cas, par exemple superposer à cet état d'équilibre un autre état d'équilibre comportant une charge Q quelconque de la sphère, et étudier ainsi l'influence de la charge q sur une sphère portant une charge totale Q. On peut également développer des calculs analogues, mais beaucoup plus compliqués, dans le cas où il y a plusieurs charges influençantes, ou pour l'étude de la distribution sur deux sphères en présence. Les résultats généraux étaient d'ailleurs connus avant le développement de la théorie par de nombreuses expériences dans lesquelles on avait déterminé les densités électriques par la méthode du plan d'épreuve, et étudié le partage de l'électricité entre deux sphères en contact, ou mesuré les forces d'attraction entre deux sphères, dans l'espoir d'améliorer les vérifications expérimentales de la loi de Coulomb. Toutes ces expériences ont donné des résultats d'accord avec la théorie ; nous ne les décrirons pas, parce que leur précision n'est pas en général suffisante pour qu'elles puissent en constituer des vérifications sérieuses.

CHAPITRE V

CAPACITÉ. — CONDENSATEURS

I. — *CAPACITÉ ET COEFFICIENTS D'INFLUENCE*

45. Définition de la capacité d'un conducteur. — Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'équilibre électrique des conducteurs, en posant le problème d'une façon aussi complète que possible, c'est-à-dire en cherchant à déterminer le champ en tous les points de l'espace et la densité en tous les points des conducteurs. Les exemples que nous avons traités montrent que les calculs se compliquent très rapidement, si l'on ne s'en tient pas à des conducteurs très peu nombreux et de formes particulièrement simples. Aussi, pour poursuivre notre étude, nous nous bornerons à considérer les potentiels et les charges totales des conducteurs.

Considérons d'abord le cas d'un conducteur unique isolé dans l'espace, et supposons que nous connaissions un état particulier d'équilibre caractérisé par la valeur V_0 de son potentiel et Q_0 de sa charge. Portons-le maintenant à un potentiel V, et désignons par λ le rapport $\frac{V}{V_0}$. D'après le théorème d'addition démontré au paragraphe 38, l'état caractérisé par les valeurs λV_0, λQ_0 est un état d'équilibre ; comme l'état d'équilibre correspondant à la valeur donnée $V = \lambda V_0$ du potentiel est unique (§ 39), la charge totale du conducteur est $Q = \lambda Q_0$. *La charge prise par un conducteur isolé dans l'espace est proportionnelle à son potentiel.*

Le rapport constant de la charge au potentiel s'appelle la capacité du conducteur. Cette quantité C est définie, dans tous les systèmes d'unités, par la relation :

$$Q = CV.$$

Sa valeur ne dépend que du choix des unités et de la forme du conducteur, c'est-à-dire des paramètres géométriques qui définissent sa surface.

Si nous considérons un conducteur sphérique de rayon R, portant la charge Q, le potentiel, qui est le même en tous les points de ce conducteur, se calcule facilement par la formule $V = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum \frac{q}{r}$, appliquée au centre de la sphère : toutes les charges réparties sur la surface en sont à la même distance R, et la valeur du potentiel est $V = \frac{Q}{\varepsilon_0 R}$: en unités électrostatiques ($\varepsilon_0 = 1$), *la capacité de la sphère s'exprime par le même nombre que son rayon.*

On a déjà vu au paragraphe 43 un exemple du calcul de la capacité d'un conducteur, dans le cas de l'ellipsoïde de révolution.

46. Unités de capacité. — Le choix de l'unité de capacité résulte de la définition même donnée pour la capacité, à l'aide de la relation $Q = CV$: *l'unité de capacité est la capacité d'un conducteur dont la charge totale est égale à l'unité de quantité d'électricité lorsque son potentiel est égal à l'unité de potentiel.* Si ces deux dernières unités sont les unités électrostatiques C. G. S. de quantité d'électricité et de potentiel (§ 22), l'unité ainsi définie est l'unité électrostatique C. G. S. de capacité.

Dans un système d'unités quelconque, le potentiel de la sphère portant la charge Q est $V = \frac{Q}{\varepsilon_0 R}$ et sa capacité est $\varepsilon_0 R$: ce n'est que dans les systèmes électrostatiques, définis par la condition $\varepsilon_0 = 1$, que la capacité d'une sphère s'exprime par le même nombre que son rayon. On dit quelquefois que la capacité de la sphère est égale à son rayon : c'est là une formule abrégée, à laquelle il ne faut pas attacher d'autre sens que le sens numérique qui vient d'être précisé. Une capacité et une longueur sont deux grandeurs de natures différentes, elles ne sauraient être comparées. Si l'on peut égaler les nombres qui les mesurent, cela tient au choix particulier des conventions qui ont été faites pour définir les unités électrostatiques comme dérivées des unités mécaniques. Cette égalité subsistera si l'on change les grandeurs des unités fondamentales en conservant les conventions de définition des unités électriques ; mais elle disparaîtra si l'on change ces conventions et nous aurons l'occasion d'étudier en détail un autre système d'unités électriques, reposant sur des conventions différentes, dans lequel la capacité n'est plus homogène à une longueur.

Dans le système pratique (§ 23), l'unité de capacité est la capacité d'un conducteur dont la charge totale est égale à un coulomb, quand son potentiel est égal à un volt. Cette unité s'appelle le **farad**. Calculons la valeur de cette capacité en unités électrostatiques : le conducteur envisagé porte une charge de 3.10^9 unités électrostatiques quand son potentiel est de 1/300 d'unité électrostatique. Sa capacité est donc : $C = \frac{Q}{V} = 9.10^{11}$ unités électrostatiques : le farad vaut 9.10^{11} unités électrostatiques.

Cette capacité est hors de proportions avec celles qu'on sait réaliser. On emploie donc les sous-multiples de l'unité pratique. Les plus couramment employés sont le *microfarad*, qui vaut un millionième de farad, c'est-à-dire 9.10^5 unités électrostatiques, et le *millième de microfarad*, qui vaut 900 unités électrostatiques. Nous verrons tout à l'heure comment on peut réaliser des capacités de l'ordre du microfarad ; remarquons que le millième de microfarad, qui est la capacité d'une sphère de 9 mètres de rayon, et l'unité électrostatique, qui est la capacité d'une sphère de 1 centimètre de rayon sont certainement d'un ordre de grandeur réalisable.

47. Définition des capacités et des coefficients d'influence dans un système de conducteurs. — Considérons un système de n conducteurs, portés aux potentiels $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Nous nous proposons de déterminer les charges totales $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de ces conducteurs.

Portons d'abord le conducteur 1 au potentiel 1, tous les autres étant maintenus au sol : les conducteurs prennent des charges qui ne dépendent que de la forme et des positions des conducteurs ; désignons-les par C_{11}, C_{21}, ... C_{n1}. Multiplions par V_1 l'état d'équilibre ainsi obtenu : nous obtenons un nouvel état d'équilibre, dans lequel les potentiels des conducteurs et leurs charges sont :

$$V_1, 0, 0, \ldots, 0; \qquad C_{11}V_1, C_{21}V_1, C_{31}V_1, \ldots, C_{n1}V_1.$$

De même, si nous portons le conducteur 2 au potentiel V_2, en maintenant tous les autres au potentiel 0, nous obtenons un nouvel état d'équilibre dans lequel les potentiels et les charges sont :

$$0, V_2, 0, \ldots, 0; \qquad C_{12}V_2, C_{22}V_2, C_{32}V_2, \ldots, C_{n2}V_2.$$

Considérons ainsi autant d'états d'équilibre qu'il y a de conducteurs, le dernier étant :

$$0, 0, 0 \ldots, V_n; \qquad C_{1n}V_n, C_{2n}V_n, C_{3n}V_n, \ldots, C_{nn}V_n.$$

Superposons tous ces états d'équilibre : nous obtenons, par addition, un état d'équilibre dans lequel les potentiels des conducteurs sont :

$$V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n.$$

C'est l'état d'équilibre cherché ; les charges des conducteurs y sont :

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \ldots + C_{1n}V_n. \\ Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \ldots + C_{2n}V_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n &= C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 \ldots + C_{nn}V_n. \end{aligned}$$

Les charges des conducteurs sont des fonctions linéaires de leurs potentiels. Un coefficient tel que C_{11} s'appelle la **capacité** du conducteur 1. Un coefficient tel que C_{21} s'appelle le **coefficient d'influence** du conducteur 1 sur le conducteur 2. Nous pouvons, en considérant l'état d'équilibre dans lequel les potentiels et les charges des conducteurs sont :

$$V_1, 0, \ldots, 0; \qquad C_{11}V_1, C_{21}V_1, \ldots, C_{n1}V_1;$$

donner les définitions suivantes de ces coefficients :

Étant donné un système de conducteurs qui sont tous maintenus au potentiel zéro, sauf l'un d'entre eux, la charge de ce dernier conducteur est proportionnelle à son potentiel. Le rapport constant de sa charge à son potentiel s'appelle la capacité de ce conducteur en présence de tous les autres.

La charge d'un second conducteur est proportionnelle au potentiel du premier ; le rapport constant de la charge du second conducteur au potentiel du premier s'appelle le coefficient d'influence du premier conducteur sur le second en présence de tous les autres.

Les capacités et les coefficients d'influence, étant définis par des relations analogues à celle qui définit la capacité d'un conducteur isolé dans l'espace, se mesurent avec les mêmes unités. Il faut bien remarquer que les définitions

données n'ont de sens que si tous les conducteurs, sauf un, sont maintenus au potentiel o, et que les valeurs des coefficients dépendent de l'existence et de la position de tous les conducteurs. En particulier, la capacité d'un conducteur en présence d'autres conducteurs est différente de la capacité du même conducteur seul dans l'espace.

Si le problème de la distribution, tel qu'il a été défini au chapitre précédent, peut être résolu complètement, les capacités et les coefficients d'influence peuvent être calculés à partir des données géométriques qui définissent le système.

48. Relations entre les capacités et les coefficients d'influence. — Reprenons le premier état d'équilibre que nous avions considéré, dans lequel les potentiels et les charges sont :

$$+ 1, 0, 0, \dots, 0 \quad \text{et} \quad C_{11}, C_{21}, \dots, C_{n1},$$

et représentons le champ dans l'espace qui entoure les conducteurs (*fig.* 50). Les lignes de force partent toutes du conducteur 1, qui est le seul dont le potentiel soit supérieur à o ; elles aboutissent aux autres conducteurs, ou bien elles s'éloignent indéfiniment. Le conducteur 1 est donc entièrement chargé d'électricité positive et les autres conducteurs sont entièrement chargés d'électricité négative : *les capacités sont nécessairement positives, les coefficients d'influence nécessairement négatifs.* D'après le théorème des éléments correspondants (§ 36), la quantité d'électricité positive répartie sur la portion de la surface du conducteur 1 d'où partent des lignes de force aboutissant aux autres conducteurs est égale en valeur absolue à la somme des quantités d'électricité négatives portées par ces autres conducteurs. *La capacité du conducteur* 1 *est égale ou supérieure à la somme des valeurs absolues des coefficients d'influence du conducteur* 1 *sur les autres conducteurs ;*

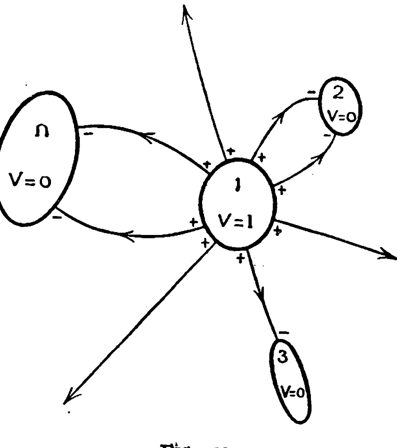


FIG. 50.

$$C_{11} \geq -(C_{21} + C_{31} \dots + C_{n1}).$$

L'égalité correspond au cas où aucune des lignes de force partant du conducteur 1 ne s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire au cas où l'un des autres conducteurs entoure complètement le conducteur 1.

Nous allons maintenant montrer que les coefficients tels que C_{12} et C_{21} sont égaux. Nous nous appuierons pour cela sur un théorème dont l'expression est connue sous le nom d'*identité de Gauss :* considérons un système de charges électriques q_1, q_2, ..., placées en des points A_1, A_2, ..., et produisant en des points B_1, B_2, ..., des potentiels V_1, V_2, ... ; puis un système de charges q'_1,

q'_2, ... placées aux points B_1, B_2, ..., et produisant aux points A_1, A_2, ..., des potentiels V'_1, V'_2, ... On a :

$$q_1V'_1 + q_2V'_2 + ... = q'_1V_1 + q'_2V_2 + ...$$

En effet, les potentiels V_1 sont la somme de termes $\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q_1}{A_1B_1} + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q_2}{A_2B_1} + ...$, les potentiels V_1' de termes $\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q_1'}{A_1B_1} + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q_2'}{A_1B_2} + ...$; en les remplaçant par ces expressions, on obtient dans les deux membres des sommes de la forme $\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q_1q_1'}{A_1B_1} + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q_1q_2'}{A_1B_2} + ...$ où figurent exactement les mêmes termes.

Ce théorème s'étend facilement à des distributions continues, par exemple à la distribution à la surface de conducteurs, en remplaçant les sommes par des intégrales ; on peut alors supposer sans inconvénient que les points A coïncident avec les points B, puisque la fonction potentiel conserve une valeur finie en un point de la surface d'un conducteur électrisé (§ 14).

Dans la somme de tous les termes relatifs à un même conducteur, on peut mettre en facteur le potentiel, qui a une valeur constante, et l'on arrive à l'énoncé suivant : étant donnés deux états d'équilibre V_1, V_2, ..., Q_1, Q_2, ... ; V_1', V_2', ..., Q_1', Q_2' du système de conducteurs, on a l'identité :

$$Q_1V'_1 + Q_2V'_2 + ... = Q'_1V_1 + Q'_2V_2 + ...$$

Appliquons cette identité aux deux états d'équilibre considérés tout à l'heure :

$$V_1, 0, 0, ..., 0; \qquad C_{11}V_1, \; C_{21}V_1, ..., \; C_{n1}V_1;$$

et

$$0, \; V_2, 0, ..., 0; \qquad C_{12}V_2, \; C_{22}V_2, ..., \; C_{n2}V_2;$$

on obtient :

$$C_{21}V_1V_2 = C_{12}V_2V_1, \qquad \text{ou} \qquad C_{12} = C_{21}.$$

Le coefficient d'influence du conducteur 2 sur le conducteur 1 est égal au coefficient d'influence du conducteur 1 sur le conducteur 2. On l'appelle le **coefficient d'influence mutuelle** *de ces deux conducteurs en présence de tous les autres conducteurs du système.*

II. — CONDENSATEURS

49. Capacité d'un condensateur. — Nous allons appliquer les formules du paragraphe précédent au cas de deux conducteurs dont l'un, le conducteur 2, entoure complètement l'autre (*fig.* 51). Un tel appareil constitue un **condensateur ;** le conducteur 1 est l'*armature interne*, le conducteur 2 l'*armature externe*. Nous savons déjà, par le théorème des écrans électriques, que la charge Q de l'armature interne ne dépend que de la différence de potentiel $V_1 - V_2$ établie entre les deux armatures ; comme cette charge est une fonction linéaire des potentiels, elle est nécessairement proportionnelle à cette différence de potentiel. D'autre part, nous savons que, dans ce cas de l'influence

totale, la surface intérieure de l'armature externe porte une charge — Q, égale en valeur absolue et de signe contraire à celle de l'armature interne.

Si nous voulons appliquer les formules du paragraphe précédent, nous avons à considérer quatre coefficients, et les charges des deux conducteurs sont :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2, \qquad Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2.$$

Nous savons que $C_{12} = C_{21}$, et que, dans ce cas où le conducteur 2 entoure le conducteur 1, $C_{12} = - C_{11}$. Posons alors $C = C_{11} = - C_{12} = - C_{21}$, et $C' = C_{22} - C_{11}$, et désignons par Q (au lieu de Q_1) la charge du conducteur intérieur ; les formules deviennent :

$$Q = C(V_1 - V_2), \qquad Q_2 = - Q + C'V_2.$$

Le terme — Q, qui figure dans l'expression de Q_2, représente, comme nous l'avons déjà vu, la charge répartie sur la surface intérieure de l'armature externe ; l'autre terme $Q' = C'V_2$ représente par suite la charge répartie sur sa surface extérieure. Le théorème des écrans électriques nous apprend que cette dernière charge ne dépend pas de l'existence ni de la charge de la surface intérieure, ni de l'armature interne : le coefficient C' est donc égal à la capacité qu'aurait le conducteur 2, supposé entièrement rempli de matière conductrice et isolé dans l'espace. Il nous apprend de plus que, quels que soient les phénomènes qui se passent à l'extérieur du condensateur, et à condition que la différence de potentiel $V_1 - V_2$ reste constante, la charge Q reste constante : le coefficient C ne dépend donc pas de ces phénomènes. Ils ne peuvent modifier que la charge Q' de la surface extérieure de l'armature externe, soit que son potentiel V_2 varie, soit que sa capacité C' soit modifiée par l'approche de conducteurs au potentiel zéro, soit que des charges y soient développées par influence par l'approche de conducteurs chargés.

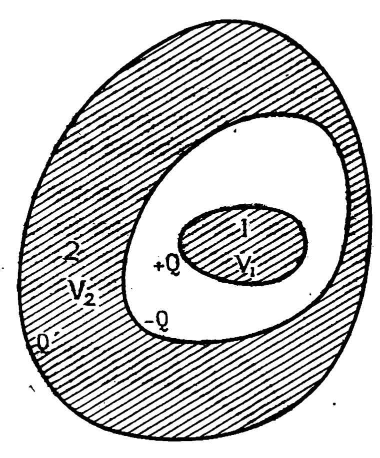


FIG. 51.

En général, comme nous le montrerons plus loin (§ 53), la capacité C' est beaucoup plus petite que la capacité C : on peut donc négliger la charge Q' devant la charge Q. D'ailleurs, dans toutes les expériences de précision, où la protection électrostatique des appareils est réalisée (§ 41), l'armature externe est reliée à l'enveloppe conductrice qui assure cette protection, et les phénomènes électriques étudiés sont uniquement ceux qui se déroulent à l'intérieur de cette enveloppe : il n'y a pas lieu de tenir compte des charges électriques autres que les charges, égales en valeur absolue et de signe contraire, Q et — Q, portées par les surfaces en regard des deux armatures.

La charge Q de l'armature interne s'appelle la **charge du condensateur.** Elle est liée à la *différence de potentiel* $V = V_1 - V_2$ entre ses deux armatures par la relation :

$$Q = CV.$$

La charge d'un condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel entre ses deux armatures ; le rapport constant de la charge à la différence de potentiel s'appelle la capacité du condensateur.

La grandeur ainsi définie, et qui n'est autre que la capacité du conducteur 1 en présence du conducteur 2, est de même espèce que la capacité d'un conducteur isolé définie au paragraphe 45 ; elle se mesure avec les mêmes unités, définies au paragraphe 46 : unité électrostatique C. G. S., ou unité pratique, qui est le farad, ou encore sous-multiples du farad, en particulier microfarad.

La capacité d'un condensateur dépend uniquement de la forme et des dimensions de l'armature interne et de la surface intérieure de l'armature externe. Elle peut se calculer à partir de ces dimensions dans le cas où la forme géométrique est particulièrement simple et où l'on peut résoudre complètement le problème de l'équilibre électrique, c'est-à-dire des distributions et des champs ; les condensateurs où ce calcul est possible sont quelquefois désignés par l'expression de condensateurs calculables. Nous allons en donner quelques exemples.

Il faut bien remarquer que les formules que nous trouverons, qui contiennent des longueurs, ne sont valables que dans un système d'unités où l'on a défini l'unité de longueur. Si l'on veut les appliquer dans le système pratique pour calculer la capacité d'un condensateur en farads, il faudra par exemple exprimer les longueurs en mètres et prendre $\varepsilon_0 = \frac{1}{9.10^9}$.

Nous ne relaterons pas les expériences par lesquelles ces formules ont été vérifiées, et parfois même établies avant que la théorie soit connue : c'est ainsi que Cavendish savait, avant que Coulomb eût établi la loi des actions électriques, que la quantité d'électricité qu'une lame de verre garnie de métal peut recevoir est proportionnelle à la surface de la garniture et inversement proportionnelle à l'épaisseur du verre. On peut considérer que la vérification expérimentale des formules résulte du fait que les nombreuses mesures de capacités faites par les différentes méthodes que nous décrirons plus tard, et dont quelques-unes sont très précises, n'ont jamais conduit à des contradictions.

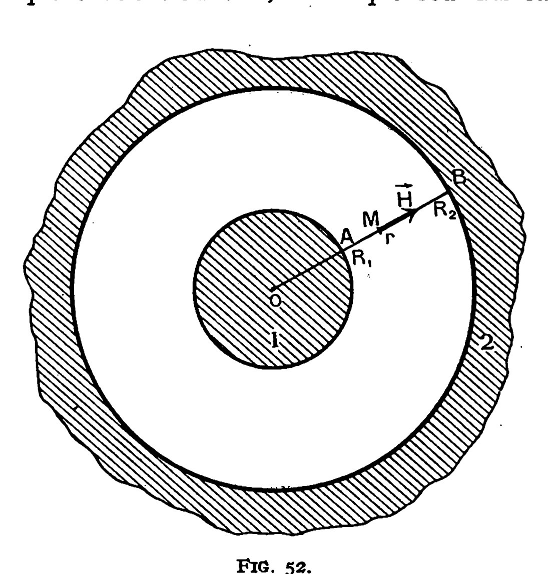


FIG. 52.

50. Condensateur sphérique. — L'armature interne et la surface intérieure de l'armature externe sont deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 (*fig.* 52). Le condensateur présentant la symétrie de révolution autour d'un axe quelconque, la distribution

est uniforme sur chacune des deux surfaces. Considérons un point M dans l'intervalle qui sépare les deux conducteurs, à une distance r du centre O, et calculons le champ $\vec{H}$ en ce point : il ne dépend que des charges situées à l'intérieur de la cavité du conducteur 2. La couche uniforme répartie sur la surface sphérique intérieure de l'armature externe ne crée pas de champ au point M intérieur ; la couche uniforme répartie sur la surface sphérique de l'armature interne crée, au point M extérieur, le même champ que si elle était concentrée en son centre O : le champ $\vec{H}$ est dirigé suivant $\vec{OM}$, et sa grandeur est $\frac{Q}{\varepsilon_0 r^2}$.

La différence de potentiel entre les deux armatures est alors :

$$V = V_A - V_B = \int_A^B H dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

et la capacité du condensateur sphérique, c'est-à-dire le rapport $\frac{Q}{V}$, est

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

51. Condensateur cylindrique. — L'armature interne et la surface intérieure de l'armature externe sont des cylindres de révolution indéfinis coaxiaux, de rayons R_1 et R_2 (*fig.* 53). Le condensateur présente la symétrie de révolution par rapport à l'axe des cylindres ; il est de plus symétrique par rapport à un rayon OM quelconque : la distribution est uniforme sur chacune des deux surfaces en regard ; le champ $\vec{H}$ et M est dirigé suivant le rayon $\vec{OM}$ et ne dépend que de la distance r du point M à l'axe.

Considérons la partie du condensateur comprise entre deux plans PP′ perpendiculaires à l'axe séparés par une distance l : soit Q la charge portée par chacune des surfaces ainsi limitées dans les deux armatures. Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée Σ constituée par un cyclindre de révolution de rayon r limité par les deux plans PP′ : le flux à travers cette surface est égal à $4\pi Q/\varepsilon_0$; d'autre part, comme le vecteur champ, en un point d'un des plans PP′, est situé dans ce plan, il se réduit au flux, à travers la surface latérale $2\pi rl$ du cylindre, du vecteur de grandeur constante H qui lui est normal. On a :

$$2\pi r l H = 4\pi \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad H = \frac{2Q}{\varepsilon_0 r l}$$

La différence de potentiel entre les deux armatures est :

$$V = V_A - V_B = \int_A^B H dr = \int_{R_1}^{R^2} \frac{2Q}{\varepsilon_0 r l} dr = \frac{2Q}{\varepsilon_0 l} \log \frac{R_2}{R_1},$$

et la capacité de la partie considérée du condensateur cylindrique est :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 l}{2 \log \frac{R_2}{R_1}}.$$

Ce calcul ne s'applique qu'à un élément découpé dans un condensateur cylindrique indéfini. Mais de même que les propriétés du conducteur creux subsistent quand ce conducteur présente de petites ouvertures, de même ce résultat reste applicable à un élément d'un condensateur cylindrique fini, pourvu qu'il se trouve à une distance de l'extrémité assez grande par rapport à l'intervalle des deux cylindres. Si l'on veut appliquer cette formule à la totalité du condensateur, on commettra une erreur provenant des perturbations qui se produisent vers les extrémités, et qui modifient la charge des cylindres sur une longueur comparable à leur intervalle ; si la longueur du condensateur est grande par rapport à cet intervalle, la charge des régions où agissent ces perturbations est faible par rapport à la charge totale et l'erreur commise en calculant la capacité totale par la formule ci-dessus est négligeable.

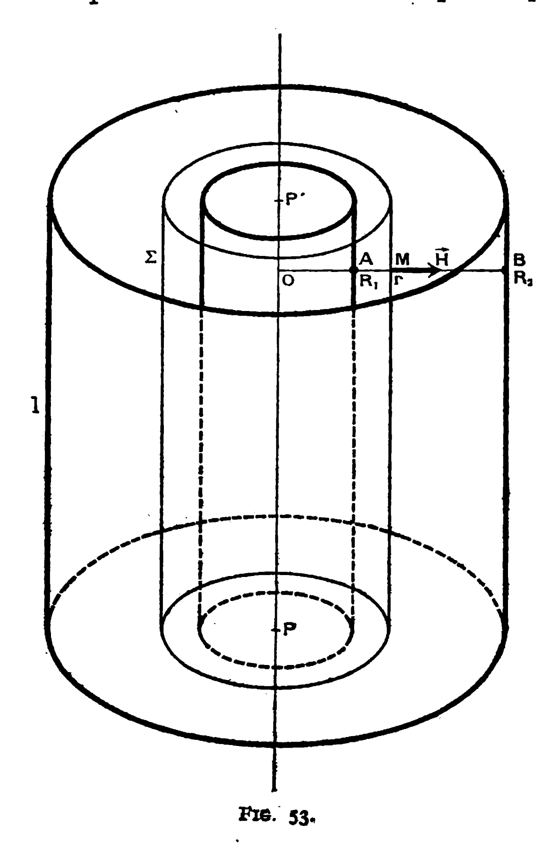


Fig. 53.

52. Condensateur plan. — Les surfaces en regard des deux armatures sont deux plans parallèles indéfinis (*fig.* 54). Il peut sembler que nous ne nous trouvons pas dans le cas d'un conducteur entouré par l'autre ; mais un conducteur plan indéfini doit être considéré, au même titre qu'un conducteur fermé, comme un écran électrique, séparant l'espace en deux régions complètement indépendantes l'une de l'autre au point de vue électrique ; les phénomènes électriques qui se déroulent entre les deux plateaux du condensateur plan sont complètement indépendants de ceux qui peuvent se passser à l'extérieur.

L'appareil présente la symétrie de révolution par rapport à une droite AB quelconque normale aux plateaux ; le champ $\vec{H}$ en un point M quelconque est

dirigé perpendiculairement aux plateaux. Les lignes de force sont des droites perpendiculaires aux plateaux; les éléments correspondants sont des éléments en regard, qui ont même surface, et les deux plateaux portent des distributions uniformes, dont les densités, $+\sigma$ et $-\sigma$, sont égales en valeur absolue. Ces deux plans uniformément électrisés produisent au point M des champs de même direction et de même sens; chacun d'eux a pour grandeur $2\pi\sigma/\varepsilon_0$ (§ 21) : le champ total entre les plateaux est un champ uniforme, de direction perpendiculaire aux plateaux, et d'intensité $4\pi\sigma/\varepsilon_0$.

FIG. 54.

La différence de potentiel entre les deux plateaux est, en désignant par e leur distance :

$$V = V_A - V_B = \int_A^B H\,ds = He = \frac{4\pi\sigma e}{\varepsilon_0}.$$

Si nous considérons une portion de la surface des plateaux, d'aire S, sa charge est $Q = S\sigma$, et sa capacité est :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S\sigma}{4\pi\sigma e} = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi e}.$$

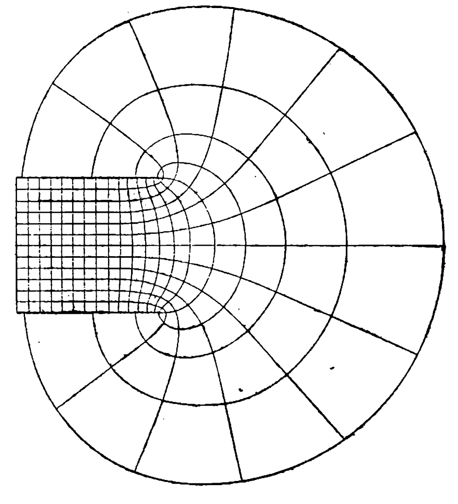


FIG. 55.

Cette formule donne la capacité d'un élément de surface S, appartenant à un condensateur plan indéfini d'épaisseur e. Elle est encore applicable à un élément pris dans un condensateur plan de dimensions finies, à condition que cet élément soit à une distance des bords assez grande par rapport à la distance des deux plateaux ; si on l'applique à la totalité du condensateur, on commet une erreur provenant des perturbations qui se produisent au voisinage des bords. Ces perturbations peuvent être calculées, et l'on peut en tenir compte par une correction apportée aux dimensions du condensateur ; elle est inférieure à la distance des deux plateaux, et est par conséquent négligeable lorsque cette distance est petite par rapport aux autres dimensions. La figure 55 représente, d'après Maxwell, les lignes de force du champ électrique au voisinage des bords : on se rend compte qu'à une distance du bord égale à la distance des plateaux, le champ diffère extrêmement peu (moins de 1/10.000 d'après le calcul) du champ uniforme, et que par conséquent, pour une différence de potentiel donnée, la densité électrique sur les plateaux diffère également extrêmement peu de celle qui correspondrait à un condensateur indéfini.

On peut d'ailleurs, pour des expériences de précision, se placer dans des

conditions où la correction des bords n'intervienne pas, en découpant effectivement dans l'un des plateaux une surface S, séparée du reste du plateau par une rainure AA' de très faible largeur (*fig.* 56) ; lorsqu'on charge le condensateur, cette surface S communique électriquement avec la partie qui l'entoure et qui constitue ce qu'on appelle l'**anneau de garde.** La charge de la surface inférieure de S est alors exactement $Q = \frac{\varepsilon_0 SV}{4\pi e}$; la charge de la surface supérieure est nulle si elle est protégée par une boîte métallique T, reliée à l'anneau de garde, et fait ainsi partie de la surface intérieure d'un conducteur creux. Si on isole ensuite de l'anneau de garde CC' la surface S et qu'on les décharge séparément, on recueillera, dans la décharge de la surface S, la quantité d'électricité Q.

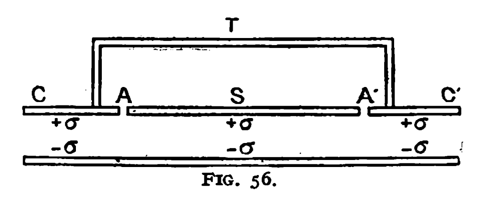


FIG. 56.

53. Condensation de l'électricité. — Si les surfaces en regard des deux armatures d'un condensateur sont des surfaces parallèles, dont la distance est petite par rapport à leur rayon de courbure, on peut assimiler chacun des éléments à un petit condensateur plan, et calculer approximativement la capacité par la formule $C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi e}$. Reprenons par exemple la formule du condensateur sphérique; posons $R_2 = R_1 + e$, et négligeons $\frac{e}{R_1}$ devant l'unité : nous obtenons, en désignant par S la surface $4\pi R_1^2$ de l'armature interne :

$$C = \frac{\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{\varepsilon_0 R_1^2}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi e}.$$

De même pour le condensateur cylindrique, en développant $\log \frac{R_1}{R_2}$ en série et s'arrêtant au premier terme :

$$C = \frac{\varepsilon_0 l}{2 \log \frac{R_2}{R_1}} = \frac{\varepsilon_0 l}{2 \log\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)} = \frac{\varepsilon_0 l R_1}{2e} = \frac{2\varepsilon_0 \pi l R_1}{4\pi e} = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi e}.$$

L'assimilation à un condensateur plan de chaque élément de surface permet également de calculer les charges portées par les surfaces en regard de deux conducteurs A et B dont certaines parties, de surfaces S, sont parallèles et très rapprochées, comme par exemple les portions *aa'*, *bb'* de ceux que représente la figure 57 : ces charges sont $+ Q$ et $- Q$, avec $Q = \frac{\varepsilon_0 S (V_1 - V_2)}{4\pi e}$. Elles sont d'autant plus considérables que *e* est plus petit : si les conducteurs sont assez rapprochés, les autres charges, réparties en dehors des surfaces en regard *aa'*, *bb'*, sont négligeables par rapport aux premières, et les deux conducteurs forment un véritable condensateur, dont la capacité est approximativement : $C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi e}$.

Supposons que le corps A soit d'abord porté à un potentiel V_0, positif par exemple, le conducteur B n'existant pas : le conducteur A a une certaine capacité C_0 et porte une certaine charge positive $Q_0 = C_0V_0$. Plaçons maintenant le conducteur B, maintenu au potentiel 0, en face du conducteur A : nous savons que, par influence, la surface de B se recouvre d'électricité négative. Le conducteur B chargé négativement agit aussi par influence sur le conducteur A maintenu à un potentiel constant : il y développe des charges positives, et la charge totale $Q = CV_0$ du conducteur A est augmentée. La capacité d'un conducteur augmente toujours lorsqu'on en approche un autre conducteur, maintenu au potentiel 0, et la formule $C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi e}$ montre qu'elle peut devenir très grande si les deux conducteurs deviennent très voisins. La quantité d'électricité répartie à la surface d'un conducteur, maintenu par une source à un potentiel constant,

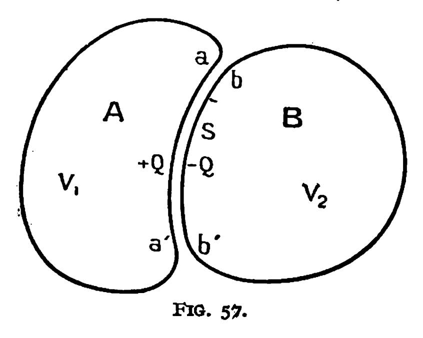


FIG. 57.

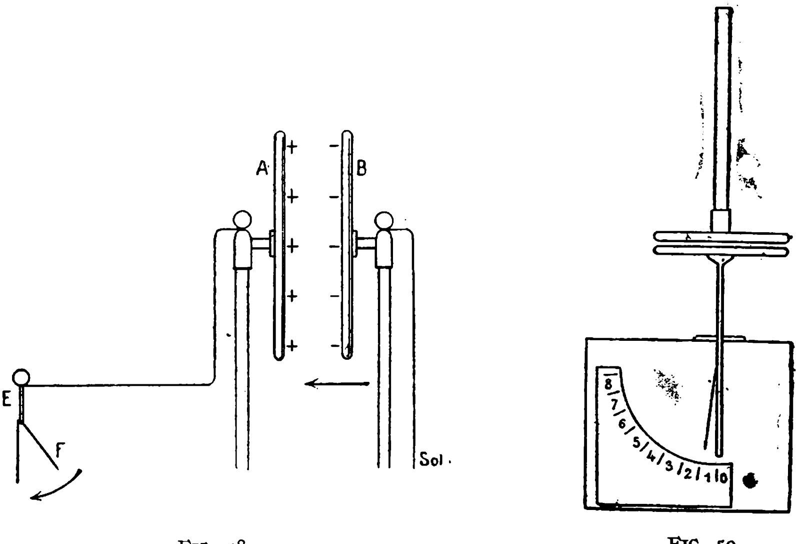


FIG. 58. FIG. 59.

augmente lorsqu'on en approche un autre conducteur maintenu au potentiel zéro : c'est ce phénomène, connu depuis longtemps, que les premiers expérimentateurs avaient désigné sous le nom de *condensation de l'électricité*, et c'est de là que vient le nom de condensateur donné au système des deux conducteurs A et B.

Si le corps A, au lieu d'être maintenu à un potentiel constant V_0, est isolé, et porte par suite une charge constante $Q_0 = C_0V_0$, son potentiel diminuera et

prendra la valeur $V = \frac{Q_0}{C} = V_0 \frac{C_0}{C}$. Ce phénomène se montre facilement en prenant pour A un plateau relié par un fil métallique à un électroscope, dont la cage est au sol (*fig.* 58). Lorsqu'on charge le plateau A, la feuille prend une certaine déviation, qui caractérise la différence de potentiel entre la feuille de l'électroscope et la cage ; si on approche de A un second plateau B, réuni au sol, cette déviation diminue : la capacité du conducteur formé par la feuille de l'électroscope et le plateau A, en présence de la cage de l'électroscope et des parois de la salle, augmente par l'approche du plateau B.

Cette augmentation de la capacité peut être considérable, si les deux plateaux peuvent être rapprochés à une distance très petite. C'est ce que montre par exemple l'**électroscope condensateur** de Volta : un électroscope ordinaire, qui commence à donner des déviations visibles pour des différences de potentiel de quelques centaines de volts entre la feuille et la cage, est muni d'un plateau A sur lequel on pose un autre plateau B (*fig.* 59) ; les faces en regard sont vernies pour éviter le contact électrique (le rôle du vernis sera précisé dans le paragraphe suivant). Le plateau B est relié à la cage, et au moyen d'une pile, on établit entre le plateau A et la cage une différence de potentiel de 1 à 2 volts : on ne constate aucune déviation appréciable de la feuille. On supprime alors la communication entre la pile et le plateau A, et on enlève le plateau B : on observe une déviation qui montre que la différence de potentiel entre A et la cage s'est élevée à plusieurs centaines de volts.

III. — *CONDENSATEURS USUELS*

54. Pouvoir inducteur spécifique. — Nous avons toujours supposé jusqu'ici que les conducteurs que nous étudiions étaient placés dans le vide ; nous avons d'ailleurs dit que les résultats restaient applicables, avec une erreur très faible, à des conducteurs placés dans l'air. Mais, dans les condensateurs usuels, les armatures sont en général séparées par un isolant autre que l'air : verre, mica, ou paraffine. Il est facile de voir expérimentalement que la valeur de la capacité dépend de la nature de cet isolant : si, dans l'expérience du condensateur à plateaux décrite au paragraphe précédent (*fig.* 58), on introduit entre les plateaux A et B, maintenus immobiles, une plaque de paraffine ou une plaque de verre après s'être assuré au préalable qu'elle ne porte aucune charge, on constate que le potentiel du plateau A diminue, et qu'il diminue plus avec la plaque de verre qu'avec la plaque de paraffine, si ces deux plaques ont même épaisseur. La capacité d'un condensateur est plus grande si le milieu qui sépare les plateaux est de la paraffine au lieu d'être de l'air, plus grande si c'est du verre au lieu d'être de la paraffine.

Le milieu isolant qui sépare les conducteurs et dans lequel on établit le champ électrique s'appelle le **diélectrique** ; les propriétés du champ électrique dépendent de la nature du diélectrique. Nous ne ferons pour le moment aucune hypothèse sur les phénomènes qui se passent dans le diélectrique, phénomènes sur lesquels nous reviendrons plus loin (Chap. XX). Nous admettrons simplement comme une loi expérimentale que *la capacité d'un condensateur, dans lequel l'intervalle entre les armatures est rempli par un diélectrique, est égale à la capacité du même condensateur, dans lequel le diélectrique est remplacé par le*

vide, multipliée par une constante, qui dépend uniquement de la nature du diélectrique. Cette constante, que nous désignerons par ε, s'appelle la **constante diélectrique** ou le **pouvoir inducteur spécifique** du diélectrique considéré.

On peut considérer cette loi comme établie expérimentalement par l'ensemble des mesures de capacités faites par les différentes méthodes que nous décrirons au fur et à mesure de notre exposé. Nous indiquerons d'ailleurs au chapitre XX avec quelle précision elle est vérifiée pour les diélectriques usuels.

D'après notre définition, le pouvoir inducteur spécifique est le rapport de deux grandeurs de même espèce, les capacités d'un même condensateur dans lequel l'espace compris entre les armatures est, soit rempli du diélectrique, soit vide : c'est un nombre, indépendant du système d'unités choisi. Voici les valeurs de cette constante pour quelques diélectriques usuels :

Ébonite................	2,8	Verre	5 à 7
Mica..................	8,0	Sulfure de carbone.........	2,63
Paraffine...............	2,30	Air (à 0°, 76 cm)............	1,000576
Gutta-percha............	4,4	Gaz carbonique (à 0°, 76 cm)..	1,000987

On voit que le pouvoir inducteur spécifique de l'air ne diffère que de 6/10.000 de l'unité. C'est cette erreur relative que l'on commet en assimilant le problème de l'équilibre des conducteurs dans l'air au problème de l'équilibre des conducteurs dans le vide : cela résulte immédiatement de la définition du pouvoir inducteur spécifique, en ce qui concerne les capacités, c'est-à-dire les calculs des charges en fonction des potentiels ou des potentiels en fonction des charges ; nous démontrerons plus tard (Chap. XX, § 206) qu'il en est de même en ce qui concerne les forces. La petitesse de cette erreur fait qu'on n'aura à en tenir compte que dans les expériences, extrêmement rares, où la précision dépasse le 1/1.000.

Les formules données pour les capacités doivent être complétées, pour les condensateurs à milieu diélectrique, en les multipliant par la constante ε. On obtient ainsi pour les capacités :

Du condensateur sphérique......... $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$;

— cylindrique........ $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 l}{2 \log \dfrac{R_2}{R_1}}$;

— plan............. $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{4\pi e}$.

Ces formules ne sont valables, en toute rigueur, que pour un condensateur fermé, dans lequel tout l'espace compris entre les armatures est rempli par un diélectrique homogène, de pouvoir inducteur spécifique ε. De même, *les capacités et les coefficients d'influence des conducteurs devront être multipliés par la constante ε, à condition que le conducteur ou le système de conducteurs considéré soit plongé dans un milieu diélectrique indéfini, de pouvoir inducteur spécifique ε, ou encore qu'il soit placé dans une enceinte conductrice fermée, formant écran électrique, dont l'intérieur est entièrement rempli du diélectrique, et qu'on ne s'occupe que des phénomènes qui se déroulent à l'intérieur de cette enceinte.*

Mais, de même que l'on peut appliquer la formule $C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi e}$ à un condensateur plan fini (§ 52) ou à deux conducteurs rapprochés par une partie de leur surface (§ 53), de même on peut, avec une erreur du même ordre de grandeur, appliquer à ces condensateurs la formule $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{4\pi e}$ si tout l'espace compris entre les plateaux, ou entre les parties voisines des deux conducteurs, est rempli d'un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique ε. Ici encore, on éliminera complètement l'erreur due aux perturbations au voisinage des bords par l'artifice de l'anneau de garde : bien entendu, l'espace compris entre l'anneau de garde et l'armature opposée doit être rempli du diélectrique.

55. Rigidité diélectrique. — La forme et la dimension des condensateurs varient suivant la capacité à réaliser, et surtout suivant la valeur de la différence de potentiel qui doit être établie entre les armatures. Pour réaliser de grandes capacités avec le moins d'encombrement possible, on est conduit à réduire autant que possible l'épaisseur du diélectrique. Mais, si l'on augmente la différence de potentiel entre deux conducteurs rapprochés, séparés par de l'air ou par tout autre diélectrique, il finit par jaillir entre ces conducteurs une étincelle qui les décharge — et qui brise le diélectrique s'il est solide. C'est ce que montre, par exemple, l'expérience du perce-verre, dans laquelle on perce une lame mince de verre en faisant jaillir entre deux pointes, placées en face l'une de l'autre, de part et d'autre de cette lame, l'étincelle de décharge d'une batterie de bouteilles de Leyde.

La différence de potentiel nécessaire pour produire l'étincelle augmente avec l'épaisseur du diélectrique qui sépare les deux conducteurs ; elle est loin de lui être proportionnelle (voir, pour les résultats relatifs à l'air, §§ 84 et 369). La connaissance de sa valeur, ou tout au moins de son ordre de grandeur, présente une très grande importance, pour la construction des condensateurs comme pour tous les autres emplois des isolants, par exemple pour l'isolement des câbles de transports d'énergie à haute tension. On aura une première idée de l'épaisseur du diélectrique nécessaire pour assurer l'isolement avec une différence de potentiel donnée en admettant la proportionnalité, et en connaissant la **rigidité diélectrique,** c'est-à-dire la différence de potentiel explosive correspondant à une épaisseur d'un centimètre. Voici, à titre d'indication, des valeurs correspondant à quelques isolants usuels, exprimées en kilovolts :

Air	32	Papier	40 à 100
Pétrole	65	Papier imprégné	400 à 1000
Verre	75 à 300	Mica	600 à 750

56. Association des condensateurs. — On peut avoir à grouper des condensateurs pour deux raisons, soit parce qu'un condensateur unique ne possède pas une capacité suffisante, soit parce qu'il ne supporterait pas une différence de potentiel suffisante.

Dans le premier cas, on groupera les condensateurs *en parallèle,* suivant le schéma indiqué par la figure 60. Chacun des condensateurs est soumis à la même différence de potentiel V ; l'ensemble des armatures $A_1 A_2$ ... forme un seul conducteur A, qui porte une charge Q égale à la somme $Q_1 + Q_2$ ...

des charges des conducteurs A_1A_2 ...; l'ensemble des armatures B_1B_2 ... forme de même un seul conducteur, qui porte la charge — Q. La *batterie* de condensateurs a donc une capacité, $C = \frac{Q}{V}$, égale à la somme des capacités, $C_1 + C_2... = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V}$ ..., des condensateurs associés.

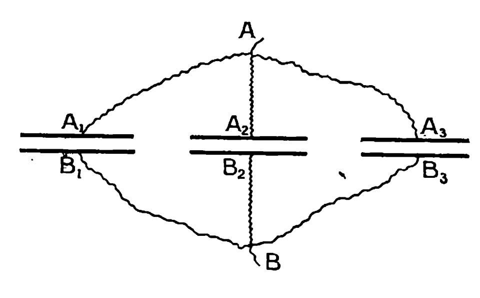


Fig. 60.

Dans le second cas, on groupera les condensateurs *en série*, suivant le schéma indiqué par la figure 61. Tous les condensateurs portent alors la même charge Q; en effet, le conducteur formé par deux armatures successives, telles que B_1 et A_2, est isolé et primitivement neutre : les deux armatures B_1 et A_2

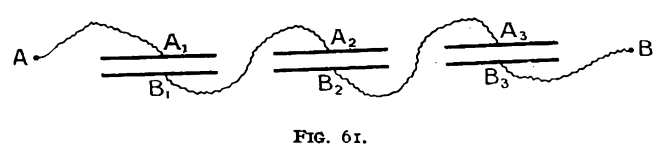


Fig. 61.

prennent des charges, égales en valeur absolue et de signes contraires, — Q et + Q. La différence de potentiel V entre les conducteurs extrêmes A et B est égale à la somme $V_1 + V_2$ ... des différences de potentiel appliquées à chaque condensateur. La *cascade* de condensateurs a une capacité dont l'inverse $\frac{1}{C} = \frac{V}{Q}$ est égale à la somme des inverses des capacités, $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} ... = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q}$ ..., des condensateurs isolés. L'association en série de n condensateurs identiques est donc équivalente à un condensateur de capacité n fois plus petite.

57. Condensateurs usuels. — Les premiers condensateurs employés ont été les *bouteilles de Leyde :* le diélectrique y est le verre d'une bouteille ou d'une jarre, les armatures sont des feuilles de papier d'étain qui la tapissent intérieurement et extérieurement. Mais, depuis que l'emploi des condensateurs est entré dans la pratique industrielle pour la téléphonie, la production et la réception des oscillations de haute fréquence, la protection des réseaux contre les surtensions, l'amélioration du facteur de puissance des installations

à courants alternatifs, etc. le verre a été entièrement abandonné comme diélectrique : il présente toujours en effet des défauts d'homogénéité qui amènent des échauffements locaux et des ruptures.

Les condensateurs employés dans la pratique sont presque uniquement des *condensateurs au papier imprégné* (papier paraffiné, papier bakélisé, etc.). Un élément est constitué par exemple par 3 bandes très minces d'étain ou d'aluminium laminés à 7/1.000 de millimètre, séparées par deux bandes de papier de 15/1.000 de millimètre d'épaisseur; la bande de métal centrale forme l'une des armatures, les deux bandes extérieures forment l'autre; la largeur des bandes de papier excède suffisamment celle des bandes de métal pour que l'étincelle ne puisse les contourner. Si le pouvoir inducteur spécifique du papier imprégné est égal à 4, la capacité par décimètre carré de la double bande de papier est :

$$C = 2\frac{\varepsilon S}{4\pi e} = \frac{2 \times 4 \times 100}{12{,}5 \times 0{,}0015} = 4{,}25\ 10^4\ u.\,é.\,s. = 0{,}047 \text{ microfarads.}$$

L'épaisseur totale est $3 \times 7 + 2 \times 15 = 50$ microns, et le volume

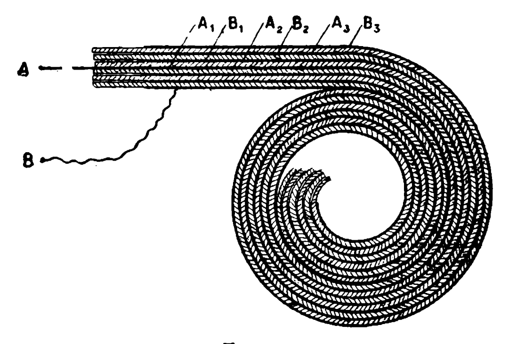


FIG. 62.

$100 \times 0{,}005 = 0^{cm^3},5$. La tension de perforation est de l'ordre de 300 à 500 volts : on réalise une cascade de condensateurs, de capacité n fois plus

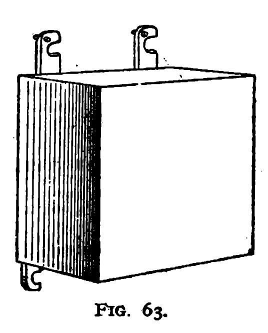


FIG. 63.

faible, mais pouvant supporter une différence de potentiel n fois plus forte, en superposant n doubles bandes. La bande multiple ainsi obtenue est en-

roulée sur une bobine, puis enfermée dans une monture convenable : la figure 62, dont les lettres correspondent à celles de la figure 61, montre comment est alors réalisée la cascade de condensateurs.

On construit ainsi des éléments dont la capacité peut aller, dans certains cas, jusqu'à un demi-microfarad pour une tension de service de 10.000 volts. On en réunit un certain nombre dans une même boîte étanche, remplie d'une matière isolante : en les associant au montage en série ou en parallèle, ou en constituant des batteries dont chaque élément est lui-même formé de plusieurs bobines en cascade, le constructeur peut réaliser la capacité que l'on lui demande pour la différence de potentiel que l'on veut utiliser. La figure 63

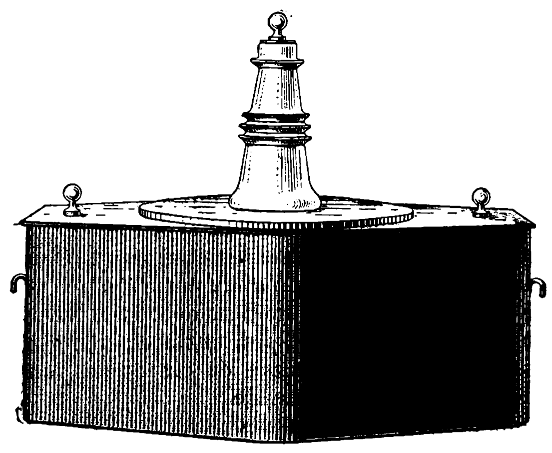


FIG. 64.

représente l'aspect extérieur d'un condensateur employé couramment dans les installations téléphoniques : il a la forme d'un cube de 5 centimètres de côté, sa capacité est de 4 microfarads, sa tension d'essai de 440 volts. La figure 64 représente un condensateur au papier de la Société des Condensateurs de Trévoux dont la tension d'essai est de 300.000 volts : ses dimensions en centimètres sont 113 × 66 × 47 ; l'une des armatures est réunie à la boîte, et l'autre à une borne isolante de 40 centimètres de hauteur.

Lorsqu'on les soumet à une différence de potentiel alternative, les condensateurs au papier imprégné s'échauffent par suite de l'imperfection du diélectrique (cf. §§ 209 à 211). Quoique la quantité de chaleur dégagée par cycle aille en diminuant quand la fréquence augmente, l'énergie totale dissipée augmente avec le nombre de cycles par seconde et elle augmente d'autant plus que l'élévation de température qu'elle produit rapproche de son point de fusion la substance qui imprègne le papier : si même on atteint ce point de fusion, on arrive presque fatalement au claquage du condensateur par passage d'une étincelle à travers le diélectrique.

On est par suite obligé, pour les emplois en haute fréquence, de recourir aux *condensateurs au mica*, malgré leur prix beaucoup plus élevé : on emploie des feuilles de mica, qu'on argente sur les deux faces, ou sur lesquelles

on colle des feuilles d'étain, et qu'on associe en parallèle ou en série. C'est également le mica qu'on emploie comme diélectrique pour les condensateurs destinés à servir d'appareils de mesure. Avec une feuille de mica d'épaisseur $0^{mm},2$, de surface $15 \times 25 = 375$ centimètres carrés, de pouvoir inducteur spécifique 8, on obtient ainsi un condensateur plan de capacité $C = \varepsilon \frac{S}{4\pi e} = \frac{8 \times 375}{4\pi \times 0,02} = 12.000$ unités électrostatiques, c'est-à-dire 1/75 de microfarad. En plaçant à côté les uns des autres 75 condensateurs analogues, on obtiendra une capacité d'un microfarad : en réalité on superpose les lames comme l'indique la figure 65; l'appareil se compose de lames de mica *a*, *a*... et de feuilles d'étain *f*, *f*... alternées; toutes les feuilles de rang pair communiquent d'un côté et forment l'une des armatures du condensateur, toutes les feuilles de rang impair communiquent de l'autre et forment l'autre armature. Si les feuilles d'étain ont également une épaisseur de $0^{mm},2$, le microfarad aura au total une épaisseur de $75 \times 0,4 = 30$ millimètres. La figure 66 représente un condensateur de ce type : les dimensions de la boîte qui le contient sont $30 \times 20 \times 9$ centimètres, et sa capacité totale est de 2 microfarads. Toutes les feuilles paires communiquent avec la borne marquée 0; les feuilles impaires communiquent par groupes avec les autres bornes, marquées de chiffres donnant la capacité correspondant à chaque groupe : 0,1, 0,2, 0,5 et 1. En réunissant un certain nombre de ces bornes, on peut réaliser un condensateur dont la capacité varie de dixième en dixième de 0,1 à 2 microfarads. Dans d'autres modèles, les différents groupes de feuilles communiquent avec des pièces de laiton fixées sur une plaque d'ébonite; on peut les réunir par des chevilles, suivant le procédé employé pour les boîtes de résistances (§ 139), et réaliser des capacités variant de millième en millième de 0,001 à 1 microfarad.

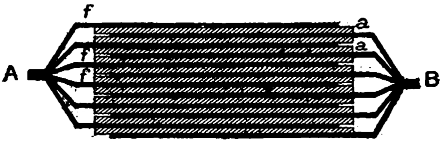


FIG. 65.

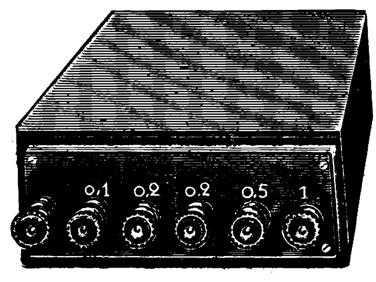


FIG. 66.

Pour les très hautes fréquences, ou pour les mesures de précision, le mica lui-même doit être considéré comme un diélectrique trop imparfait, et l'on doit employer des *condensateurs à air* (cf. § 85).

Enfin, il ne faut pas oublier que certains appareils, employés pour de tout autres usages, sont de véritables condensateurs et ont une capacité dont il faut tenir compte. C'est ainsi qu'un câble sous-marin constitue un condensateur cylindrique, dont l'armature interne est formée par le câble et l'armature externe par les fils d'acier qui le protègent : la longueur étant très grande, la capacité peut atteindre des valeurs élevées, de l'ordre d'un millier de microfarads pour un câble transatlantique. Les canalisations souterraines, télégraphiques, téléphoniques ou de distribution d'énergie, présentent de même des capacités de l'ordre de 0,1 microfarad par kilomètre.

CHAPITRE VI

ENERGIE ÉLECTRIQUE

I. — *ÉNERGIE D'UN SYSTÈME DE CONDUCTEURS*

58. Énergie électrique. — Supposons que, dans le champ électrique produit par un nombre quelconque de charges fixes, nous placions en un point A, où le potentiel est V_A, une charge q ; puis déplaçons cette charge q et, par un chemin quelconque, amenons-la en un point B, où le potentiel est V_B. Nous savons (§ 21) que le travail $\mathcal{T}$ accompli par les forces électrostatiques pendant ce déplacement est égal à $(V_A - V_B)q$. Le travail qui nous est ainsi fourni par le système des charges fixes et de la charge q mesure la *diminution d'énergie électrique* de ce système lorsqu'il passe de l'état 1 où la charge q est en A à l'état 2 où la charge q est en B. Sa *variation d'énergie électrique* est donc :

$$\Delta W = -\mathcal{T} = q(V_B - V_A).$$

Nous avons déjà fait remarquer que cette formule peut s'appliquer, soit en unités électrostatiques, en prenant l'erg comme unité de travail (ou d'énergie), soit en unités pratiques, en prenant le joule comme unité d'énergie.

De même qu'on ne peut définir physiquement que la différence de potentiel entre deux points, de même on ne peut définir physiquement que la variation d'énergie entre deux états. Mais, de même que nous avons choisi une origine des potentiels en admettant que le potentiel tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment des charges qui créent le champ, de même nous choisirons une origine des énergies en admettant que l'énergie d'un système de charges électriques tend vers zéro quand toutes ces charges s'éloignent indéfiniment les unes des autres. Nous prendrons donc pour valeur de l'**énergie électrique** d'un système de charges électriques le travail que peuvent fournir les forces électrostatiques lorsque toutes les charges s'éloignent indéfiniment les unes des autres, ou, ce qui revient au même, le travail qu'il faut dépenser contre les forces électrostatiques pour amener aux positions qu'elles occupent les charges électriques, primitivement infiniment éloignées les unes des autres.

Il peut d'ailleurs y avoir des expériences dans lesquelles les variations d'énergie n'apparaissent pas directement sous forme de travail : si nous réunissons par un fil métallique deux conducteurs isolés dans l'espace, portant les charges $+Q$ et $-Q$, le système revient à l'état neutre ; son énergie électrique disparaît sans que nous recueillions de travail. Mais le fil s'est échauffé, et le

principe de la conservation de l'énergie nous apprend que l'énergie calorifique qui est ainsi apparue est équivalente au travail que nous aurions recueilli si nous avions transporté la charge Q du premier conducteur au second, d'une façon réversible, en opposant à chaque instant une force égale aux forces électrostatiques.

59. Énergie d'un conducteur isolé. — Considérons un conducteur isolé, dont le potentiel est V, et la charge Q. Pour évaluer l'énergie électrique, nous devons considérer d'abord le conducteur à l'état neutre, puis y apporter, par fractions infiniment petites, la charge Q à partir de points infiniment éloignés. A un moment donné, le conducteur porte une charge Qx et son potentiel est Vx, x étant un nombre qui varie de 0 à 1 au cours de l'opération; pour apporter, d'un point infiniment éloigné jusque sur le conducteur au potentiel Vx, une charge $Q\,dx$, nous devons fournir le travail $dW = Vx \,.\, Qdx = VQ \,.\, xdx$. Le travail total W est la somme des travaux élémentaires, et l'énergie électrique du conducteur chargé est :

$$W = \int_0^1 VQx\,dx = VQ\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,QV.$$

En introduisant la capacité C du conducteur, donnée par la relation $Q = CV$, on peut mettre cette expression sous l'une ou l'autre des formes :

$$W = \frac{1}{2}\,QV = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,CV^2.$$

Les deux relations employées pour cette démonstration, $\mathcal{T} = qV$ et $Q = CV$, sont les formules de définition de l'unité de potentiel et de l'unité de capacité dans tous les systèmes d'unités : les formules obtenues peuvent être appliquées dans tous les systèmes.

60. Énergie d'un système de conducteurs. — Considérons un système de n conducteurs dont les potentiels et les charges sont respectivement :

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n, \qquad Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n.$$

Nous pouvons passer de l'état neutre à l'état ainsi défini par une succession d'états intermédiaires définis chacun par un nombre x, qui variera de 0 à 1, pour lesquels les potentiels et les charges seront :

$$V_1x,\ V_2x,\ \ldots,\ V_nx, \qquad Q_1x,\ Q_2x,\ \ldots,\ Q_nx.$$

Pour passer de l'état x à l'état $x + dx$, il faut apporter, de points infiniment éloignés, des charges $Q_1dx, Q_2dx \ldots, Q_ndx$ sur des conducteurs dont les potentiels sont respectivement V_1x, $V_2x \ldots$, V_nx ; il faut fournir le travail élémentaire :

$$dW = V_1xQ_1dx + \ldots + V_nxQ_ndx = \Sigma QV \,.\, xdx.$$

Le travail total, qui mesure l'énergie électrique du système de conducteurs, est donc :

$$W = \Sigma QV \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \Sigma QV.$$

L'énergie électrique d'un système de conducteurs est égale à la demi-somme des termes obtenus en faisant, pour chaque conducteur, le produit de la charge par le potentiel.

Si un conducteur est au potentiel zéro, ou si sa charge totale est nulle, le terme correspondant est nul. Il n'y a pas lieu de tenir compte de ce conducteur dans le calcul de l'énergie. Cela ne veut pas dire d'ailleurs que sa présence ne modifie pas cette énergie : s'il était supprimé, l'équilibre des autres conducteurs serait modifié : si par exemple leurs potentiels restaient constants, leurs charges seraient modifiées.

Si l'on connaît les capacités et les coefficients d'influence, on peut transformer la formule de l'énergie, par exemple en exprimant les charges en fonction des potentiels. Ces expressions étant linéaires, l'énergie prend alors la forme d'une fonction du second degré des potentiels.

61. Énergie d'un condensateur. — Appliquons la formule du paragraphe précédent à un condensateur, dont les armatures sont aux potentiels V_1 et V_2 et portent des charges $+ Q$ et $— Q$. L'énergie du condensateur est :

$$W = \frac{1}{2}(QV_1 - QV_2) = \frac{1}{2} QV,$$

en désignant par V la différence de potentiel entre les deux armatures. En introduisant la capacité C du condensateur ($Q = CV$), on obtient les expressions équivalentes :

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Toutes ces lois ont été trouvées expérimentalement par Riess, avant que la théorie fût établie ; il déchargeait le condensateur à travers un fil métallique long et fin, et la quantité de chaleur dégagée était mesurée par la dilatation d'une masse d'air à laquelle elle était communiquée. Riess a également établi expérimentalement que l'énergie de condensateurs associés était la même que l'énergie du condensateur de même capacité que l'association : cette loi, évidente dans le cas de l'association en parallèle, l'est encore dans le cas de l'association en cascade, si l'on remarque que les conducteurs intermédiaires, dont la charge totale est nulle, n'interviennent pas dans le calcul de l'énergie.

Nous avons complètement négligé la charge Q' qui peut être portée par la surface extérieure de l'armature externe (*fig.* 67). Cette charge est presque toujours négligeable dans la pratique ; elle n'intervient d'ailleurs pas dans les expériences de précision, où l'armature externe fait partie de l'écran électrique qui assure la protection électrostatique, et où l'on n'étudie que les phénomènes qui se passent à l'intérieur de cet écran. Ces phénomènes sont totale-

ment indépendants de l'existence de la charge Q' et des autres charges extérieures : les variations d'énergie qui leur correspondent, et qui seules sont accessibles à l'expérience, sont complètement représentées par les variations de l'expression que nous avons calculée. L'énergie électrique totale du système des deux conducteurs est $\frac{1}{2}(QV + Q'V_2)$; si nous déchargeons le condensateur, c'est-à-dire si nous neutralisons les charges + Q et — Q intérieures à l'écran électrique, nous ne modifions pas les charges et les potentiels extérieurs, le terme $Q'V_2$ reste constant, et la diminution d'énergie est $\frac{1}{2}QV$. Inversement, si un phénomène extérieur modifie la charge Q', il peut modifier aussi le potentiel V_2, mais il ne modifie ni la charge Q ni la différence de potentiel V, il ne modifie pas l'énergie $\frac{1}{2}QV$ du condensateur. L'écran électrique sépare l'espace en deux régions, indépendantes l'une de l'autre au point de vue de l'énergie, comme elles le sont au point de vue des distributions et des champs.

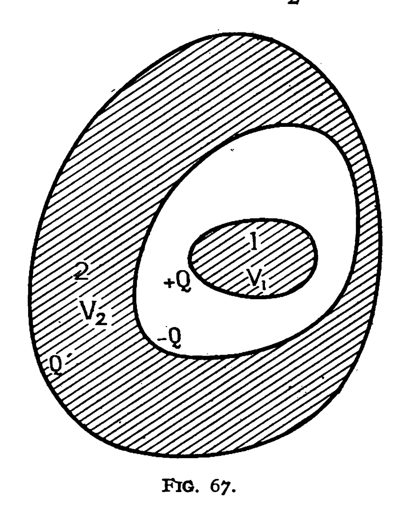


FIG. 67.

Nous pouvons, à l'aide des formules données, nous rendre compte de l'ordre de grandeur de l'énergie qu'on peut emmagasiner dans les condensateurs usuels. D'après la remarque faite à propos du conducteur isolé (§ 59), elles peuvent être utilisées aussi bien dans le système pratique que dans le système électrostatique.

Prenons d'abord une bouteille de Leyde, dont la capacité serait, par exemple, de 600 unités électrostatiques, et chargeons-la avec une différence de potentiel de 60.000 volts, soit 200 unités électrostatiques. L'énergie emmagasinée sera :

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 600 \times 40\,000 = 12 \,.\, 10^6 \text{ ergs} = 1{,}2 \text{ joule}.$$

Prenons un condensateur à lames de mica de 2 microfarads ($2 \,.\, 10^{-6}$ farads) chargé à 100 volts. L'énergie sera :

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \,.\, 10^{-6} \,.\, 10^4 = 10^{-2} \text{ joule}.$$

Prenons enfin un condensateur industriel (cf. *fig.* 64, p. 87) de capacité 0,8 microfarad chargé à 100.000 volts. L'énergie emmagasinée est :

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \,.\, 10^{-6} \,.\, 10^{10} = 0{,}4 \,.\, 10^4 = 4 \text{ kilojoules},$$

II. — *LOCALISATION DE L'ÉNERGIE DANS LE MILIEU DIÉLECTRIQUE*

62. Condensateur plan. — Dans le problème de l'étude complète de l'équilibre des conducteurs, nous avons été conduits à déduire les résultats relatifs à la charge des conducteurs de l'étude de la variation du potentiel et du champ électrique aux différents points de l'espace qui les entoure. Nous allons également calculer l'énergie du système de conducteurs à partir des données relatives aux points du milieu qui les sépare.

FIG. 68.

Considérons d'abord un condensateur plan (*fig.* 68), de surface S, dont les armatures sont à une distance e et sont séparées par un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique ε. Si la différence de potentiel entre les armatures est V, l'énergie W emmagasinée dans ce condensateur est :

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{4\pi e} \cdot V^2.$$

Le champ entre les plateaux est un champ uniforme d'intensité H ; remplaçons dans l'expression de l'énergie la différence de potentiel V par sa valeur He ; on a :

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{8\pi} H^2Se.$$

Le produit Se représente le volume v du diélectrique soumis à l'action du champ H ; on a :

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{8\pi} H^2v.$$

On peut calculer l'énergie du condensateur plan en admettant que chacun des éléments de volume du diélectrique soumis à l'action du champ électrique possède une énergie, dont la valeur par unité de volume est $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 H^2}{8\pi}$.

63. Système de conducteurs quelconque. — Nous allons étendre cette relation au cas d'un système de conducteurs quelconque, et montrer que l'énergie de ce système est la somme des énergies réparties dans tout l'espace soumis au champ, un petit élément de volume dv, placé en un point M où le champ est H, possédant une énergie $\varepsilon\varepsilon_0 H^2 dv/8\pi$. Pour simplifier l'écriture, nous ferons les calculs en unités électrostatiques ($\varepsilon_0 = 1$).

Supposons d'abord le système de conducteurs placé dans le vide. Pour démontrer cette propriété, nous avons à évaluer l'intégrale $\iiint H^2 dv$ étendue à tout l'espace où agit le champ électrique. Pour cela, décomposons cet espace

en éléments de volume par les tubes de force et les surfaces équipotentielles du champ, et considérons un de ces éléments de volume, limité par un tube de force T et deux sections normales MM', NN' de ce tube de force : désignons par dS sa section NN' et par ds sa longueur MN (*fig.* 69). L'élément différentiel de l'intégrale est $H^2 dS\, ds$, ou $H dS \times H ds$. Le produit $H dS$ représente le flux $d\varphi$ du champ $\vec{H}$ à travers la section normale NN' du tube de force, et le produit $H ds$ représente la différence de potentiel dV entre les points M et N d'une ligne de force : l'élément différentiel $H^2 dv$ est donc égal à $d\varphi \, . dV$; les deux quantités $d\varphi$ et dV doivent d'ailleurs être prises toutes deux positives, puisque $H^2\, dv$ est positif.

Supposons que le tube de force T parte d'un conducteur 1 au potentiel V_1 pour aboutir à un conducteur 2 au potentiel V_2, et désignons par $dq_1 = + dq$, $dq_2 = - dq$ les charges des éléments correspondants AA', BB' découpés par le tube de force sur ces conducteurs ; l'application du théorème de Gauss à une surface constituée par le tube de force, la section normale NN' et fermée par une surface quelconque à l'intérieur du conducteur 1, de laquelle sort le flux $d\varphi$ et qui renferme la charge dq, donne la valeur de $d\varphi = 4\pi\, dq$; l'élément différentiel $d\varphi\, dV$ peut se mettre sous la forme $4\pi dq\, . dV$. Si nous faisons la somme de tous ces éléments pour tout l'espace compris à l'intérieur du tube de force T, nous pouvons mettre $4\pi dq$ en facteur et nous avons simplement à faire la somme des différences de potentiel dV d'une extrémité à l'autre du tube de force : cette somme est égale à la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les conducteurs 1 et 2. On a [1] :

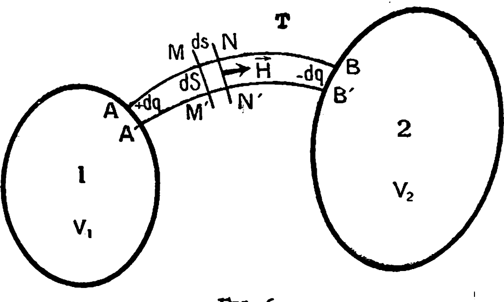


FIG. 69.

$$\int_T H^2 dv = 4\pi dq \int_B^A dV = 4\pi dq\, (V_1 - V_2) = 4\pi\, (V_1 dq_1 + V_2 dq_2).$$

Pour obtenir la valeur de l'intégrale $\iiint H^2 dv$ étendue à tout l'espace soumis au champ, il faut faire la somme de ces expressions pour l'ensemble de tous les tubes de force. Comme toute surface conductrice portant une charge forme l'extrémité d'un tube de force, cette somme se présente sous la forme d'une intégrale $4\pi \iint V dq$, étendue à l'ensemble de ces surfaces ; en groupant les termes qui correspondent à un même conducteur, on peut mettre en facteur son potentiel V, et la somme de ces termes est $4\pi V \iint dq$, c'est-à-dire $4\pi VQ$, Q étant sa charge totale. On a :

$$\iiint H^2 dv = 4\pi \Sigma QV = 8\pi W,$$

[1] Si le tube de force T partait du conducteur 1 et s'éloignait indéfiniment, cette valeur se réduirait à $4\pi V_1 dq_1$.

ou

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint H^2 dv.$$

Supposons maintenant que l'espace qui entoure les conducteurs soit rempli, dans certaines de ses parties, par un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique ε. Nous démontrerons plus loin (chap. XX, § 203) que le vecteur dont le flux est constant à travers les différentes sections d'un tube de force, et auquel s'applique le théorème de Gauss, est le vecteur $\varepsilon\vec{H}$. Il faut donc, pour conserver la démonstration précédente, chercher à évaluer l'intégrale $\iiint \varepsilon H^2 dv$, en mettant l'élément différentiel sous la forme $\varepsilon H dS \times H ds$, et en remplaçant $\varepsilon H dS$ par $d\varphi = 4\pi dq$. On obtient ainsi la relation :

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \varepsilon H^2 dv,$$

l'intégrale étant étendue à toute la région de l'espace où agit le champ.

Dans un système d'unités non électrostatique, c'est la quantité $\varepsilon\varepsilon_0 H\, dS$ qui est égale à $4\pi dq$ (§ 203) ; *on peut calculer l'énergie d'un système de conducteurs électrisés, en supposant que cette énergie est répartie dans tout l'espace où agit le champ électrique, et qu'en un point de cet espace, où le pouvoir inducteur spécifique est* ε *et le champ* H, *l'énergie par unité de volume est* $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 H^2}{8\pi}$.

64. Localisation de l'énergie. — Nous avons considéré la propriété que nous venons de démontrer comme une identité algébrique, permettant simplement de donner une autre forme au calcul de l'énergie.

En réalité, il y a là plus qu'une identité mathématique, et les théories modernes considèrent que l'énergie est effectivement localisée dans l'espace où agit le champ. Les propriétés des conducteurs électrisés ne sont en effet pas modifiées, tandis que les propriétés de l'espace sont modifiées par le fait qu'il est le siège d'un champ électrique. Une charge électrique placée en un point de cet espace est soumise à une force ; la science actuelle est basée sur la négation de l'idée d'action à distance : il faut admettre que cette force est due à l'action même du diélectrique, ce diélectrique fût-il le vide. L'espace où existe un champ électrique est modifié, et il possède une certaine énergie, qu'on peut recueillir là où elle se trouve.

Ce sont ces idées qui ont servi de base à la théorie de Maxwell, et c'est la théorie de Maxwell qui a fait prévoir l'existence des ondes hertziennes, et qui, par suite, a conduit à la télégraphie sans fil. Lorsque, dans un poste de télégraphie sans fil, on charge et on décharge, 200.000 fois par seconde, le condensateur formé par l'antenne et la terre, on déverse dans ce condensateur de l'énergie, et cette énergie est captée par les appareils de réception, qui peuvent être à des milliers de kilomètres de l'antenne : l'énergie n'est pas restée localisée dans les conducteurs qui forment le condensateur, mais elle s'est propagée dans tout l'espace où a pu parvenir le champ électrique qu'ils créent.

L'existence de cette propagation de l'énergie dans l'espace qui entoure un système de conducteurs électrisés nous impose le point de vue de Maxwell :

l'énergie est localisée dans l'espace soumis à l'action du champ électrique ; nous avons démontré que, dans le cas de l'équilibre électrostatique, la quantité d'énergie localisée dans chaque élément de volume dv de cet espace est égale à $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 H^2}{8\pi} dv$.

III. — *EXPRESSION DES FORCES ÉLECTROSTATIQUES A PARTIR DE L'ÉNERGIE*

65. Expression en fonction des charges. — Considérons un système de conducteurs en équilibre électrique, dont certains sont susceptibles de se déplacer, et supposons que nous sachions calculer la valeur de l'énergie W pour les différentes positions de ces conducteurs et leurs différents états d'électrisation. Nous allons montrer que l'on peut en déduire les valeurs des forces électrostatiques qui s'exercent sur les conducteurs mobiles.

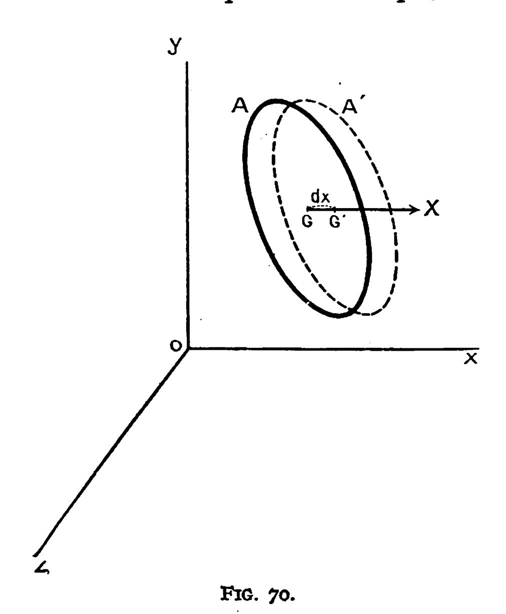


Fig. 70.

Supposons qu'il y ait dans le système un conducteur A mobile, et que l'énergie W soit exprimée en fonction des charges électriques portées par les différents conducteurs et des paramètres géométriques qui définissent la position du conducteur A. Cherchons la valeur de la projection X sur un axe Ox de la résultante des forces électrostatiques qui agissent sur le conducteur A. Pour cela, supposons que, tous les conducteurs étant isolés et leurs charges électriques restant par suite constantes, nous déplacions le corps A de A en A' (*fig.* 70), par une translation infiniment petite dx parallèle à Ox : le travail fourni au cours de cette translation par les forces électriques est Xdx. Il n'y a pas d'autres échanges d'énergie entre le système de conducteurs électrisés et le milieu extérieur : ce travail, fourni par le système, est donc égal à sa diminution d'énergie ; si nous désignons par W et W + dW les valeurs de l'énergie dans les deux positions A et A', cette diminution est — dW, et nous avons :

$$X dx = - dW.$$

Si x est l'une des variables indépendantes qui définissent la position du corps A, les autres variables sont restées constantes au cours du déplacement.

et il en est de même des charges : le rapport $\frac{dW}{dx}$ est, par définition, la dérivée partielle de la fonction W par rapport à x, et l'on peut écrire :

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x}.$$

De même, si le conducteur peut tourner autour de l'axe Ox, et si L est le moment des forces électrostatiques par rapport à cet axe, le travail de ces forces, pour une rotation d'un angle $d\alpha$ autour de Ox, est $Ld\alpha$, et on a :

$$L = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}.$$

La composante suivant un axe (ou le moment par rapport à cet axe) de la force électrostatique qui s'exerce sur un conducteur est égale en valeur absolue, et de signe contraire, à la dérivée partielle, par rapport au déplacement suivant cet axe (ou à la rotation autour de cet axe), de l'énergie électrostatique du système de conducteurs, exprimée en fonction des charges.

Le calcul peut se faire, même si les liaisons, mécaniques ou électriques, ne

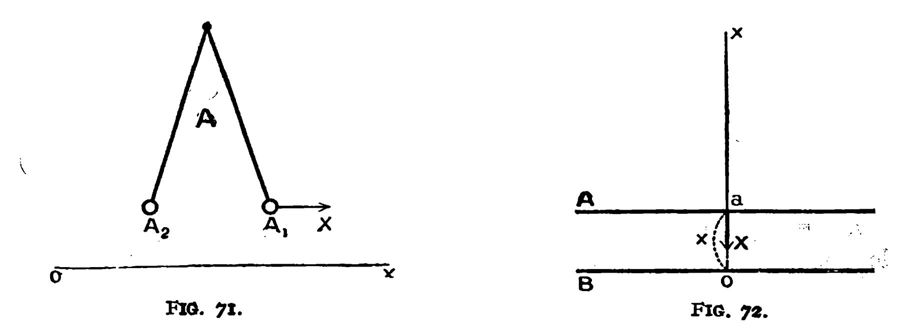


FIG. 71. FIG. 72.

permettent pas de réaliser effectivement le déplacement envisagé : les forces électrostatiques sont évidemment indépendantes de l'existence de ces liaisons. La même relation peut s'appliquer au calcul des forces qui s'exercent sur une partie seulement du conducteur A, supposée mobile par rapport à l'autre partie : ce sera par exemple le cas du conducteur formé par l'ensemble de la feuille et de la boule de l'électroscope.

Si le système se réduit au seul conducteur A, formé de deux parties A_1 et A_2 (*fig.* 71) et portant une charge totale Q, son énergie est $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$, la capacité C ne dépendant que des formes et des positions des corps A_1 et A_2 ; si cette capacité est exprimée en fonction de variables indépendantes dont l'une est l'abscisse x du corps A_1, on a pour expression de la force X qui s'exerce sur ce corps: $X = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x}$. Les quantités C et $\frac{\partial C}{\partial x}$ ne dépendent que des paramètres géométriques qui définissent le système : la force qui s'exerce entre les deux corps A_1 et A_2 maintenus à distance constante et communiquant

électriquement est proportionnelle au carré de la charge. Cette propriété a été démontrée expérimentalement dès 1772 par Cavendish.

Si le système se compose de deux conducteurs A et B formant les armatures d'un condensateur de capacité C, et portant une charge Q, son énergie est $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$, et la force qui s'exerce sur l'une des armatures est $X = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x}$. La valeur ainsi trouvée pour X est positive si $\frac{\partial C}{\partial x}$ est positif, la force est dirigée dans un sens tel que le déplacement qu'elle produit tende à augmenter la capacité.

Evaluons par exemple, en unités électrostatiques, la force qui s'exerce entre les plateaux d'un condensateur plan à lame d'air (*fig.* 72) : la position du plateau A est définie par sa distance $Oa = x$ au plateau B ; la capacité du condensateur est $C = \frac{S}{4\pi x}$, et son énergie $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{2\pi x}{S}Q^2$. La force est dirigée suivant Ox, et sa valeur est $X = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{2\pi Q^2}{S}$; elle est proportionnelle au carré de la charge, et la valeur trouvée est négative, c'est-à-dire qu'elle est dirigée dans le sens des x décroissants et tend à rapprocher les deux plateaux. Ce dernier résultat était évident, puisque les deux plateaux sont chargés d'électricités de signes contraires et s'attirent ; on aurait pu d'ailleurs calculer directement la force : le plateau B crée un champ H qui est le même en tous les points du plateau A, et est égal à $2\pi\sigma = 2\pi\frac{Q}{S}$; ce champ agissant sur une charge $-Q$ produit une force $X = -HQ = -\frac{2\pi Q^2}{S}$.

66. Expression en fonction des potentiels. — Nous allons reprendre le même calcul, en supposant que l'énergie W du système des conducteurs soit exprimée en fonction des paramètres géométriques qui définissent la position du conducteur A et des potentiels des différents conducteurs. Nous devons alors supposer que, au cours du déplacement dx qui amène A en A', les potentiels des différents conducteurs sont maintenus constants par des sources d'électricité auxquelles sont reliés ces conducteurs. Les échanges d'énergie du système avec le milieu extérieur ne se réduisent plus alors au travail Xdx des forces électriques : si la charge de l'un des conducteurs, qui est maintenu au potentiel constant V, a augmenté de dQ, la source d'électricité correspondante a dû faire passer la charge dQ du potentiel 0 au potentiel V, et par suite fournir une quantité d'énergie électrique égale à VdQ : le système a reçu l'énergie $\Sigma V dQ$, fourni le travail Xdx, et sa variation d'énergie est :

$$dW = \Sigma V dQ - X dx.$$

L'énergie W est égale à $\frac{1}{2}\Sigma QV$: comme les potentiels V sont restés constants, sa variation est :

$$dW = \frac{1}{2}\Sigma V dQ.$$

Si l'on remplace l'expression $\Sigma V dQ$ par sa valeur $2dW$, on obtient :

$$X dx = dW,$$

et, avec la notation des dérivées partielles :

$$X = + \frac{\partial W}{\partial x}.$$

On aura de même pour le moment des forces électrostatiques par rapport à un axe :

$$L = + \frac{\partial W}{\partial \alpha}.$$

La composante suivant un axe (ou le moment par rapport à cet axe) de la force électrostatique qui s'exerce sur un conducteur est égale à la dérivée partielle, par rapport au déplacement suivant cet axe (ou à la rotation autour de cet axe), de l'énergie électrostatique du système de conducteurs, exprimée en fonction des potentiels.

Si le système se réduit au conducteur A formé de deux parties A_1 et A_2 et maintenu au potentiel V (*fig.* 71), l'énergie est $W = \frac{1}{2} CV^2$, et la force X qui s'exerce sur l'une des parties est $X = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x}$; elle est proportionnelle au carré du potentiel.

Si le système se réduit aux deux armatures A et B d'un condensateur de capacité C, et si la différence de potentiel est V, l'énergie est $W = \frac{1}{2} CV^2$, et la force qui s'exerce sur l'une des armatures est $X = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x}$. Elle est dirigée dans un sens tel que le déplacement qu'elle produit tende à augmenter la capacité.

Dans le cas du condensateur plan, on a, en unités électrostatiques :

$$C = \frac{S}{4\pi x}, \qquad W = \frac{SV^2}{8\pi x} \qquad \text{et} \qquad X = \frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{SV^2}{8\pi x^2}.$$

On remarquera que les relations trouvées entre les forces et l'énergie contiennent un signe différent, suivant que l'énergie est exprimée en fonction des charges ou des potentiels : dans le premier cas, on a $X = - \frac{\partial W}{\partial x}$, et dans le second $X = + \frac{\partial W}{\partial x}$. La force X qui s'exerce sur un conducteur dans un état d'équilibre donné a une valeur qui ne dépend pas de la façon dont on la calcule, à partir des charges ou des potentiels ; il en est de même de l'énergie W dans cet état. Mais la fonction W qui a été considérée n'est pas la même dans les deux cas, puisque les variables ne sont pas les mêmes, et il est tout naturel que les dérivées partielles par rapport à un paramètre géométrique des deux fonctions W ne soient pas les mêmes. En fait,

dans les cas où nous avons explicité la fonction W, nous avons trouvé, à partir des charges ou à partir des potentiels, des formules, $X = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$ et $X = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x}$, qui sont identiques, puisque dans les cas considérés on a $Q = CV$. Dans l'un ou l'autre de ces cas, on peut se rendre compte de la raison d'être de la différence de signes : si par exemple nous rapprochons les armatures d'un condensateur à charge constante, nous diminuons le potentiel et par suite l'énergie ; si nous les rapprochons à potentiel constant, nous augmentons la charge, et par suite l'énergie : la fonction W de la variable x n'est pas la même dans les deux cas, et les deux fonctions varient en sens inverse.

CHAPITRE VII

ÉLECTROMÈTRES

I. — PRINCIPE DES ÉLECTROMÈTRES ÉLECTROMÈTRE A FEUILLE D'OR

67. Principe des électromètres. — Un électromètre est un instrument destiné à la mesure des différences de potentiel : c'est l'instrument fondamental des mesures électrostatiques ; les modèles en sont très variés et nous ne décrirons que les types principaux.

Un électromètre comporte toujours un conducteur mobile, dont on observe le déplacement, ou qu'on ramène à sa position d'équilibre par l'action d'une force connue. Ce conducteur forme l'une des armatures d'un condensateur, qui est chargé avec la différence de potentiel V à mesurer. Si C désigne la capacité du condensateur, et x le déplacement du conducteur mobile, la force électrostatique qui s'exerce sur ce conducteur est $F = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x}$; la quantité $\frac{\partial C}{\partial x}$ dépend uniquement de la forme géométrique du système, et peut être considérée comme une fonction de x. On lui oppose une force antagoniste, qui augmente avec l'écart, et tend à ramener le conducteur à sa position d'équilibre : soit $F' = \varphi(x)$ cette force. Le conducteur mobile prend une position d'équilibre correspondant à l'égalité des forces F et F', et de l'observation de cette position on peut déduire la valeur de la différence de potentiel V, qui est donnée par :

$$V^2 = \frac{2\varphi(x)}{\frac{\partial C}{\partial x}}.$$

Dans certains appareils la valeur de la force $\varphi(x)$ correspondant à chaque valeur de x peut être déterminée par des mesures mécaniques, par exemple en équilibrant cette force à l'aide d'un poids. La valeur de la capacité C correspondant à chaque valeur de x, et par conséquent sa dérivée $\frac{\partial C}{\partial x}$ peuvent être calculées à partir des dimensions géométriques de l'appareil, qui est construit de façon à former un condensateur calculable. Les formules qui donnent C contiennent la constante ε_0 de la loi de Coulomb ; en unités électrostatiques, cette constante est, par définition, égale à 1, de sorte qu'on peut, à l'aide de

ces appareils, déduire la valeur du potentiel V, en unités électrostatiques C. G. S., de mesures, purement mécaniques, de forces et de longueurs : ce sont des **électromètres absolus.**

Dans d'autres appareils, les valeurs de C ne sont pas calculables, ou les valeurs de $\varphi(x)$ ne peuvent pas être déterminées en valeur absolue avec assez de précision pour qu'on puisse obtenir des mesures absolues, mais la construction est telle que les déplacements sont proportionnels aux différences de potentiel ou à leurs carrés. Ces appareils permettront de faire des **mesures relatives ;** on peut déterminer, par la mesure du rapport des déplacements, le rapport de deux différences de potentiel, c'est-à-dire mesurer la première en prenant la seconde comme unité.

Enfin, il existe des appareils dans lesquels il est impossible de calculer *a priori* la relation entre le déplacement et la différence de potentiel. De tels appareils peuvent être employés comme **appareils de zéro,** pour constater qu'une différence de potentiel a été ramenée à une valeur nulle et ne produit aucun déplacement. Si on veut les employer à des mesures directes, on doit les *étalonner :* on détermine expérimentalement les valeurs du déplacement correspondant à une série de valeurs de la différence de potentiel, et on représente ces résultats par une courbe, sur laquelle on peut ensuite lire la valeur de la différence de potentiel correspondant à un déplacement mesuré. Cet étalonnage se fait à l'aide de sources donnant des différences de potentiel constantes, soit qu'on compare les indications de l'appareil à celles d'un électromètre absolu, soit qu'on connaisse à l'avance, d'après la nature de la source, ces différences de potentiel. Si l'appareil n'est pas destiné à la mesure de potentiels trop élevés, on emploiera commodément comme sources des batteries de petits accumulateurs, que l'on associera en série, en nombre variable suivant le potentiel qu'on veut obtenir : on réalise ainsi couramment des différences de potentiel de 1.000 volts, et on a réalisé jusqu'à plus de 12.000 volts. Si l'appareil est destiné à la mesure de potentiels très faibles, on fractionnera, par l'emploi d'un potentiomètre, la différence de potentiel donnée par une pile ; ce procédé sera décrit dans l'étude des courants (Chap. XIV).

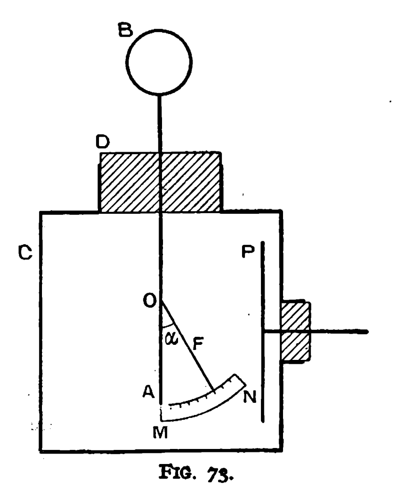


FIG. 73.

68. Électromètre à feuille d'or. — L'électroscope ordinaire, muni d'une graduation permettant de repérer le déplacement de la feuille, constitue un électromètre de la dernière catégorie.

Sous la forme habituelle, cet électromètre (*fig.* 73) se compose d'une tige ou d'une plaque verticale AB, pénétrant à travers un bouchon isolant D à l'intérieur de la cage C ; la feuille mince F, en or ou en tout autre métal, est collée à la tige en O, et se déplace en face d'une graduation MN, tracée sur une feuille mince de matière isolante, qui permet de repérer la position de son extrémité. La différence de potentiel V à mesurer est établie entre la cage C et le conducteur ABF ; la cage, qui joue le rôle de l'écran électrosta-

tique protégeant l'appareil contre l'influence des charges extérieures, doit être conductrice. Certaines de ses parties sont pourtant constituées par des glaces, permettant d'apercevoir la feuille : elles ne doivent pas en être très rapprochées et leurs dimensions doivent être réduites au strict nécessaire ; on emploie quelquefois des glaces semi-platinées, c'est-à-dire recouvertes d'une couche métallique très mince à la fois transparente et conductrice.

La capacité du condensateur formé par le conducteur ABF et la cage augmente à mesure que la feuille se rapproche de la cage, et, quoique cette capacité ne soit pas calculable, on peut prévoir l'allure générale de la courbe d'étalonnage. Raisonnons comme si la feuille était rigide et tournait autour de l'axe horizontal O, et désignons par α l'angle qu'elle fait avec la verticale : le moment, par rapport à l'axe O, des forces électriques est $\frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha}$, et le moment de la force de pesanteur, qui tend à ramener la feuille à la verticale, est $mga \sin \alpha$, en désignant par m sa masse et par a la distance du centre de gravité à l'axe. Si la différence de potentiel et la déviation sont très faibles, la déviation α sera, en désignant par $\left(\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)_0$ la valeur de $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$ pour $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2mga} \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)_0 V^2$: *la déviation est proportionnelle au carré de la différence de potentiel.* D'autre part, la capacité est maximum lorsque la feuille est perpendiculaire à la tige AB et aussi près que possible de la paroi opposée de la cage : *la déviation tend vers 90° quand le potentiel augmente indéfiniment,* et la courbe d'étalonnage a la forme représentée par la figure 74, en supposant que la cage soit assez grande pour que la feuille ne vienne pas la toucher. Dans un électroscope ordinaire, la déviation de 10° est atteinte pour une différence de potentiel de l'ordre de 300 volts.

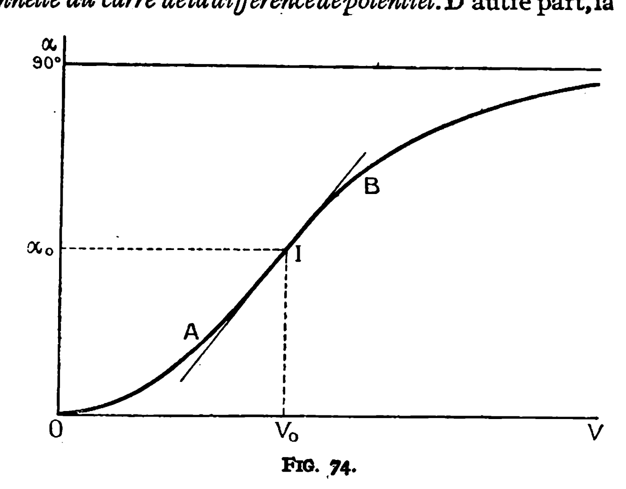


FIG. 74.

Pour un potentiel donné, la déviation augmente si on augmente la capacité, ainsi que ses variations, en rapprochant la feuille de la cage : on peut faire varier la sensibilité en plaçant en face de la feuille, à une distance que l'on peut modifier, un plateau P, relié métalliquement à la cage (*fig.* 73).

D'autre part, la sensibilité est d'autant plus grande que la feuille est plus légère, et elle ne dépend pas de sa largeur : il y a avantage à prendre des feuilles très minces et très étroites, qu'on observe avec un microscope à grossissement faible et à micromètre oculaire; la réduction des dimensions a en outre l'avantage, par suite de la réduction de la capacité, de diminuer la quantité d'électricité nécessaire pour charger l'électroscope à un potentiel donné.

69. Montage hétérostatique. — L'électromètre à feuille d'or convient mal à la mesure des faibles différences de potentiel, parce que sa déviation est alors proportionnelle au carré de la différence de potentiel et diminue très vite quand celle-ci diminue. Un électroscope ordinaire donne une déviation de 10° pour 300 volts; si la feuille est assez fine, on peut apprécier un déplacement de 1/10 de mm, correspondant, si la feuille a 5 centimètres, à une déviation de 1/10 de degré : la plus petite différence de potentiel que l'on puisse mettre en évidence est de 30 volts.

Reportons-nous à la courbe d'étalonnage (*fig.* 74) : la tangente à l'origine est horizontale, et le rapport $d\alpha / dV$ du déplacement angulaire à la variation du potentiel tend vers zéro avec V. On aurait une plus grande sensibilité en se plaçant dans là région AB de la courbe, au voisinage du point I, de coordonnées V_0, α_0, où le rapport $d\alpha / dV$ est maximum. Pour mesurer la différence de potentiel V, on portera la feuille, par rapport à la cage, d'abord au potentiel V_0, puis au potentiel $V_0 + V$, et l'on mesurera la déviation $\alpha - \alpha_0$, qui est proportionnelle à V, puisque la partie de courbe AB peut être assimilée à une droite. En réalité, la nécessité d'assurer la protection électrostatique de tous les appareils fait que la cage est en général reliée à l'un des pôles de la source qui produit la différence de potentiel V : on emploie alors un électromètre comportant un plateau P (*fig.* 73) isolé de la cage. Nous avons déjà remarqué que la déviation dépend presque uniquement de la distance et de la différence de potentiel entre le plateau et la feuille : on porte, à l'aide d'une source auxiliaire, le plateau P à un potentiel $-V_0$ par rapport à la cage; la feuille est d'abord réunie à la cage, puis portée au potentiel V : on établit ainsi successivement, entre le plateau et la feuille, les différences de potentiel V_0 et $V_0 + V$.

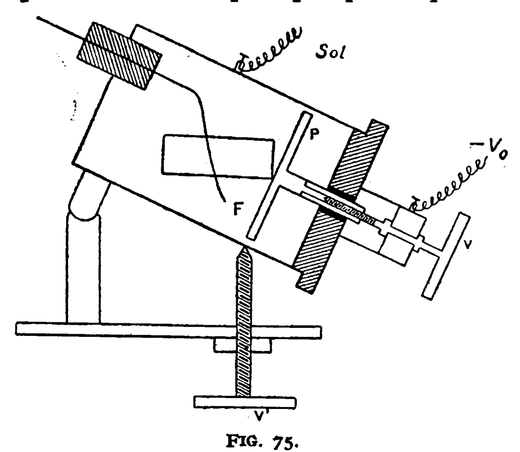


FIG. 75.

Une telle méthode, dans laquelle on emploie une différence de potentiel auxiliaire, autre que celle qu'on veut mesurer, est dite une **méthode hétérostatique.** Il faut remarquer que cette différence de potentiel auxiliaire doit être parfaitement constante, car une variation de V_0 produit la même déviation qu'une variation égale de V; on réalise facilement la constance nécessaire en établissant la différence de potentiel V_0 à l'aide d'une batterie de petits accumulateurs.

La figure 75 représente un électromètre de ce type (électromètre incliné de C. T. R. Wilson). Le réglage, qui consiste à trouver la région AB de sensibilité maximum, se fait en agissant, non pas sur le potentiel V_0, mais sur l'inclinaison de l'appareil et la distance du plateau à la feuille, au moyen des vis V' et V. On éclaire la feuille, et on l'observe à l'aide d'un microscope faiblement grossissant, par deux petites fenêtres ménagées dans la cage et fermées par des glaces. L'appareil est petit, d'après les remarques faites au paragraphe pré-

cédent : les dimensions de la cage peuvent être réduites à 3 × 2 × 2 centimètres. Avec un potentiel auxiliaire V_0 de l'ordre de 200 volts, on peut obtenir des déplacements de 20 à 30 divisions du micromètre pour 1/10 de volt et apprécier facilement le 1/200 de volt.

Enfin, on emploie souvent, dans les mesures de courants d'ionisation (cf. §§ 87 et 364), des appareils dits *électromètres à fil* ou *électromètres à corde*, dans lesquels la feuille d'or est remplacée par un fil de platine ou un fil de quartz platiné de 1 ou 2 microns de diamètre suspendu entre deux plateaux verticaux isolés Q et Q′ (*fig.* 75 *bis*). Ces plateaux jouent, par rapport au fil F, le même rôle que les quadrants d'un électromètre à quadrants (§ 73) par rapport à l'aiguille, et l'on peut réaliser les mêmes montages que dans ce dernier appareil (§ 74). On peut régler la position du zéro et la sensibilité en agissant sur les potentiels et l'écartement des plateaux : l'appareil, plus facile à régler que l'électromètre incliné, permet d'obtenir une sensibilité du même ordre (1/200 de volt par division du micromètre). Sa capacité est très faible, de l'ordre de quelques unités electrostatiques.

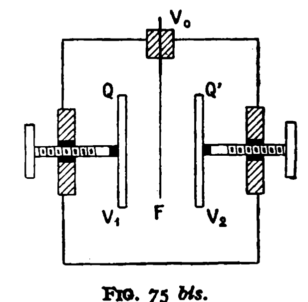


FIG. 75 *bis*.

II. — *ÉLECTROMÈTRES ABSOLUS*

70. Électromètre à plateaux. — Le modèle le plus simple d'électromètre absolu est constitué par un condensateur plan à plateaux horizontaux, dont le plateau supérieur A est suspendu sous l'un des plateaux d'une balance (*fig.* 76). La force électrostatique qui s'exerce entre les plateaux est équilibrée par le poids mg d'une masse m placée dans le plateau opposé P de la balance. Nous avons déjà donné (§ 66) l'expression de cette force électrostatique en fonction de la différence de potentiel V entre les plateaux : si S est leur surface, x leur distance, on a, en unités électrostatiques, lorsque l'équilibre est réalisé :

$$\frac{SV^2}{8\pi x^2} = mg, \qquad V = x\sqrt{\frac{8\pi mg}{S}}.$$

Pour faire une mesure, on place la masse m dans le plateau P de la balance, et l'on porte le plateau inférieur B du condensateur au potentiel V, l'autre étant maintenu au sol ; la distance x est d'abord prise assez grande ; le fléau de la balance est maintenu horizontal par un butoir, et le plateau A est alors dans le plan de l'anneau de garde G. A l'aide d'une crémaillère L, on soulève le plateau B ; on fait ainsi croître la force électrostatique, et à un moment donné, cette force équilibre la force mg. L'équilibre étant généralement instable, le fléau quitte le butoir et se déplace jusqu'au butoir opposé : au moment où

l'aiguille E commence à se déplacer, on lit la distance x sur la graduation portée par le support du plateau B.

L'appareil représenté (électromètre Abraham) est construit de façon que, pour $V = 10.000$ volts et $x = 1$ centimètre, on ait $m = 5$ grammes. Le rayon des plateaux circulaires est alors voisin de 6 centimètres. Il permet de mesurer, d'une façon satisfaisante, des différences de potentiel comprises entre 1.000 et 100.000 volts.

L'appareil de la figure 76 ne peut être employé pour des différences de potentiel inférieures à 1.000 volts, parce qu'il ne permet pas de mesurer avec une précision suffisante des distances x ou des masses m trop petites. L'amélioration de la précision de l'une des deux mesures permettra de prendre pour la quantité correspondante des valeurs plus petites, et de mesurer des différences de potentiel plus faibles. C'est ainsi que dans certains appareils on a remplacé la balance ordinaire par une balance de torsion, et que dans d'autres on a mesuré par des procédés interférentiels la distance des plateaux.

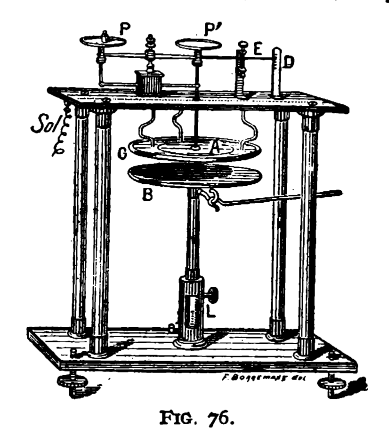


Fig. 76.

Dans les appareils ordinaires, la plus grosse erreur provient en général de la mesure de x : pour faire cette mesure, on doit déplacer le plateau inférieur jusqu'à l'amener au contact du plateau supérieur, et l'instant de ce contact est difficile à apprécier. On peut éliminer cette erreur par une méthode hétérostatique ; le disque supérieur est porté, par une source auxiliaire, à un potentiel V_0 ; le disque inférieur est porté successivement au potentiel 0 et au potentiel V, et l'on détermine le déplacement $d = x_0 - x$ correspondant à l'équilibre, pour la même force, et les différences de potentiel V_0 et $V_0 - V$. On a :

$$V_0 = x_0\sqrt{\frac{8\pi mg}{S}}, \qquad \text{et} \qquad V_0 - V = x\sqrt{\frac{8\pi mg}{S}},$$

d'où

$$V = d\sqrt{\frac{8\pi mg}{S}}.$$

La mesure de d ne présente plus la même difficulté que celle de x.

Le premier électromètre absolu à plateaux a été construit par Lord Kelvin, qui a imaginé à cette occasion l'anneau de garde. Dans son appareil, les forces étaient mesurées par des ressorts préalablement tarés, et il utilisait la méthode hétérostatique décrite ci-dessus ; il pouvait ainsi mesurer une différence de potentiel allant jusqu'à 3.000 volts à 3 volts près.

A ce type d'électromètres on peut rattacher, bien que ce ne soit pas un électromètre absolu, le voltmètre électrostatique Abraham-Villard, destiné à la mesure des très hauts potentiels (*fig.* 77). La force antagoniste est le poids du conducteur mobile AAD, suspendu à deux rubans d'acier RR' ; son déplacement est mesuré par une aiguille I. Tous les organes sont enfermés dans la boîte de protection électrostatique reliée à l'anneau de garde. On peut obtenir une dé-

viation correspondant à toute l'étendue de l'échelle pour une différence de potentiel de 100 kilovolts, quand les deux plateaux D et P sont écartés de 10 centimètres. En supprimant le plateau P on peut mesurer des potentiels de 200 à 300 kilovolts.

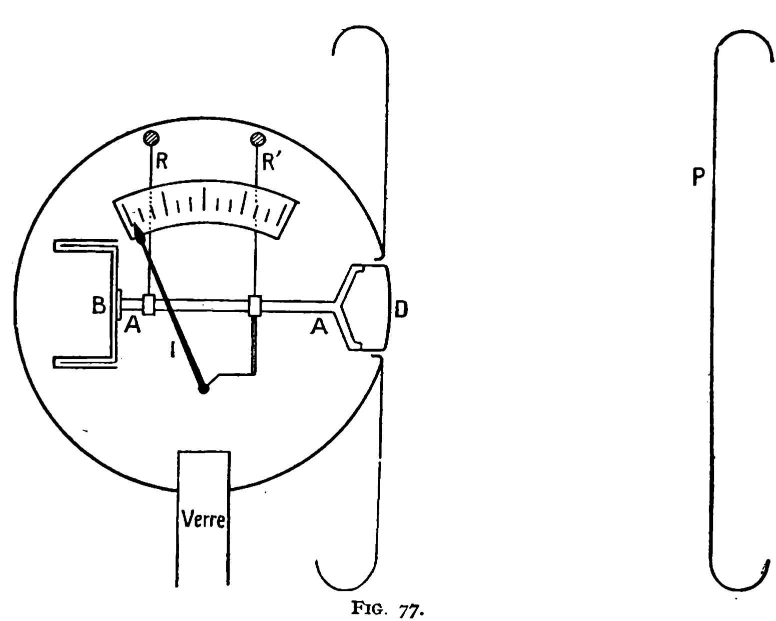


FIG. 77.

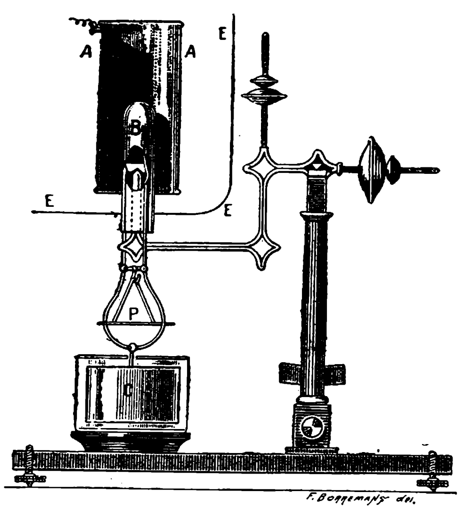
71. Électromètre cylindrique. — Cet électromètre (Bichat et Blondlot) se compose de deux cylindres coaxiaux (*fig.* 78) ; le cylindre intérieur B n'est qu'à moitié enfoncé dans le cylindre A : la capacité du condensateur formé par les deux cylindres tend à augmenter, et par conséquent le cylindre B tend à rentrer dans le cylindre A. Soient R_1 et R_2 les rayons des cylindres, x la longueur du condensateur, V la différence de potentiel, la capacité est, en unités électrostatiques, $C = \frac{x}{2 \log \frac{R_2}{R_1}}$, et la force verticale est :

$$X = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{V^2}{4 \log \frac{R_2}{R_1}}.$$

En réalité la capacité C diffère de la valeur calculée, à cause des perturbations qui se produisent aux extrémités des cylindres ; mais, si les cylindres sont assez longs, la distribution de l'électricité au voisinage des extrémités n'est pas modifiée par le déplacement, et ces perturbations n'influent pas sur la valeur de $\frac{\partial C}{\partial x}$.

Le cylindre B est porté par un fléau de balance, et on équilibre cette force

par des poids placés dans un plateau P suspendu au cylindre [1]. La force verticale X étant indépendante de la valeur de x, l'appareil oscille exactement comme une balance, et la mesure se fait comme une pesée. On la rend plus commode en ajoutant à l'appareil un amortisseur à air C, et en mesurant, à l'aide d'un miroir porté par le fléau, l'angle que fait la balance avec sa position d'équilibre.



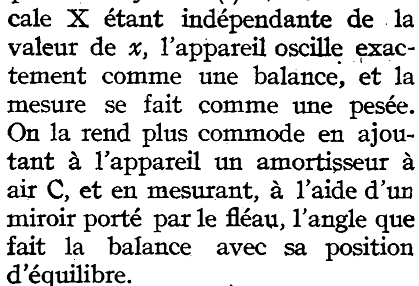


FIG. 78.

L'avantage de l'appareil sur l'électromètre à plateaux est qu'on obtient plus facilement un équilibre stable et que chaque mesure se réduit à une pesée, au lieu de comporter une pesée et une mesure de longueur. L'inconvénient est que les forces sont en général plus faibles, l'intervalle entre les cylindres devant rester assez grand pour que l'erreur résultant du fait que les cylindres n'ont pas exactement le même axe reste négligeable. Les précisions obtenues dans les deux appareils semblent comparables.

III. — *ÉLECTROMÈTRE A QUADRANTS*

72. Principe des appareils à rotation : voltmètres électrostatiques. — L'existence, dans un électromètre, des forces électrostatiques dont la mesure donne la mesure de la différence de potentiel est liée à la variation de la capacité du condensateur qui constitue l'électromètre au cours du déplacement de l'une des armatures. On produit cette variation, dans l'électromètre absolu à plateaux, en écartant les plateaux ; on peut aussi la produire en déplaçant l'un des plateaux parallèlement à lui-même, de façon à réduire l'étendue des surfaces en regard. Ce déplacement se réalise généralement par une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan des plateaux, et se mesure par le déplacement d'une aiguille sur un cadran divisé.

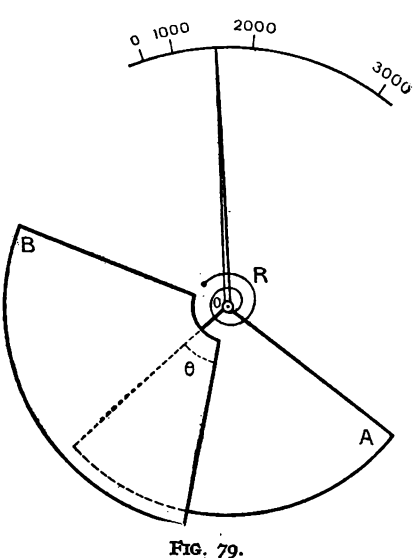


FIG. 79.

(1) La protection électrostatique est assurée par un écran E relié au fléau de la balance : la balance et le cylindre mobile sont au sol, le cylindre fixe est porté au potentiel V à mesurer.

Si l'on donne aux plateaux la forme de secteurs circulaires centrés sur l'axe de rotation O (*fig.* 79), la capacité C du condensateur est proportionnelle à la surface du secteur du plateau mobile A qui se trouve en face du plateau fixe B, et par suite à l'angle θ de ce secteur ; on peut la représenter par $k\theta$, k, capacité par unité d'angle, étant une constante qui ne dépend que des dimensions géométriques de l'appareil. Le moment, par rapport à l'axe de rotation, des forces électrostatiques qui agissent sur le conducteur A, est (§ 66) :

$$N = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{1}{2} kV^2.$$

Il est proportionnel au carré de la différence de potentiel et ne dépend pas de l'angle θ. Pour le mesurer, on oppose aux forces électrostatiques des forces antagonistes, dont le moment M par rapport à l'axe est proportionnel à l'angle α dont l'appareil a tourné à partir du zéro. Si nous désignons par Γ la constante de proportionnalité, on a $M = \Gamma\alpha$, et la condition d'équilibre est :

$$\Gamma\alpha = \frac{1}{2} kV^2, \qquad \alpha = V^2 \times C^{te}.$$

La déviation est proportionnelle au carré du potentiel. En réalité, les perturbations qui se produisent au voisinage des bords des plateaux A et B, et l'existence de charges électriques sur les parties du plateau A qui ne sont pas en face du plateau B, font que cette proportionnalité ne peut être considérée que comme approchée. L'instrument devra être gradué par un étalonnage expérimental.

Un grand nombre d'appareils industriels sont basés sur ce principe. La force antagoniste peut être produite par l'action d'un ressort spiral R ; elle peut aussi être, si l'axe de rotation est horizontal, le poids du conducteur mobile. Les oscillations autour de la position d'équilibre sont supprimées par l'emploi d'un amortisseur, à air ou magnétique ; la protection électrostatique est assurée par une cage métallique reliée au sol. Ces **voltmètres électrostatiques** sont à peu près les seuls voltmètres employés pratiquement pour la mesure des différences de potentiel comprises entre 1.000 et 15.000 volts. Ils ont l'avantage de n'être influencés ni par les courants, ni par les champs électriques et magnétiques voisins, et de ne pas consommer d'énergie lorsqu'ils restent en circuit. Comme leur déviation ne dépend que du carré de la différence de potentiel, ils peuvent mesurer également des différences de potentiel continues ou alternatives : dans ce dernier cas, ils en donnent la valeur efficace, et leurs indications sont indépendantes de la fréquence. Leur inconvénient est celui de tous les appareils où la déviation est proportionnelle au carré de la grandeur à mesurer : les divisions de l'échelle voisines du zéro sont extrêmement resserrées ; si la graduation maxima est, par exemple, 3.000 volts, l'intervalle 0 — 1.000 n'occupe que 1/9 de l'échelle.

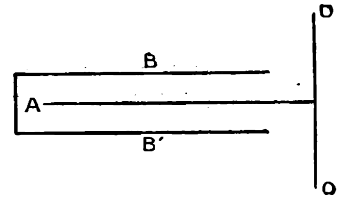


FIG. 80.

La sensibilité d'un voltmètre électrostatique est évidemment d'autant

plus grande que la capacité k par unité d'angle est plus grande. On la multipliera par 2 en adjoignant au plateau B un plateau B′ qui agit sur la face opposée du plateau A (*fig.* 80). On la multipliera encore par 2 en adjoignant à l'appareil ainsi constitué un appareil identique $A_1B_1B'_1$ symétrique par rapport à l'axe de rotation (*fig.* 81) ; on a en outre l'avantage d'équilibrer, par rapport à cet axe, le conducteur mobile AA_1 ; les plateaux BB_1 ont généralement la forme de quarts de cercles, et s'appellent les quadrants ; le conducteur mobile AA_1 s'appelle l'aiguille. Enfin, on peut encore augmenter la sensibilité en superposant plusieurs de ces appareils, comme l'indique la figure 82 ; on l'augmentera encore, par la suppression des frottements du pivotage qui supporte l'axe de rotation, et par la réduction du couple antagoniste, en suspendant le conducteur mobile à un fil de torsion.

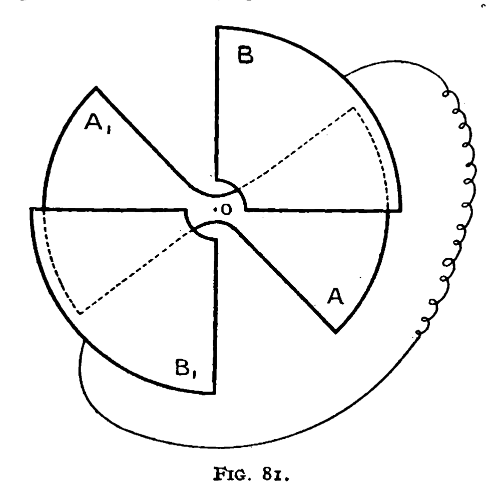


FIG. 81.

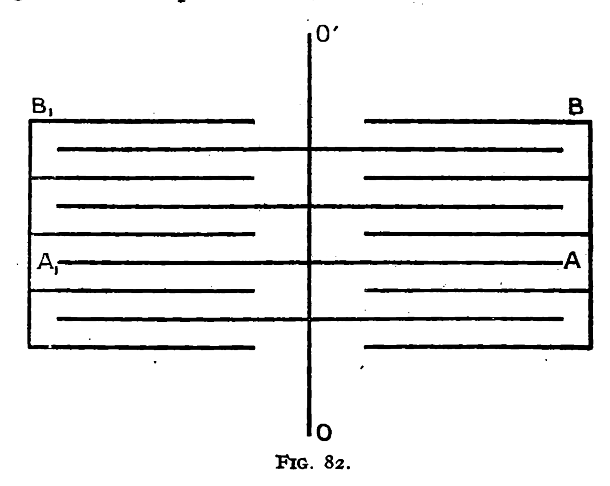


FIG. 82.

L'appareil ainsi constitué est le *voltmètre multicellulaire* de Lord Kelvin : avec 10 aiguilles superposées, on peut obtenir une déviation de 45° pour 100 volts, et on peut facilement mesurer une différence de potentiel de 100 volts à 1/10 volt près.

73. Électromètre à quadrants. — L'électromètre à quadrants, qu'on peut considérer comme l'instrument essentiel des mesures électrostatiques précises, est dû aussi à Lord Kelvin. C'est en somme l'avant-dernier des appareils décrits (*fig.* 81), complété par une seconde paire de quadrants CC_1 (*fig.* 83),

placés dans les deux derniers quadrants de cercle : il y a en présence trois conducteurs, le conducteur mobile constitué par l'aiguille AA_1, et deux conducteurs fixes constitués par les deux paires de quadrants BB_1, CC_1, chacun des quadrants communiquant électriquement avec le quadrant opposé.

Les quadrants sont séparés par des rainures étroites, de sorte que l'aiguille est enfermée dans la boîte qu'ils constituent et est ainsi soustraite à l'influence

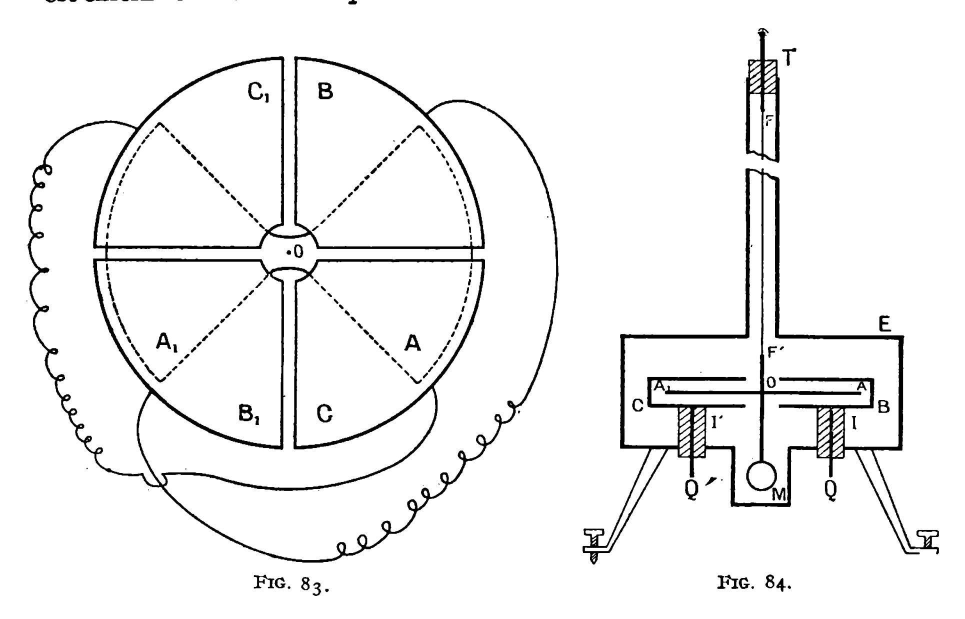


FIG. 83. FIG. 84.

électrique des corps extérieurs ; il faut néanmoins assurer une protection électrostatique complète en enfermant l'appareil dans une cage métallique E comportant le minimum d'ouvertures (*fig.* 84). Les quadrants sont supportés par des colonnes isolantes II′ et communiquent avec des bornes extérieures isolées QQ′ qui permettent de les mettre en relation avec la cage, ou avec des sources d'électricité. L'aiguille, aussi légère que possible, est découpée dans une feuille mince d'aluminium, ou une feuille de mica argentée. Elle est suspendue par un fil de torsion FF′: le couple antagoniste est très faible et l'appareil très sensible, si ce fil est très fin et assez long. C'est en général un ruban de bronze, suspendu, dans l'axe d'une colonne métallique qui fait partie de la cage, à un bouchon isolant T ; la suspension en T comporte, outre la borne permettant de charger l'aiguille, les organes de réglage mécanique nécessaires pour amener l'aiguille à hauteur convenable, au milieu de l'intervalle des plateaux supérieurs et inférieurs de la boîte de quadrants, et pour amener sa position d'équilibre à être symétrique par rapport aux quadrants lorsque les quatre quadrants sont au même potentiel (position représentée par la figure 83). Au-dessous de l'aiguille est suspendu, en face d'une fenêtre ménagée dans la cage métallique, un petit miroir M, qui sert à mesurer sa déviation par la méthode optique. Dans certains appareils, l'équipage mobile comporte aussi un amortisseur, destiné à supprimer ses oscillations autour de la position d'équilibre ; si le couple de torsion est très faible, et si les quadrants sont assez rapprochés,

l'amortissement est suffisamment assuré par le frottement de l'aiguille sur l'air enfermé dans la boîte de quadrants. La figure 85 représente l'aspect d'ensemble de l'appareil, la cage enlevée et la boîte de quadrants partiellement démontée.

Désignons par V_0 le potentiel de l'aiguille, V_1 et V_2 les potentiels des deux paires de quadrants. On peut, en première approximation, considérer l'appareil comme formé de deux condensateurs plans. Le premier est constitué par la paire de quadrants BB_1 et la partie de l'aiguille en regard ; il est chargé avec la différence de potentiel $V_0 - V_1$; le moment, par rapport à l'axe de rotation, des forces électrostatiques qui agissent sur l'armature mobile de ce condensateur, et tendent à faire rentrer l'aiguille à l'intérieur des quadrants BB_1, est indépendant de la position de l'aiguille, et est donné par la formule du paragraphe précédent :

$$N = \frac{1}{2} k (V_0 - V_1)^2.$$

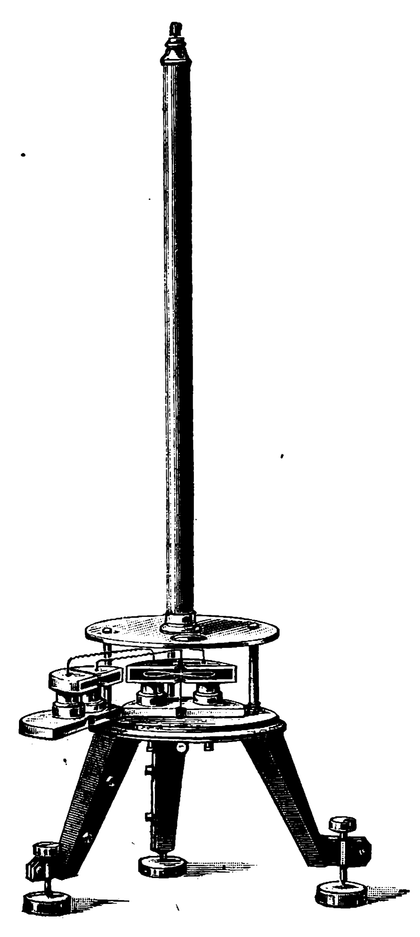


Fig. 85.

Le second condensateur est constitué par la seconde paire de quadrants CC_1 et la partie de l'aiguille en regard ; il est chargé avec la différence de potentiel $V_0 - V_2$; les forces électrostatiques qui s'exercent sur l'aiguille tendent à la faire tourner en sens inverse du couple précédent, et leur moment par rapport à l'axe de rotation est, en valeur absolue :

$$N' = \frac{1}{2} k (V_0 - V_2)^2.$$

La constante k est la capacité par unité d'angle de l'un des deux condensateurs, elle a la même valeur pour les deux à cause de la symétrie de l'appareil.

Enfin, si l'aiguille a tourné d'un angle α à partir de la position où la torsion du fil est nulle, elle est soumise à un couple de torsion $\Gamma\alpha$ proportionnel à cet angle. La position d'équilibre de l'aiguille est donnée par la condition :

$$N' - N = \Gamma\alpha, \qquad \frac{1}{2} k [(V_0 - V_2)^2 - (V_0 - V_1)^2] = \Gamma\alpha,$$

ou

$$\alpha = \frac{k}{\Gamma} (V_1 - V_2) \left(V_0 - \frac{V_1 + V_2}{2}\right).$$

74. Montage hétérostatique. — L'appareil est généralement utilisé avec un *montage hétérostatique*. On dispose d'une pile de charge pouvant établir une différence de potentiel V, de l'ordre de 100 ou 200 volts, et l'on se propose de mesurer une différence de potentiel v, de l'ordre d'une fraction de volt.

Le montage le plus commode est celui que représente schématiquement la figure 86. Les deux pôles de la pile de charge sont reliés à la cage et à l'aiguille ($V_0 = V$), l'une des paires de quadrants est réunie à la cage, et la différence de potentiel v est établie entre les deux paires de quadrants ($V_2 = 0$, $V_1 = v$). On a alors, en négligeant dans le second facteur $v/2$ devant V :

$$\alpha = \frac{k}{\Gamma} Vv.$$

La déviation est proportionnelle à la différence de potentiel à mesurer. Les variations accidentelles de la différence de potentiel auxiliaire V modifient la sensibilité, sans modifier le zéro de l'appareil, puisque pour $v = 0$ on a toujours $\alpha = 0$.

Si la différence de potentiel à mesurer v devient plus grande, et n'est plus

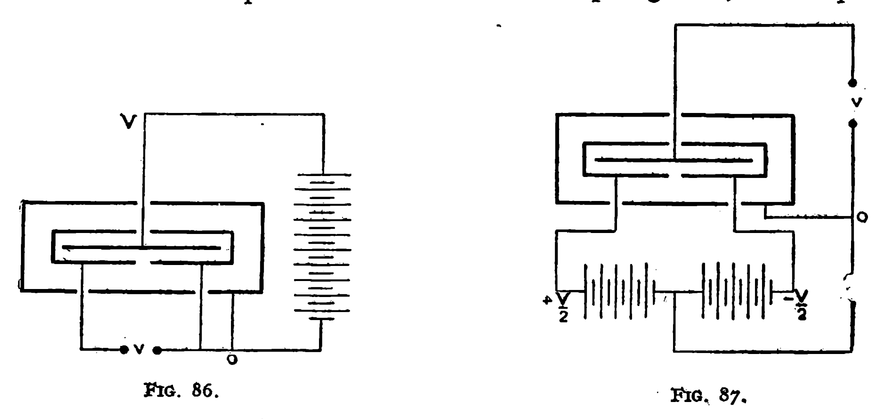


Fig. 86. Fig. 87.

négligeable devant V, par exemple si elle est de plusieurs volts, la déviation n'est plus proportionnelle à v. On peut alors employer un autre montage, plus symétrique (*fig.* 87), dans lequel la différence de potentiel auxiliaire V est établie entre les deux quadrants, le milieu de la pile de charge étant réuni a la cage $\left(V_1 = \frac{V}{2}, V_2 = -\frac{V}{2}, V_1 + V_2 = 0\right)$, et la différence de potentiel à mesurer v est établie entre la cage et l'aiguille ($V_0 = v$). On a alors :

$$\alpha = \frac{k}{\Gamma} Vv.$$

La déviation est la même que dans le premier dispositif. Les variations de la différence de potentiel V ne modifient que la sensibilité, sans déplacer le zéro, à condition qu'elles affectent symétriquement les deux moitiés de la pile de charge. Mais, si elles ne portent que sur l'une des deux moitiés, si par exemple

on a $V_1 = \frac{V}{2} + \varepsilon$, $V_2 = -\frac{V}{2}$, la déviation devient $\alpha = \frac{k}{\Gamma}(V + \varepsilon)\left(v - \frac{\varepsilon}{2}\right)$; la déviation $\alpha = 0$ correspond à la différence de potentiel $v = \frac{\varepsilon}{2}$; il y a déplacement du zéro : le second dispositif est inférieur au premier pour des mesures de différences de potentiel très faibles. Il convient d'ailleurs de signaler que, si la différence de potentiel V est fournie par une batterie d'accumulateurs, de 100 volts par exemple, elle peut rester constante à 1 millivolt près pendant plusieurs heures, si la batterie ne débite aucun courant.

L'électromètre à quadrants, donnant des déviations proportionnelles aux différences de potentiel qui lui sont appliquées, permet de mesurer le rapport de deux différences de potentiel v et v' par l'observation du rapport des déviations α et α' qu'elles fournissent : on a $\frac{v}{v'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$. Il permet de déterminer la valeur d'une différence de potentiel lorsque la constante de proportionnalité, $\frac{\alpha}{v} = \frac{k}{\Gamma} V$, a été déterminée par étalonnage à partir d'une différence de potentiel v_0 connue, en observant la déviation α_0 qu'elle produit $\left(\frac{k}{\Gamma} V = \frac{\alpha_0}{v_0}\right)$; ici encore, on mesure en réalité le rapport $\frac{v}{v_0} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$ de la différence de potentiel étudiée à la différence de potentiel étalon. *L'électromètre à quadrants est un instrument de mesures relatives,* dans lequel la mesure d'une différence de potentiel peut être faite par une **méthode de déviation.**

Dans la théorie élémentaire que nous avons donnée, nous avons calculé la dérivée $\frac{\partial C}{\partial \theta}$ de la capacité du condensateur formé par l'aiguille et une paire de quadrants en admettant que cette capacité était proportionnelle à l'angle θ du secteur correspondant. En réalité, il existe, au voisinage des bords de l'aiguille et des bords des quadrants, des perturbations qui modifient la densité électrique; tant qu'il existe entre ces deux régions une région où la densité est uniforme, la correction des bords, c'est-à-dire la différence entre la capacité réelle et la capacité calculée, reste constante, et le calcul que nous avons fait de la dérivée $\frac{\partial C}{\partial \theta}$ peut être considéré comme exact. Il n'en est évidemment plus de même si les bords de l'aiguille s'approchent des fentes qui séparent les quadrants : la déviation n'est proportionnelle à la différence de potentiel que si elle n'est pas trop grande. Nous avons de plus supposé que l'aiguille était parfaitement plane et parallèle aux quadrants, condition que la nécessité de lui donner une très faible épaisseur empêche de réaliser. Enfin, nous avons négligé certaines actions en assimilant le système des conducteurs à deux condensateurs, au lieu d'exprimer son énergie par les formules générales, contenant toutes les capacités et tous les coefficients d'influence. Pour toutes ces raisons, la proportionnalité de la déviation à la différence de potentiel n'est qu'approchée, et un appareil destiné à des mesures très précises devra toujours être gradué expérimentalement.

La fidélité de cette graduation, c'est-à-dire sa constance avec le temps, pourra d'ailleurs toujours être mise en doute. Aussi les mesures de précision

devront-elles toujours être faites par une **méthode de zéro.** Les différences de potentiel à comparer seront combinées de telle sorte que la mesure électrométrique se réduise à constater que deux points M_1 et M_2 sont au même potentiel : par exemple, s'il s'agit de vérifier l'égalité de deux piles, on les opposera l'une à l'autre de façon qu'entre les bornes extrêmes M_1 M_2 on ait une différence de potentiel Δv égale à la différence $v - v'$ des différences de potentiel qu'elles fournissent. On emploiera le premier montage : on prendra le zéro de l'appareil en réunissant les deux paires de quadrants au même point M_1, puis on isolera l'une des paires de quadrants et on la réunira au point M_2 ; si la déviation est nulle, on aura $v = v'$. Si on a une très faible déviation, on calculera la valeur de Δv en admettant sa proportionnalité à la déviation : comme Δv est un terme correctif, l'erreur commise sur sa mesure n'entraîne qu'une erreur relative négligeable sur la mesure de v.

La sensibilité de l'appareil est caractérisée par la valeur de la plus petite différence de potentiel Δv que l'on peut observer ; elle est liée à la plus petite déviation $\Delta\alpha$ que l'on peut observer par la relation :

$$\Delta v = \frac{\Gamma}{k} \cdot \frac{1}{V} \cdot \Delta\alpha.$$

Pour réduire autant que possible cette valeur de Δv, on peut d'abord réduire la valeur du couple de torsion Γ, c'est-à-dire prendre un fil de torsion aussi fin et aussi long que possible ; on est limité de ce côté par la nécessité de conserver à la période des oscillations de l'aiguille une valeur assez courte pour que les observations restent possibles : on arrive, en admettant des périodes de l'ordre de 20 secondes, à employer des fils dont la constante de torsion est de 1 ou 2 unités C. G. S. On peut ensuite chercher à augmenter la capacité par unité d'angle k ; mais cette augmentation ne peut pas être obtenue par une augmentation du rayon de l'aiguille, qui accroîtrait le moment d'inertie, car on serait conduit, pour ne pas accroître la période, à augmenter le couple de torsion dans des proportions telles qu'en réalité on augmenterait finalement la valeur de Δv : en fait, le diamètre de la boîte de quadrants n'atteint jamais 10 centimètres. On peut alors chercher à réduire la distance des quadrants à l'aiguille, ou enfin chercher à augmenter la différence de potentiel auxiliaire V : dans l'un et l'autre cas, on est limité par l'accroissement des forces électrostatiques verticales, provenant des dissymétries inévitables de l'aiguille, qui finissent par la faire basculer autour d'un axe horizontal.

On arrive, en réduisant la distance des quadrants à environ 3 millimètres, et en employant des potentiels de charge de l'ordre de 100 volts, à obtenir, sur une échelle à 2 mètres, des déviations du spot de 10 à 30 centimètres par 1/10 de volt. Comme on peut apprécier la position du spot à une fraction de millimètre près, on voit que l'on peut arriver à apprécier le millivolt et même le dixième de millivolt.

75. Montage idiostatique. — L'électromètre à quadrants peut aussi être employé sans différence de potentiel auxiliaire. L'une des paires de quadrants est réunie à la cage, l'autre à l'aiguille, et on établit entre elles la différence de potentiel v à mesurer (*fig.* 88) : on a $V_1 = V_0 = v$ et $V_2 = 0$, la déviation est :

$$\alpha = \frac{k}{\Gamma} \frac{v^2}{2}.$$

La déviation est proportionnelle au carré de la différence de potentiel, sous les mêmes réserves que tout à l'heure. L'électromètre à quadrants peut alors servir à la mesure relative de différences de potentiel alternatives.

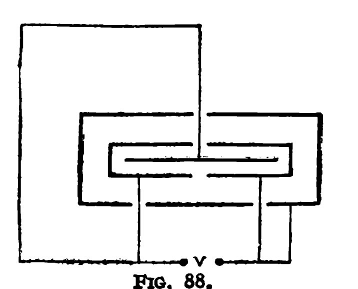


FIG. 88.

Comme la différence de potentiel v à mesurer est toujours beaucoup moins grande que la différence de potentiel auxiliaire V de la méthode hétérostatique, $v^2/2$ sera toujours très inférieur à vV : le montage idiostatique est beaucoup moins sensible que le montage hétérostatique. Cette infériorité est d'autant plus marquée que v est plus petit ; en particulier, si l'on emploie une méthode de zéro, on comparera la sensibilité des deux méthodes en comparant les différences de potentiel v' et v qui donnent la même déviation ; on a :

$$\frac{v'^2}{2} = Vv.$$

Si avec V = 100 volts on pouvait apprécier une différence de potentiel $v = 1/1.000$ de volt, on pourra maintenant apprécier une différence de potentiel v' :

$$v' = \sqrt{2Vv} = \sqrt{\frac{200}{1\,000}} = 0{,}45 \text{ volt environ.}$$

CHAPITRE VIII

MESURES ÉLECTROSTATIQUES

I. — *UNITÉS ÉLECTROSTATIQUES*

76. Formules fondamentales. — Nous allons d'abord rappeler, en un tableau d'ensemble, les définitions des unités qui servent à exprimer les mesures des différentes grandeurs électrostatiques.

La définition de ces unités résulte du choix fait, pour représenter certaines lois, de formules sans coefficients numériques. C'est ainsi qu'une fois définies l'unité de *quantité d'électricité* et l'unité de *travail*, nous avons défini l'unité de *différence de potentiel* et l'unité de *capacité* par les formules :

$$W = qV \quad (1) \qquad \text{et} \qquad Q = CV, \qquad (2)$$

qui entraînent, pour l'expression de l'énergie d'un condensateur, les formules :

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2. \qquad (3)$$

A partir de l'unité de quantité d'électricité et de l'unité de force, nous avons défini l'unité de *champ électrique* par la formule :

$$f = qH, \qquad (4)$$

formule qui redonne la formule (1) par la définition générale du potentiel :

$$dV = \vec{H}\,\vec{ds} \qquad \text{ou} \qquad V = \int_A^B \vec{H}\,\vec{ds}. \qquad (5)$$

On voit que toutes les unités ainsi définies peuvent être considérées comme formant un *système à quatre unités fondamentales*, les trois unités mécaniques de longueur, de masse et de temps, et l'unité de quantité d'électricité. Si ces quatre unités sont choisies arbitrairement, l'expression de la loi de Coulomb contient un coefficient numérique ε_0 :

$$f = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2}, \qquad (6)$$

et ce même coefficient numérique figure dans les expressions du *champ* et du

potentiel créés par une charge électrique, du théorème de Gauss, de l'*équation de Poisson,* du *théorème de Coulomb,* de la *capacité dans le vide d'un condensateur calculable* :

$$H = \frac{q}{\varepsilon_0 r^2}, \qquad V = \frac{q}{\varepsilon_0 r}, \qquad \int_\Sigma \vec{H}\, \vec{dS} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_0}, \tag{7}$$

$$\Delta V + \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0} = 0, \qquad H = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi e}.$$

Un **système électrostatique d'unités** est un système ne comportant plus comme unités fondamentales que les trois unités mécaniques, *l'unité de quantité d'électricité ayant été choisie de façon que le coefficient numérique* ε_0 *de la loi de Coulomb soit égal à* 1. Les formules (6) et (7) ne contiennent plus alors que les coefficients numériques 1 ou 4π, et l'on doit considérer l'unité de quantité d'électricité comme une unité dérivée, définie par la formule :

$$f = \frac{qq'}{r^2}. \tag{6'}$$

77. Système d'unités électrostatiques C. G. S. — Un système électrostatique d'unités est entièrement défini lorsqu'on a défini les unités mécaniques. Si ces unités mécaniques sont celles du système C. G. S., les unités électriques définies par la convention $\varepsilon_0 = 1$ sont les **unités électrostatiques C. G. S.** On en donnera immédiatement une définition par la simple traduction des formules ; quoique nous ayons déjà donné ces définitions, nous allons rappeler les plus importantes.

Dans la formule (6'), faisons $f = 1$ (1 dyne), $r = 1$ (1 centimètre) et $q = q'$: la formule donne alors $q = 1$. *L'unité électrostatique C. G. S. de quantité d'électricité est la quantité d'électricité qui, placée à un centimètre d'une quantité égale, la repousse avec une force d'une dyne.*

Dans la formule (1), faisons $W = 1$ (1 erg) et $q = 1$ (1 unité C. G. S.): la formule donne $V = 1$. *L'unité électrostatique C. G. S. de différence de potentiel est la différence de potentiel qui existe entre deux points, lorsque le travail des forces électriques agissant sur l'unité électrostatique C. G. S. de quantité d'électricité qui passe de l'un à l'autre de ces points est égal à un erg.*

Dans la formule (2), faisons $Q = 1$, $V = 1$, la formule donne $C = 1$. *L'unité électrostatique C. G. S. de capacité est la capacité d'un condensateur qui, chargé avec une différence de potentiel égale à l'unité électrostatique C. G. S. de différence de potentiel, porte une charge égale à l'unité électrostatique C. G. S. de quantité d'électricité.*

Dans la formule (4), faisons $f = 1$, $q = 1$: elle donne $H = 1$. *L'unité électrostatique C. G. S. de champ électrique est le champ qui, agissant sur l'unité électrostatique C. G. S. de quantité d'électricité, produit une force d'une dyne.*

78. Équations de dimensions des unités électrostatiques. — La définition d'un système d'unités comprend deux choses distinctes, le choix des formules de définition, qui établissent les relations entre les unités à définir et les unités fondamentales, puis la définition de la grandeur des unités, à partir des grandeurs choisies pour les unités fondamentales. Pour définir le système électrostatique, nous avons rappelé au paragraphe 76 les conven-

tions faites pour le choix des formules, puis, au paragraphe 77, nous avons défini les unités en choisissant pour unités de force et de longueur la dyne et le centimètre. On peut avoir à faire un changement d'unités dans lequel on conserve les mêmes conventions de définition, mais dans lequel on change la grandeur des unités fondamentales choisies. Il est alors commode, pour calculer le rapport des nouvelles unités aux anciennes, d'employer les formules symboliques dites **équations de dimensions**, qui fournissent les valeurs de ces rapports pour les unités dérivées en fonction des valeurs correspondant aux unités fondamentales.

Reprenons par exemple la formule (6′), qui nous a servi à définir l'unité de quantité d'électricité ; en y faisant $q' = q$, nous pouvons l'écrire:

$$f = \frac{q^2}{r^2}, \qquad \text{ou} \qquad q = rf^{\frac{1}{2}}.$$

Cette formule établit une relation numérique entre les trois nombres q, r et f qui mesurent, dans une certaine expérience, une charge électrique, une longueur et une force. Si nous changeons les unités employées pour les mesures, ces mêmes grandeurs seront mesurées par d'autres nombres q', r' et f' : mais, si les conventions de définition de l'unité de quantité d'électricité à partir des unités de longueur et de force ont été conservées, les nombres q', r' et f' sont liés par la même relation numérique, et l'on aura:

$$q' = r'f'^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}\left(\frac{f}{f'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le rapport q' / q des nombres qui mesurent successivement la même grandeur est égal à l'inverse du rapport des deux unités qui ont servi à la mesurer désignons par Q le rapport de la nouvelle unité de quantité d'électricité à l'ancienne ; de même, désignons par L le rapport de la nouvelle unité de longueur à l'ancienne, par F le rapport de la nouvelle unité de force à l'ancienne. On a :

$$\frac{q}{q'} = Q, \qquad \frac{r}{r'} = L, \qquad \frac{f}{f'} = F\,; \qquad Q = LF^{\frac{1}{2}}$$

Cette dernière relation est dite l'*équation de dimensions de la quantité d'électricité*. Chacune des quantités Q, L, F est le rapport de deux grandeurs de même espèce, c'est-à-dire un nombre. L'équation de dimensions est une relation entre ces nombres ; elle nous permet de calculer l'un d'entre eux en fonction des autres. Il est bien entendu qu'elle n'a pas d'autre signification ; elle est incapable de nous renseigner sur la nature d'une grandeur : par exemple, elle ne distingue pas si cette grandeur est vectorielle ou scalaire. *Sa forme dépend des conventions faites pour le choix des formules* ; si l'on change ces conventions, on trouve pour la même grandeur des dimensions différentes : nous en verrons plus tard des exemples.

L'unité de force n'est pas une unité fondamentale du système C. G. S. Elle est définie à partir des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps

par les relations $f = m\gamma$, $\gamma = v/t$ et $v = l/t$; en désignant les unités fondamentales par les symboles L, M, T, son équation de dimensions est $F = LMT^{-2}$ et celle de la ***quantité d'électricité*** devient :

$$Q = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Le champ électrique H est défini par la relation $H = f/q$; son équation de dimensions est :

$$H = LMT^{-2}.L^{-\frac{3}{2}}M^{-\frac{1}{2}}T = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Le *potentiel électrique* V peut être défini par la relation $V = q/r$; son équation de dimensions est :

$$V = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.\ L^{-1} = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

La *capacité* C est définie par la relation $C = Q/V$; son équation de dimen-

$$C = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.L^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}T = L.$$

sions est:

En dehors des changements d'unités, on peut aussi employer les équations de dimensions à vérifier l'homogénéité d'une formule. Une formule est l'expression d'une relation numérique entre les nombres qui mesurent diverses grandeurs: cette relation doit être conservée si l'on mesure les grandeurs avec un autre système d'unités, tout en conservant les relations de définition des unités dérivées à partir des unités fondamentales. Les expressions qui figurent dans les deux membres de la formule doivent être multipliées par le même rapport, elles doivent avoir mêmes dimensions. C'est ainsi que nous venons de trouver que, dans un système électrostatique, la capacité a les dimensions d'une longueur ; la capacité d'une sphère est $C = r$, le second membre représente une longueur; la capacité d'un condensateur plan est $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi e}$, et, comme ε et 4π sont des nombres, le second membre a bien les dimensions d'une longueur. De même, le champ électrique a les dimensions d'une charge électrique divisées par L^2, c'est-à-dire par les dimensions d'une surface ; il a les mêmes dimensions qu'une densité superficielle, ce qui correspond à la formule du théorème de Coulomb, $H = 4\pi\sigma$.

79. Unités pratiques. — Pour un grand nombre d'applications, les unités électrostatiques C. G. S. sont incommodes, et l'on a défini d'autres unités, qui forment le **système pratique** d'unités électriques. A vrai dire, ce système ne se rattache pas à l'électrostatique : mais son importance est telle qu'il a fini par être employé même pour les mesures électrostatiques, et nous avons déjà indiqué quelles sont les unités pratiques employées dans les mesures électrostatiques. Nous allons rassembler ici les définitions déjà données.

L'unité pratique de quantité d'électricité est le **coulomb** ; l'unité pratique de différence de potentiel est le **volt**. Nous en verrons plus loin (§§ 134 et 152) es définitions exactes ; nous les avons définies provisoirement par leurs valeurs en unités électrostatiques C. G. S. Le coulomb vaut $3.\ 10^9$ unités électrostatiques C. G. S., le volt vaut $1/300$ d'unité électrostatique C. G. S.

Les unités pratiques de travail et de capacité sont définies à partir des unités de quantité d'électricité et de différence de potentiel, par les formules (1) et (2) du paragraphe 76.

L'unité pratique de travail est le **joule.** On retrouve sa définition en faisant, dans la formule $W = QV$, $Q = 1$ coulomb et $V = 1$ volt : le joule est le travail fourni par les forces électrostatiques quand un coulomb subit une chute de potentiel d'un volt. On obtient sa valeur en unités C. G. S. en exprimant cette même relation en unités électrostatiques C. G. S. : en faisant $Q = 3.10^9$ et $V = 1/300$, la formule donne $W = 10^7$. Le joule vaut 10^7 ergs.

L'unité pratique de capacité est le **farad.** On le définit en faisant, dans la formule $Q = CV$, $Q = 1$ coulomb et $V = 1$ volt : c'est la capacité d'un condensateur qui, chargé avec une différence de potentiel de 1 volt, porte une charge de 1 coulomb. On obtient sa valeur en unités électrostatiques C. G. S. en exprimant cette même relation en unités électrostatiques C. G. S. : en faisant $Q = 3.10^9$ et $V = 1/300$, on obtient $C = 9.10^{11}$. Le farad vaut 9.10^{11} unités C. G. S.

Les quatre unités pratiques que nous venons de définir permettent d'appliquer dans le système pratique les formules (1) à (3) du paragraphe 76. Les autres relations de ce paragraphe ne peuvent être appliquées dans le système pratique qu'à condition de le rattacher à un système d'unités mécaniques. Ce rattachement peut être fait de diverses manières, dont aucune n'a été adoptée internationalement, et dont aucune n'est légale en France : nous avons déjà dit au paragraphe 23 que l'on pouvait adopter comme unités mécaniques pratiques les unités M. K. S. L'unité de force est alors le millisthène (10^5 dynes), et l'unité de champ électrique est définie, à partir de cette unité de force, par la formule (4) du paragraphe 76; on peut d'ailleurs aussi bien la définir par la formule (5), qui montre immédiatement que cette unité est le *volt par mètre.*

Le système pratique peut donc être considéré comme un système à quatre unités fondamentales : mètre, kilogramme-masse, seconde et coulomb. Nous avons déjà montré, au paragraphe 23, que le choix arbitraire de ces quatre unités fondamentales entraîne, pour la constante de la loi de Coulomb, la valeur $\varepsilon_0 = 1/9.10^9$: c'est cette valeur numérique qu'il faut introduire dans les formules (6) et (7) du paragraphe 76 si l'on y exprime les grandeurs électriques en unités pratiques, les longueurs en mètres et les forces en millisthènes.

II. — *SOURCES D'ÉLECTRICITÉ*

80. Dynamos, piles et accumulateurs. — Les expériences d'électricité statique exigent l'emploi d'une source d'électricité, c'est-à-dire d'un appareil susceptible de créer une différence de potentiel V entre les conducteurs qui constituent ses bornes, et de la maintenir lorsqu'on leur enlève de l'électricité. Dans les expériences de mesures, cette différence de potentiel doit rester constante, avec une précision aussi grande que possible.

Tous les appareils utilisés dans la pratique industrielle comme sources d'énergie électrique peuvent être employés aux expériences d'électrostatique, pourvu que la différence de potentiel qu'ils fournissent soit d'un ordre de

grandeur convenant aux expériences à réaliser. Nous nous contenterons ici d'indiquer l'existence de ces appareils, que nous étudierons plus tard, et l'ordre de grandeur des différences de potentiel qu'ils peuvent fournir.

On construit couramment des dynamos donnant des différences de potentiel continues de 500 et 1.000 volts, et même de 10.000 et 20.000 volts. On réalise facilement, à l'aide de transformateurs ou de bobines d'induction, des différences de potentiel alternatives atteignant, et même dépassant, 200.000 volts. Enfin on constitue facilement des sources à potentiel très constant par des batteries de piles, ou mieux d'accumulateurs (cf. §§ 67 et 74). Un accumulateur peut être formé de deux lames de plomb, convenablement traitées, plongées

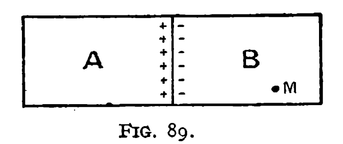


Fig. 89.

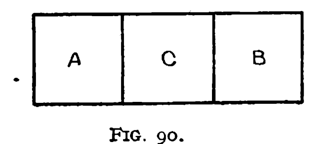


Fig. 90.

dans un tube à essai contenant de l'acide sulfurique étendu ; il donne une différence de potentiel très voisine de deux volts, et une batterie de 100 volts, composée de 50 tubes à essais contenus dans une même boîte, et isolés par de l'huile qui remplit la boîte, est relativement peu encombrante.

Nous pouvons indiquer dès maintenant le mécanisme, que nous étudierons en détail au chapitre XVII, de la production d'une différence de potentiel par une pile. Si un conducteur métallique se compose de deux parties A et B constituées par des métaux différents (*fig.* 89), l'expérience montre qu'il existe entre les deux métaux, lorsque l'équilibre électrique est réalisé, une différence de potentiel V_{AB}, qu'on appelle leur *différence de potentiel de contact.* Pour interpréter ce phénomène conformément aux hypothèses fondamentales de l'électrostatique, Helmholtz a admis qu'il se développe, de part et d'autre de la surface de séparation, une *couche double,* formée par deux couches d'électricité de densités superficielles σ et $-\sigma$, séparées par une distance e de l'ordre des dimensions de la molécule. Le champ produit par cette couche double en un point M de l'un des conducteurs métalliques est nul, mais, pour passer du conducteur A au conducteur B, il faut parcourir, entre les deux couches, une longueur e dans un champ $H = 4\pi\sigma$, et par suite subir une chute de potentiel $V_{AB} = V_A - V_B = He = 4\pi\sigma e$.

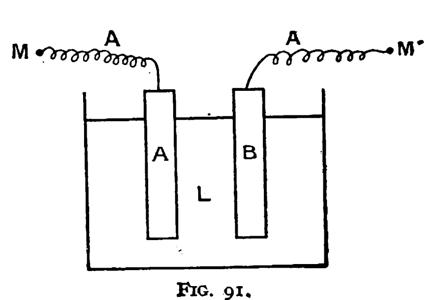


Fig. 91.

Si l'on intercale entre les métaux A et B un troisième métal C (*fig.* 90), leur différence de potentiel $V_A - V_B$ n'est pas modifiée, et reste égale à V_{AB} (*loi des chaînes métalliques,* § 173). Mais, si on les sépare (*fig.* 91) par un conducteur L liquide — un électrolyte — leur différence de potentiel $V_A - V_B = V_{AL} + V_{LB}$ n'est plus égale à V_{AB}, et la différence $V = V_A - V_B - V_{AB}$ est de l'ordre du volt. Si l'on soude aux deux conducteurs A et B deux fils d'un même métal, par exemple du métal A, la différence de potentiel entre deux

points M et M' pris sur ces deux fils est $V_M - V_{M'} = V_{AL} + V_{LB} - V_{AB} = V$. Cet appareil, dont la réalisation constitue l'œuvre capitale de Volta, est une *pile :* il établit et maintient entre ses deux pôles MM' une différence de potentiel V.

81. Machines électrostatiques à frottement. — Lorsqu'on veut obtenir une différence de potentiel continue de quelques milliers ou de quelques dizaines de milliers de volts, on redresse par une lampe-valve (§ 359) la différence de potentiel alternative produite par un transformateur (§ 447) ou par une bobine d'induction (§ 237). On n'emploie plus dans la pratique les machines électrostatiques; nous allons pourtant les décrire sommairement, car la connaissance des phénomènes qu'elles peuvent produire permettra de comprendre plus facilement comment l'étude des courants électriques se relie à celle de l'électricité statique.

Fig. 92.

La production de l'électricité dans les machines électrostatiques est due soit aux phénomènes de frottement, soit aux phénomènes d'influence.

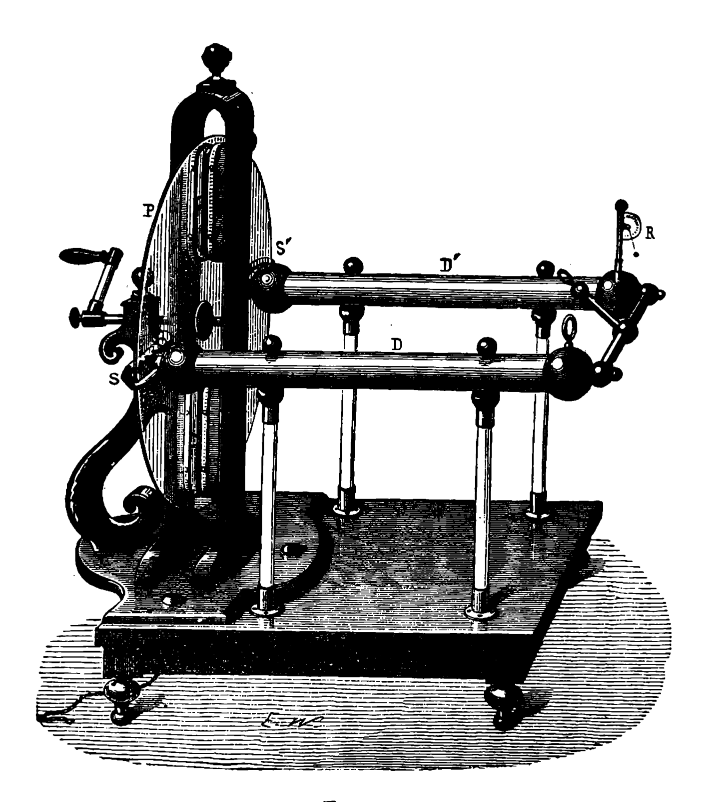


Fig. 93.

L'origine de l'électrisation par frottement semble être la différence de potentiel de contact : s'il était possible de séparer les deux métaux A et B de la figure 89 en rompant le contact simultanément sur toute l'étendue de la surface de contact, chacun d'eux emporterait la partie correspondante de la couche double, et se trouverait chargé à un potentiel élevé, comme dans l'expérience de l'électroscope condensateur (§ 53). L'expérience devient possible si l'un au moins des corps A et B est un diélectrique, sur lequel l'électricité reste où elle se trouve ; mais le frottement est alors nécessaire pour que la surface de contact ne se réduise pas à quelques points.

Supposons que le corps A soit un morceau de drap et le corps B un disque de laiton tenu par un manche isolant : si nous les frottons l'un sur l'autre, le disque de laiton s'électrise. Portons-le à l'intérieur d'un cylindre de Faraday C et faisons-lui toucher la surface intérieure : sa charge passe intégralement sur la surface extérieure, et il peut être retiré à l'état neutre. L'expérience peut être répétée indéfiniment, et rien ne limite, en théorie, la charge que peut acquérir le cylindre. Le corps B peut tout aussi bien être un disque de verre : on ne peut plus le décharger par contact dans le cylindre de Faraday, mais il suffit de garnir la surface intérieure de celui-ci de pointes (*fig.* 92), pour que l'électricité qui y est développée par influence s'écoule par des aigrettes et vienne neutraliser l'électricité positive du disque de verre. L'équilibre est réalisé quand la surface intérieure est déchargée, et tout se passe comme si la charge du disque de verre était passée à la surface extérieure du cylindre.

Les phénomènes que nous venons de décrire sont exactement ceux qui se passent dans une **machine de Ramsden** (*fig.* 93) : le *transporteur* est le plateau de verre P de la machine, le *producteur* est constitué par des coussins CC′ revêtus d'or mussif sur lesquels le plateau s'électrise par frottement ; l'électricité positive du plateau est ainsi transportée jusque sous les peignes SS′, réunis au *collecteur* DD′, qui est ici un conducteur isolé : la surface du verre est alors ramenée à l'état neutre par la décharge des pointes, et le mécanisme se reproduit sans cesse.

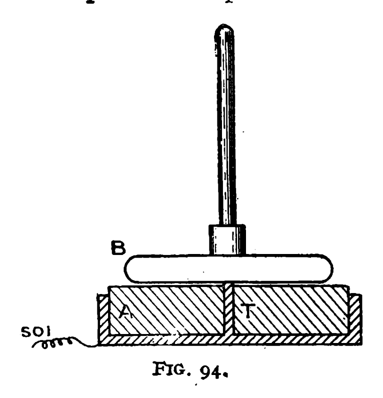


FIG. 94.

82. Machines électrostatiques à influence. — Nous prendrons comme modèle l'**électrophore.** C'est un gâteau diélectrique, par exemple de paraffine, coulé dans une boîte métallique (*fig.* 94) ; une cheville métallique T traverse le gâteau diélectrique A et dépasse légèrement sa surface. Le moule étant en relation avec le sol, on électrise la paraffine négativement en la frottant avec une peau de chat ; on pose ensuite sur le gâteau un plateau métallique B, tenu par un manche isolant, qui se trouve mis en communication avec le sol par la cheville T. Le plateau B se charge positivement par influence ; on peut l'emporter, le décharger dans un cylindre de Faraday C, et recommencer indéfiniment, puisqu'on n'a rien enlevé de la charge portée par le diélectrique A. L'expérience montre que le fonctionnement de l'électrophore est très régulier, du moins après quelques opérations.

Dans cette expérience, les différents appareils jouent le même rôle que les organes essentiels d'une machine électrostatique à frottement : A est le *producteur* ou *inducteur*, B le *transporteur* et C le *collecteur*. Il suffit, pour réaliser une machine électrostatique à influence, de répéter indéfiniment les opérations par un dispositif mécanique, tel que celui de la **machine de Tœpler** (*fig.* 95). Sur un disque circulaire de verre mobile sont collées deux feuilles d'étain BB', séparées par un intervalle isolant ; l'une des moitiés du disque se trouve en face d'un plateau A, également en verre recouvert de métal ; deux balais P et Q peuvent mettre les secteurs BB' en communication avec le sol et avec le collecteur. Supposons l'inducteur A chargé d'électricité négative, et faisons tourner le disque dans le sens indiqué par la flèche ; le transporteur B se rapproche de l'inducteur, en communiquant avec le sol par le balai P, et se charge d'électricité positive ; puis il s'éloigne, sa capacité décroît et son électricité positive s'écoule dans le collecteur par le balai Q. La charge de l'inducteur A est entretenue par une machine auxiliaire, montée sur le même arbre.

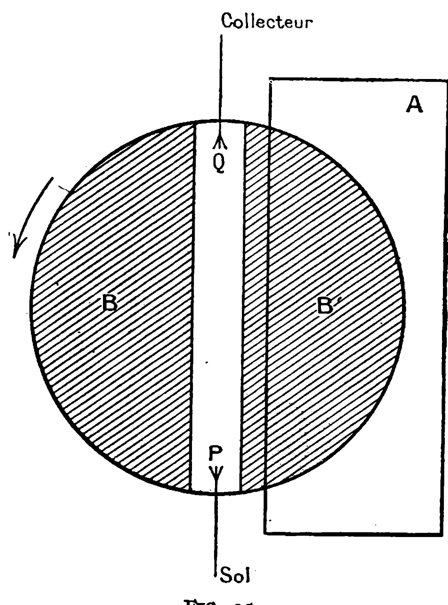


Fig. 95.

Une des machines à influence les plus répandues est la **machine de Wimshurst** (*fig.* 96). Elle se compose de deux plateaux identiques de verre verni, A et B, sur lesquels les constructeurs collent généralement des bandes de papier d'étain, et qui tournent en sens inverse. Deux conducteurs diamétraux portent à leurs extrémités des balais *aa'*, *bb'* qui frottent respectivement sur les plateaux A et B. Enfin des peignes métalliques PP' sont disposés pour recueillir l'électricité transportée par les plateaux, et communiquent avec les armatures d'un condensateur CC'.

On se rendra compte du fonctionnement de cette machine sur le schéma de la figure 97, où les deux plateaux sont représentés par des cercles inégaux. Nous supposons la machine en fonctionnement ; les flèches indiquent le sens de rotation des plateaux, et les signes indiquent la répartition et le sens des charges. L'influence du plateau A sur le conducteur diamétral *bb'* amène sur les parties du plateau B qui se trouvent sous ses balais des charges électriques, négatives en *b'*, positives en *b*. L'influence du plateau B amène de même sur le plateau A des charges, positives en *a'*, négatives en *a*. Ces charges, entraînées par la rotation, entretiennent la distribution figurée. En arrivant sous les peignes PP', les plateaux se déchargent : tous deux amènent au peigne P de l'électricité négative, et au peigne P' de l'électricité positive.

Nous avons supposé la machine amorcée : en fait, lorsqu'on réunit électriquement les peignes PP' en amenant au contact les boules MM', la machine

s'amorce d'elle-même si l'air n'est pas exceptionnellement humide, soit qu'il subsiste toujours des différences de potentiel entre les diverses parties, soit que le frottement des balais suffise à les créer.

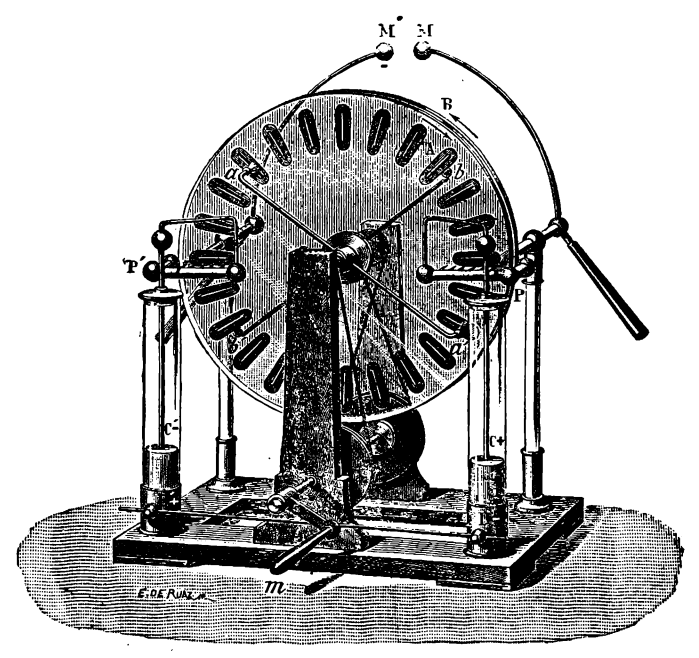


FIG. 96.

Avec les machines à influence comme avec les machines à frottement, le potentiel maximum qu'on peut obtenir est limité, soit par la déperdition, soit par les aigrettes ou les étincelles qui peuvent jaillir entre les diverses parties de la machine ; quand ce potentiel maximum est atteint, la machine fonctionne comme une véritable source d'électricité à potentiel constant. Les machines de Wimshurst ordinaires permettent d'obtenir des différences de potentiel de 100.000 volts.

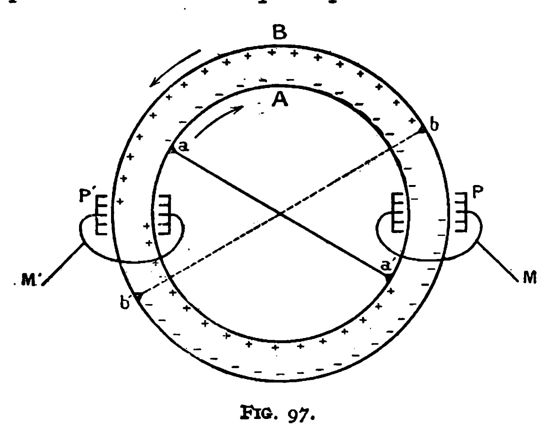


FIG. 97.

Dans les machines modernes, le transporteur est constitué par une courroie isolante (Van de Graaf) ou par des poussières isolantes entraînées par un courant d'air à l'intérieur d'un tube isolant (Pauthenier) ; il est chargé par les ions émis par des pointes ou par

des fils fins, portés, par un transformateur et un redresseur, à un potentiel de 10 à 20.000 volts, et vient se décharger à l'intérieur d'une sphère métallique, qui constitue le collecteur. Avec des collecteurs de quelques mètres de diamètre, portés par des colonnes isolantes de quelques mètres de hauteur, on atteint des potentiels de plusieurs millions de volts.

83. Débit et puissance des machines électrostatiques. — On peut étudier une machine électrostatique comme on étudie une dynamo, au point de vue du courant et de la puissance électrique qu'elle fournit. Nous allons en dire quelques mots, pour montrer cette analogie, sans insister sur les définitions, que nous donnerons d'une façon plus précise dans l'étude des courants.

Si l'on réunit les deux pôles de la machine par un conducteur de très grande résistance, par exemple une corde mouillée, ou un conducteur métallique présentant entre deux pointes ou deux faisceaux de pointes un intervalle à travers lequel jaillit une aigrette, l'électricité produite par la machine s'écoule, au fur et à mesure de sa production, à travers ce conducteur. *Ce* **courant électrique** *peut être mesuré par les procédés usuels de mesure des courants, en particulier en intercalant dans le circuit un galvanomètre, ou même, si la machine est assez puissante, un milliampèremètre de type industriel.* On obtient assez facilement des courants de l'ordre du dixième de milliampère (1); les machines de Van de Graaf et de Pauthenier, où le transporteur circule avec des vitesses de 30 et de 60 mètres par seconde, peuvent donner des courants dépassant un milliampère.

La puissance électrique, c'est-à-dire la quantité d'énergie électrique fournie par seconde, est égale au produit du courant par la différence de potentiel. Une machine électrostatique qui débite 1/10 de milliampère sous 100.000 volts fournit une puissance de 10 watts; une machine qui débite 1 milliampère sous 2.000.000 volts fournit 2 kilowatts.

Cette **énergie électrique** *provient de la transformation du travail fourni à la machine pour vaincre les forces électrostatiques.* Ces forces tendent en effet à s'opposer au déplacement du transporteur, chargé d'électricité, qui s'éloigne du producteur, chargé d'électricité de signe contraire, et s'approche du collecteur, chargé d'électricité de même signe. Le rendement de la transformation est d'ailleurs très mauvais, les frottements étant en général considérables.

Les machines électrostatiques à influence sont réversibles. Si l'on fournit de l'électricité au collecteur, une partie de cette électricité passe par les pointes sur le transporteur, et les forces électrostatiques font tourner le plateau en sens inverse de sa marche ordinaire. Le rendement est trop faible pour que cette propriété puisse être pratiquement intéressante, elle n'en conserve pas moins son importance théorique. L'expérience peut effectivement être réalisée, en accouplant deux machines dans lesquelles les frottements ne soient pas trop considérables : on actionne l'une d'elles, qui fonctionne comme générateur, la seconde reçoit le courant produit par la première, et fonctionne comme moteur. On peut dire que l'électricité a servi à réaliser un transport d'énergie.

(1) On sait qu'un ampère est un courant qui transporte un coulomb par seconde.

III. — *MESURES ÉLECTROSTATIQUES*

84. Différences de potentiel : potentiels explosifs. — Nous avons décrit au chapitre précédent les électromètres qui servent à la mesure des différences de potentiel en valeur relative ou en valeur absolue. On peut employer ces appareils à la détermination du **potentiel explosif** entre deux conducteurs, c'est-à-dire de la différence de potentiel qu'il faut établir entre eux pour qu'il jaillisse une étincelle. Il est assez mal déterminé, parce qu'il dépend d'un grand nombre de circonstances, en particulier de l'état d'humidité du gaz et de la forme des conducteurs. Nous reviendrons sur le phénomène de la décharge lorsque nous étudierons les courants dans les gaz (chap. XXXIV). Nous indiquerons simplement ici comment on détermine le potentiel explosif, par exemple entre deux sphères métalliques.

Les deux sphères A et B sont montées sur un *micromètre à étincelles* (*fig*. 98),

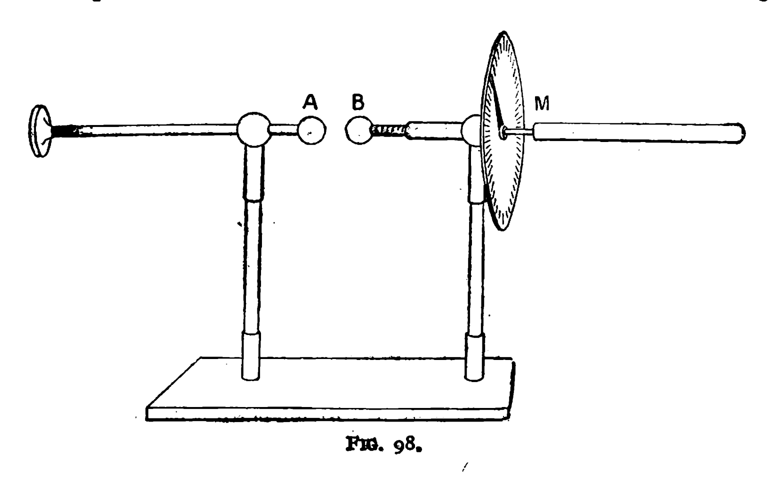


FIG. 98.

qui permet d'amener B au contact de A, puis de l'écarter à une distance d, mesurée à l'aide de la vis micrométrique M. Les deux sphères sont mises en communication, d'une part avec les deux armatures d'une batterie de bouteilles de Leyde, d'autre part avec les deux conducteurs d'un électromètre, par exemple d'un électromètre-balance ; une machine électrostatique charge la batterie. On met sur le plateau de la balance un certain poids qui correspond à un potentiel V, et on règle la distance d de façon à ce que l'équilibre de l'électromètre soit réalisé, c'est-à-dire que le fléau quitte son butoir, juste au moment où l'étincelle éclate.

Voici par exemple quelques résultats, relatifs à des sphères de 5 centimètres de diamètre :

d	=	0,6	1	2	5	10	centimètres.
V	=	20.700	32.300	58.600	106.000	142.500	volts.

On peut utiliser ces résultats pour déterminer, en première approximation, la valeur de la différence de potentiel donnée par une machine électrostatique :

il suffit de mesurer la longueur des étincelles qu'elle peut fournir. Il faut naturellement avoir soin de préciser la forme des conducteurs entre lesquels jaillit l'étincelle.

85. Mesures de capacités. — On réalise facilement un condensateur calculable en adoptant la forme du condensateur plan, à lame d'air et à anneau de garde. La mesure de sa capacité résulte de la mesure de ses dimensions ; c'est une **mesure absolue** en unités électrostatiques. La mesure d'une capacité quelconque se ramènera à la mesure du rapport de cette capacité à celle d'un condensateur calculable, ou à celle d'un condensateur préalablement étalonné.

Ces mesures relatives peuvent être effectuées à l'aide d'un électromètre, en employant par exemple le dispositif représenté par la figure 99. Au moyen d'une pile P, on charge le condensateur C à un potentiel V_0 mesuré par l'électromètre, puis, à l'aide de l'interrupteur I, qui peut être une clef de Morse, on l'isole de la pile et on le réunit à la capacité C′ ; on mesure le nouveau potentiel V_1. La charge Q du condensateur C s'est répartie sur les deux condensateurs C et C′, et l'on a :

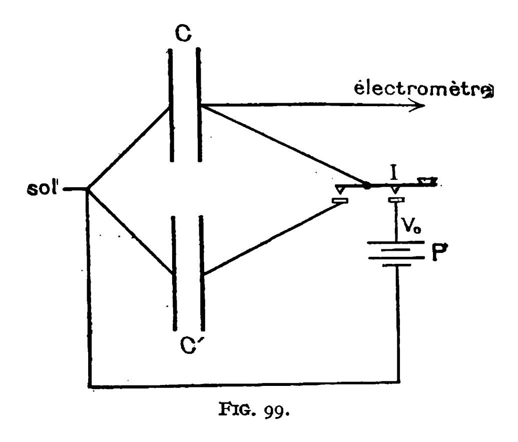


FIG. 99.

$$Q = CV_0 = (C + C')\, V_1, \qquad \frac{C'}{C} = \frac{V_0 - V_1}{V_1} = \frac{V_0}{V_1} - 1.$$

Il faut décharger parfaitement le condensateur C′ avant l'expérience, en mettant ses deux armatures en communication, éviter qu'il y ait influence des armatures de l'un des condensateurs sur celles de l'autre, et soigner l'isolement des différentes parties de l'appareil, en particulier de la clef I.

La précision obtenue dépend de celle avec laquelle l'électromètre mesure le rapport V_0 / V_1, qui, dans le cas de l'électromètre à quadrants, est le rapport des déviations ; la méthode suppose que la charge prise par l'électromètre et les fils de communication est négligeable par rapport à la charge Q, c'est-à-dire que leurs capacités sont négligeables par rapport aux capacités C et C′.

Si les capacités C et C′ sont égales, on pourra recommencer l'expérience en les intervertissant : l'égalité des déviations vérifiera l'égalité des capacités, et la précision sera plus grande, les erreurs de la graduation de l'électromètre et l'influence des capacités parasites étant ainsi éliminées. On pourra aussi employer une méthode dont le principe remonte à Cavendish : les deux condensateurs C et C′ sont chargés avec la même source, puis on les décharge l'un dans l'autre (*fig.* 100) et on mesure le potentiel final V_1 ; la charge finale Q_1

du condensateur C + C′ est la différence des charges Q et Q′ des condensateurs C et C′, et l'on a :

$$(C + C')\, V_1 = (C - C')\, V_0, \qquad \frac{C'}{C} = \frac{V_0 - V_1}{V_0 + V_1} = 1 - 2\,\frac{V_1}{V_0}.$$

La quantité mesurée V_1 / V_0 n'est qu'un terme correctif, et la méthode employée est une véritable **méthode de zéro.**

On réalise encore une méthode de zéro en employant un dispositif analogue

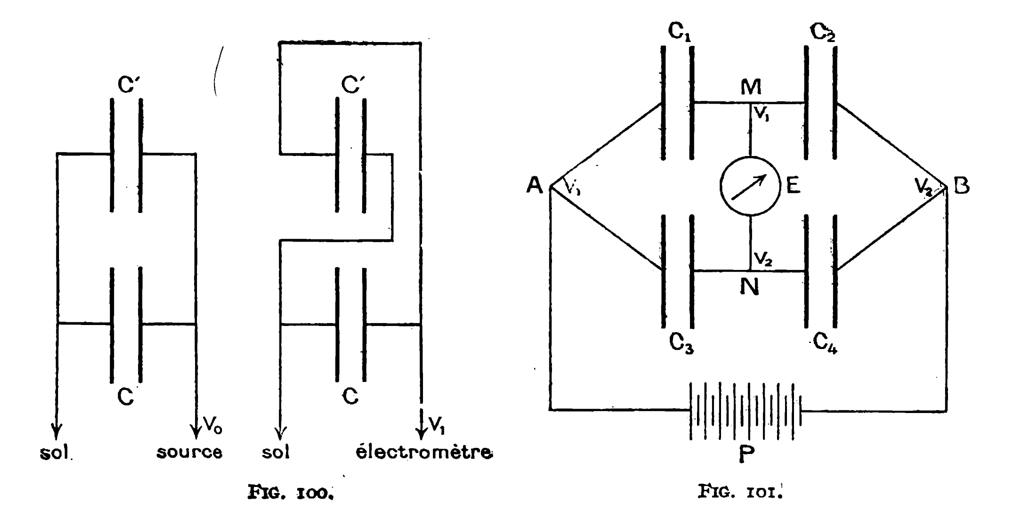


FIG. 100. FIG. 101.

au pont de Wheatstone (*fig.* 101) : quatre condensateurs sont disposés en deux cascades chargées par la même source P, qui établit entre ses pôles AB la différence de potentiel $V_1 - V_2$. On modifie les capacités de façon à ce que la différence de potentiel entre les armatures intermédiaires MN soit nulle, ce que l'on constate à l'aide de l'électromètre E. Les potentiels v_1 et v_2 des points M et N sont donnés par les équations :

$$C_1 (V_1 - v_1) = C_2 (v_1 - V_2), \qquad C_3 (V_1 - v_2) = C_4 (v_2 - V_2).$$

S'ils sont égaux ($v_2 = v_1$), on obtient, en divisant ces équations membre à membre :

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}.$$

Cette méthode peut être extrêmement précise, si l'électromètre permet d'apprécier une différence de potentiel $v_1 - v_2$ très faible, et si l'on peut appliquer aux condensateurs des différences de potentiel $V_1 - V_2$ assez grandes.

Elle exige que l'une au moins des trois capacités de comparaison puisse être modifiée, de façon à réaliser l'équilibre du pont. On se contente quelquefois d'employer une des boîtes de capacités décrites au paragraphe 57, qui permettent de faire varier la capacité de millième en millième de 0,001 à 1 microfarad ; on peut d'ailleurs interpoler entre les deux valeurs de la capacité les

plus rapprochées, par défaut et par excès, de celle qui réaliserait l'équilibre, en mesurant les déviations, de signes contraires, qu'elles donnent à l'électromètre.

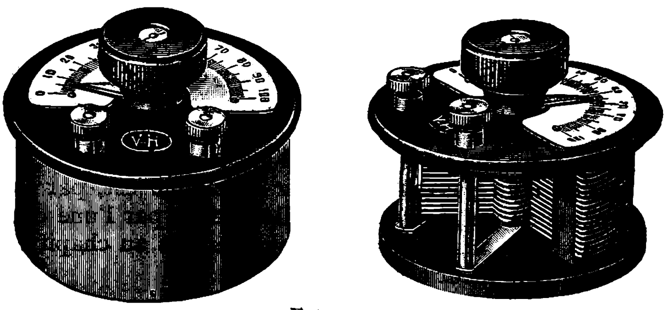


FIG. 102.

Il est plus commode d'employer un **condensateur variable**, tel que celui qui est représenté par la figure 102 : les variations de la capacité y sont continues ; elles sont dues aux variations de la surface en regard des armatures, produites par une rotation qu'on commande par un bouton isolant d'ébonite et qu'on repère par le déplacement d'un index sur une graduation. L'appareil est étalonné par comparaison avec d'autres capacités ; sa capacité totale peut atteindre 5 millièmes de microfarad.

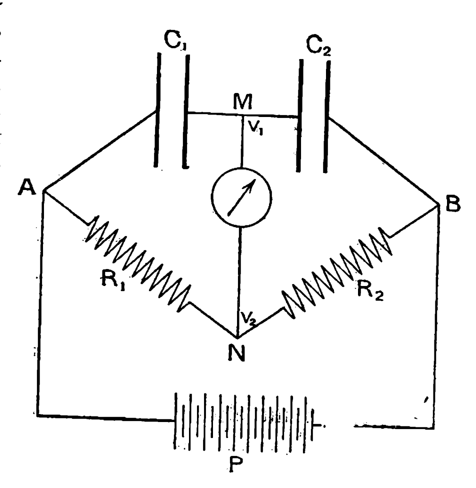


FIG. 103.

On peut modifier la méthode de açon à supprimer deux des capacités de comparaison, parmi lesquelles la capacité variable ; on remplace l'une des cascades par deux résistances en série R_1, R_2 (*fig.* 103). La loi d'Ohm permet alors de calculer la valeur du potentiel v_2 : on a :

$$C_1 (V_1 - v_1) = C_2 (v_1 - V_2) \quad \text{et} \quad \frac{V_1 - v_2}{R_1} = \frac{v_2 - V_2}{R_2};$$

l'équilibre du pont est réalisé ($v_1 = v_2$) quand :

$$C_1R_1 = C_2R_2.$$

On ramène ainsi la mesure du rapport de deux capacités à celle du rapport de deux résistances.

En réalité, on emploie les méthodes de pont en prenant pour $V_1 - V_2$ une différence de potentiel alternative, et en remplaçant l'électromètre par un téléphone ou un galvanomètre à vibration, qui permettent d'apprécier des différences de potentiel $v_1 - v_2$ beaucoup plus faibles (cf. § 300).

Signalons en passant que l'emploi des courants alternatifs de haute fréquence (ou oscillations électriques entretenues) permet, en comparant les périodes propres de deux circuits, de comparer deux capacités entre elles avec une précision de l'ordre du millionième, bien supérieure à celle que peuvent donner les méthodes précédentes (voir § 321).

Des montages analogues peuvent être employés pour les **mesures de coefficients d'influence** ; on se rendra facilement compte, en supposant $v_1 = v_2 = 0$, que dans le montage de la figure 103 on mesure en réalité le rapport des coefficients d'influence des conducteurs A et B sur le conducteur M.

Enfin la **mesure d'un pouvoir inducteur spécifique** est, par définition, la mesure du rapport de deux capacités ; elle se fera par l'une ou l'autre des méthodes que nous venons de décrire. Nous verrons au chapitre XX (§ 209) dans quel cas cette grandeur a un sens défini.

86. Mesure des charges. — Nous avons déjà indiqué au paragraphe 32 comment on peut mesurer une charge en adjoignant à l'électromètre un cylindre de Faraday, dans lequel on apporte la charge à mesurer. On peut employer à

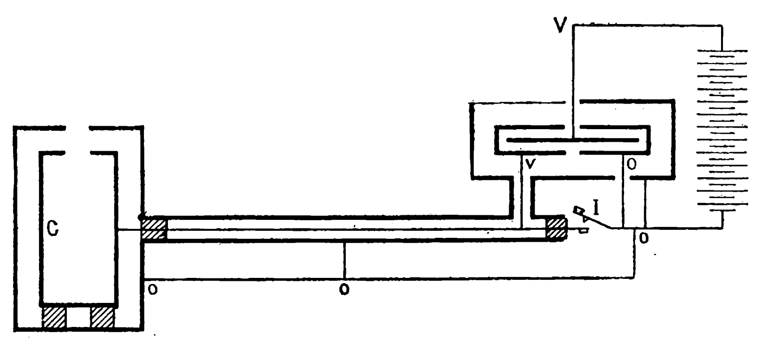


FIG. 104.

cette mesure un électromètre quelconque, par exemple un électromètre à quadrants. L'aiguille est chargée au potentiel auxiliaire V ; une des paires de quadrants est réunie au sol, l'autre est réunie au cylindre de Faraday C ; le conducteur ainsi formé peut être réuni au sol ou isolé par le jeu de l'interrupteur I (*fig.* 104). Sa charge Q est une fonction linéaire de son potentiel v et du potentiel V de l'aiguille : on a $Q = Cv - C'V$; au moment où l'on coupe la communication en I, on a $v = 0$, et la charge est $Q_0 = - C'V$. Si on apporte alors dans le cylindre une charge q, la charge du conducteur isolé devient $Q_0 + q$, son potentiel devient v et on a : $Q_0 + q = Cv - C'V$, d'où $v = q / C$; ce potentiel v est mesuré par l'électromètre, dont la déviation est par suite proportionnelle à la charge q.

Si la capacité C de l'ensemble de l'électromètre et du cylindre de Faraday est de l'ordre de 100 unités électrostatiques, et si un déplacement du spot de 1 millimètre sur l'échelle correspond à une différence de potentiel $v = 1/1.000$ de volt, il correspond à une charge $q = Cv = \frac{100}{9 \cdot 10^{11}} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 1,1 \cdot 10^{-13}$ coulomb $= 3,3 \cdot 10^{-4}$ unités électrostatiques. On a une sensibilité du même ordre

en employant un électroscope à montage hétérostatique, dont la sensibilité aux différences de potentiel est moins grande, mais dont la capacité peut être plus petite.

Il est nécessaire, dans ces mesures, de protéger avec le plus grand soin le conducteur isolé contre l'influence de tout autre conducteur, en l'entourant complètement, y compris les fils de connexions, d'une enceinte métallique reliée au sol (cf. § 41) : si cette précaution a été négligée, si par exemple le cylindre de Faraday n'est pas protégé, il suffit d'en approcher la main pour faire varier la capacité C, et par suite la déviation.

Nous avons supposé les coefficients C et C′ constants : en réalité, leur valeur dépend de la position de l'aiguille de l'électromètre. Dans le cas de l'électromètre à feuille d'or, on peut négliger leurs variations, qui sont petites devant la capacité du cylindre de Faraday ; mais il n'en est plus de même dans le cas de l'électromètre à quadrants ; tant que la déviation, et le potentiel v, restent faibles, on peut négliger les variations de C ; mais on ne peut pas négliger celles de C′, qui sont multipliées, dans la relation qui donne la charge Q, par un potentiel V, constant et grand par rapport à v. On peut toutefois remarquer qu'elles sont proportionnelles aux déviations, et que, par suite, la déviation est encore proportionnelle à la charge q ; mais l'étalonnage de l'appareil pour la mesure des charges ne peut pas être déduit de son étalonnage pour la mesure des potentiels.

On s'affranchit de ces difficultés en employant une **méthode de zéro.** On réunit par exemple le conducteur isolé à l'une des armatures d'un condensateur variable étalonné ; l'autre est portée à un potentiel fixe V′. Si Γ est la capacité de ce condensateur, la charge totale du conducteur isolé est $Q = -\Gamma V' + Cv - C'V$; le coefficient C varie d'ailleurs avec Γ, le coefficient C′ a une valeur constante tant que l'aiguille reste fixe. Soient Γ_0 et Q_0 les valeurs de Γ et Q au moment où l'on isole le conducteur par le jeu de l'interrupteur I ; on a, à ce moment, $v = 0$ et $Q_0 = -\Gamma_0 V' - C'V$.

Apportons la charge q dans le cylindre, puis modifions la capacité Γ jusqu'à ce que l'aiguille de l'électromètre revienne au zéro ; soit Γ_1 sa nouvelle valeur : on a à nouveau $v = 0$, donc :

$$Q_0 + q = -\Gamma_1 V' - C'V, \qquad \text{d'où} \qquad q = (\Gamma_0 - \Gamma_1) V'.$$

87. Mesure des courants. — Supposons que des charges électriques arrivent de façon continue dans le cylindre C et que nous voulions mesurer le courant ainsi produit : c'est le problème que nous rencontrerons constamment dans l'étude des courants à travers les gaz.

Nous pouvons nous contenter d'observer la déviation de l'aiguille de l'électromètre. Pendant un temps t, à partir de l'instant où on a isolé le conducteur formé par le cylindre et la paire de quadrants à laquelle il est relié, ce conducteur reçoit une charge $q = it$; sa déviation α à l'instant t est proportionnelle à q, et sa vitesse de déviation α / t est proportionnelle au courant i. La mesure de la vitesse de déviation donne la mesure du courant en valeur relative. Reprenons l'exemple donné au paragraphe précédent, où une déviation du spot de 1 millimètre correspond à une charge de 10^{-13} coulomb, et supposons qu'on puisse observer un déplacement de 1 millimètre en 10 secondes : on pourra mettre en évidence un courant de 10^{-14} ampère. On a réalisé des montages dans les-

quels l'isolement et la protection électrostatique étaient suffisants pour qu'on puisse observer avec sécurité des déplacements de 1 centimètre à l'heure, correspondant, avec une sensibilité de 2 millimètres par millivolt, à des courants de l'ordre de 10^{-16} ampère. Les électromètres, en particulier l'électromètre à quadrants, ou l'électroscope à feuille d'or avec montage hétérostatique, sont beaucoup plus sensibles pour la mesure des petits courants que les galvanomètres, qui ne permettent guère de dépasser pratiquement 10^{-11} ampère.

Ici encore il est préférable, du moins pour la mesure des courants qui ne sont pas trop faibles, d'employer une méthode de zéro ; outre les avantages indiqués à propos de la mesure des charges, on a celui de ne pas avoir à tenir compte de l'inertie de l'aiguille en mouvement. On emploiera par exemple le montage du condensateur variable décrit au paragraphe précédent ; on déplacera lentement l'armature mobile de façon à maintenir constamment le spot au zéro, et on mesurera le temps t qu'on emploie à la déplacer d'une position extrême à l'autre. Si Γ_0 et Γ_1 sont les valeurs des capacités correspondantes, la valeur du courant est $i = \frac{(\Gamma_0 - \Gamma_1) V'}{t}$; on choisira la capacité du condensateur et le potentiel V′ suivant le courant à mesurer : les valeurs de Γ_0 et Γ_1 peuvent aller, suivant la construction réalisée, de quelques unités électrostatiques à quelques millièmes de microfarad. Avec ce montage, les mesures relatives de courants se ramènent à des mesures de temps, et on obtient des mesures absolues, en unités électrostatiques, si le condensateur variable est calculable ou étalonné.

On peut aussi réaliser un montage dans lequel l'électromètre prend une déviation permanente, proportionnelle au courant i à mesurer. Il suffit de réunir au sol, par l'intermédiaire d'une grande résistance R, le conducteur formé par le cylindre de Faraday et la paire de quadrants à laquelle il est relié : l'équilibre est atteint lorsque ce conducteur a pris un potentiel v tel que le courant $i = v/R$ qui s'écoule par la résistance est égal au courant amené dans le cylindre. Ce montage est couramment employé pour la mesure des courants des cellules photoélectriques (§ 355), en remplaçant l'électromètre par un amplificateur à lampes (§ 361) dans lequel les variations du courant de plaque de la dernière lampe sont proportionnelles aux variations du potentiel v appliqué à la grille de la première lampe. Il est facile de construire un amplificateur permettant d'apprécier une différence de potentiel v de 10^{-4} volt : avec une résistance $R = 10^{10}$ ohms, on pourra mesurer un courant $i = 10^{-14}$ ampère ; en soignant particulièrement l'isolement et la protection électrostatique, on peut augmenter l'amplification et augmenter la résistance R, et arriver à 10^{-16} ampère.

DEUXIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE IX

HYPOTHÈSES ET LOIS FONDAMENTALES

I. — *HYPOTHÈSES FONDAMENTALES*

88. Masse magnétique et champ magnétique. — Nous rappellerons très sommairement les faits fondamentaux du magnétisme : on sait qu'il existe dans la nature des substances dites **aimants naturels,** et qu'on fabrique, généralement en soumettant des barreaux d'acier à l'action du champ magnétique d'un courant électrique, des **aimants artificiels.** Les aimants présentent la propriété d'attirer la limaille de fer ; en général, un barreau aimanté est fabriqué de telle sorte que cette propriété se manifeste presque uniquement au voisinage de ses extrémités, qu'on appelle les **pôles** de l'aimant. Les deux extrémités ne sont pas identiques : si l'on suspend un aimant par son centre de gravité, loin de tout autre aimant ou de toute autre substance magnétique, l'une de ses extrémités se dirige vers le Nord. On l'appelle le **pôle Nord** de l'aimant, l'autre est le **pôle Sud.** En approchant l'un de l'autre deux aimants, on constate que *deux pôles de même nom se repoussent,* que *deux pôles de noms contraires s'attirent.*

Si l'on approche d'un aimant, ou si l'on place dans une bobine parcourue par un courant électrique, un barreau de fer doux, ce barreau acquiert les propriétés d'un aimant : son aimantation est alors dite **aimantation induite ;** elle disparaît lorsqu'on enlève l'aimant ou qu'on interrompt le courant dans la bobine. Si l'on répète l'expérience en remplaçant le barreau de fer doux par un barreau d'acier trempé, ce barreau reste aimanté, il conserve une **aimantation rémanente.**

Nous admettrons (cf. §§ 99 et 111), par analogie avec ce que nous avons admis en pesanteur et en électrostatique, qu'*on peut calculer les forces qui s'exercent sur un aimant en supposant qu'il existe, réparties aux différents points de la surface ou de l'intérieur de l'aimant, des* **masses magnétiques** *positives et négatives, que chaque point de l'espace où l'aimant est soumis à des forces est caractérisé par un certain vecteur, que nous appellerons le* **champ ma-**

gnétique *en ce point, et que la force* $\vec{F}$ *qui s'exerce sur une masse magnétique* m, *placée en un point où le champ est* $\vec{H}$, *est donnée par la relation vectorielle :*

$$\vec{F} = m\vec{H}.$$

La direction du vecteur $\vec{H}$ est la direction du champ magnétique ; sa grandeur est l'intensité du champ magnétique.

La force et le couple qui s'exercent sur un aimant s'obtiendront par la réduction à une force et un couple du système des forces qui s'exercent sur toutes les masses magnétiques positives ou négatives réparties à l'intérieur de cet aimant.

C'est ainsi que nous expliquerons l'orientation d'un aimant dans le champ magnétique terrestre en admettant qu'au voisinage des deux pôles de l'aimant se trouvent des masses magnétiques de signes contraires, sur lesquelles le champ terrestre produit des forces de directions opposées. Nous conviendrons de représenter le champ magnétique terrestre dans nos régions par un vecteur dirigé vers le Nord, c'est-à-dire de considérer comme positives les masses magnétiques situées au voisinage du pôle Nord d'un aimant.

89. Loi de Coulomb. — Pour calculer les actions exercées par deux aimants l'un sur l'autre, nous admettrons, comme en électrostatique, la **loi de Coulomb :** *deux masses magnétiques ponctuelles* m *et* m' *exercent l'une sur l'autre deux forces égales et opposées, dirigées suivant la droite qui les joint, et inversement proportionnelles au carré de la distance* r *qui les sépare.* Comme en électrostatique, la loi de Coulomb, combinée à l'hypothèse fondamentale de l'existence des masses magnétiques, s'exprime par la formule :

$$F = \frac{1}{\mu_0} \frac{mm'}{r^2}.$$

Le coefficient μ_0 est, par hypothèse, indépendant de la nature du milieu; sa valeur est entièrement déterminée par le choix des unités de longueur, de force et de masse magnétique. Inversement, si, une fois les unités mécaniques choisies, on se donne sa valeur numérique, on détermine par là la masse magnétique que l'on doit choisir pour *unité de masse magnétique.*

La formule fondamentale $F = m H$ permet alors de définir l'*unité de champ magnétique.* Combinée à l'expression de la loi de Coulomb, elle donne pour le champ H créé à une distance r par une masse magnétique m la valeur :

$$H = \frac{1}{\mu_0} \frac{m}{r^2}.$$

Le champ magnétique produit par des aimants permanents est un champ newtonien et les masses agissantes qui créent ce champ newtonien sont proportionnelles aux masses magnétiques. Donc :

Le champ magnétique dérive d'un potentiel V, et on peut prendre pour expression du potentiel du champ créé par un système de masses magnétiques m :

$$V = \frac{1}{\mu_0} \sum \frac{m}{r}.$$

Le flux de force du vecteur champ magnétique est conservatif dans toute région de l'espace qui ne contient pas de masses magnétiques. En dehors de la matière aimantée, on a :

$$\text{div}\,\vec{H} = 0, \quad \Delta V = 0.$$

Si l'on convient de choisir le coefficient μ_0 égal à 1, les unités définies par les règles que nous venons d'énoncer s'appellent des **unités électromagnétiques.** Lorsqu'on emploie un tel système d'unités, les formules exprimant la loi de Coulomb, le champ et le potentiel créés par une masse m à une distance r, sont :

$$f = \frac{mm'}{r^2}, \qquad H = \frac{m}{r^2}, \qquad V = \frac{m}{r}.$$

Si les unités mécaniques sont les unités C. G. S., les unités magnétiques ainsi définies sont les **unités électromagnétiques C. G. S.** (cf. § 106). *L'unité électromagnétique C. G. S. de champ magnétique* s'appelle le **gauss.**

La distribution du champ magnétique dans l'espace peut être représentée, soit par les surfaces équipotentielles, soit par les lignes de force du champ. Cette dernière représentation peut être matérialisée par l'expérience bien connue des **spectres magnétiques.** On fait tomber de la limaille de fer au moyen d'un tamis sur un carton horizontal, et on imprime de petites secousses au carton : les grains de limaille se groupent de façon à dessiner les lignes de force du champ magnétique (*fig.* 105). Nous ne pourrons donner que beaucoup plus loin l'interprétation de cette expérience (§ 194) ; nous l'emploierons néanmoins, d'une façon purement empirique, à l'étude des champs magnétiques.

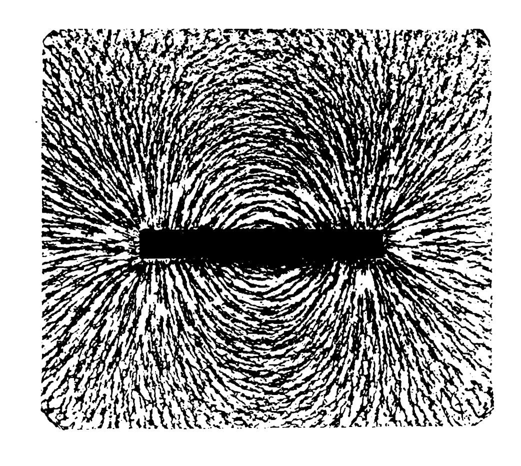


Fig. 105.

90. Répartition des masses magnétiques dans un aimant. — Les hypothèses fondamentales ont été complétées, en électrostatique, par l'hypothèse de définition des conducteurs et par celle de la conservation de l'électricité. Il n'existe, pour le magnétisme, aucun phénomène comparable à ceux que présentent les conducteurs électriques ; il n'y aura aucun théorème analogue à celui des écrans électriques. Mais nous compléterons les hypothèses fondamentales par l'hypothèse que *la masse magnétique totale d'un aimant quelconque est nulle,* c'est-à-dire que les masses magnétiques positives et négatives dont nous supposons l'existence pour interpréter les phénomènes s'y trouvent en quantités égales.

On remarquera qu'il résulte de cette hypothèse, et du théorème de Gauss, que le *flux de force du champ magnétique à travers une surface fermée quelconque qui ne coupe pas de matière aimantée est nul, même s'il y a des aimants à l'intérieur de la surface.*

L'existence des phénomènes d'aimantation induite montre que la valeur et la répartition des masses magnétiques dans un morceau de fer aimanté dépendent du champ magnétique auquel ce morceau de fer est soumis. Nous négligerons pour le moment ces phénomènes, et nous supposerons l'aimantation rigide, c'est-à-dire la distribution des masses magnétiques parfaitement déterminée, et indépendante de la position de l'aimant et du champ auquel il est soumis. Les résultats obtenus s'appliqueront à des aimants présentant une aimantation permanente assez forte, et placés dans des champs magnétiques assez faibles pour que l'aimantation induite soit négligeable par rapport à l'aimantation permanente. Ils s'appliqueront aussi à des aimants quelconques, tant qu'on ne modifiera pas leur position, ou le champ auquel ils sont soumis ; ils permettront de calculer les forces qui s'exercent entre eux, si l'on connaît la répartition des masses magnétiques qui correspond à cette position ou à ce champ.

II. — *ACTION D'UN CHAMP UNIFORME SUR UN AIMANT*

91. Orientation d'un aimant dans un champ uniforme. — Plaçons un aimant dans un champ magnétique uniforme, c'est-à-dire dans un champ dont la direction, et par suite aussi la grandeur (§ 8) sont constantes. Si nous désignons par $\vec{H}$ le vecteur champ, chacune des masses magnétiques m de l'aimant est soumise à une force $\vec{f} = m\vec{H}$ parallèle au vecteur $\vec{H}$. Formons la résultante de toutes les forces f appliquées à toutes les masses magnétiques positives : nous obtenons une certaine force $\vec{F} = \vec{H}\Sigma m$, parallèle au champ $\vec{H}$ et de même sens, appliquée en un point N, qui est le centre de gravité des masses positives (*fig.* 106) et dont la position est indépendante du champ $\vec{H}$ considéré.

FIG. 106.

De même la résultante des forces appliquées à toutes les masses négatives est une force $\vec{F'} = -\vec{H}\Sigma m$, parallèle au champ $\vec{H}$ et de sens opposé, appliquée en un point S dont la position ne dépend pas du champ $\vec{H}$. Les forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ sont égales en valeur absolue, d'après l'hypothèse faite que la masse magnétique totale de l'aimant est nulle : *elles forment donc un couple* C.

Si l'aimant peut tourner librement autour d'un axe qui ne soit pas situé dans le plan du couple C, il s'oriente sous l'action de ce couple. Si l'aimant peut tourner en tous sens autour d'un point fixe G, ce qu'on réalise en le suspendant

par son centre de gravité, il s'oriente de façon que le vecteur $\overrightarrow{SN}$ soit parallèle au champ $\vec{H}$ (*fig.* 107). Cette propriété permet de vérifier expérimentalement qu'un champ magnétique est uniforme, en vérifiant qu'un aimant suspendu aux différents points de ce champ y prend des directions parallèles. Nous reviendrons, au chapitre suivant, sur la détermination expérimentale de la direction d'un champ magnétique ; nous indiquerons simplement ici que l'expérience montre que le champ magnétique terrestre est uniforme, dans une étendue, petite par rapport au rayon de la Terre, mais considérable par rapport aux dimensions des aimants dont on fait usage ; nous verrons plus tard qu'on peut également réaliser un champ magnétique uniforme à l'intérieur d'une bobine parcourue par un courant électrique.

Fig. 107.

On peut obtenir une première vérification des hypothèses fondamentales en vérifiant expérimentalement que le système des forces magnétiques exercées par le champ terrestre sur un aimant se réduit bien à un couple. On montre que la composante verticale de la résultante est nulle en vérifiant par des pesées que le poids d'un barreau d'acier est le même avant et après l'aimantation ; on montre que la composante horizontale est nulle en montrant qu'un fil auquel on suspend un aimant n'est pas dévié de la verticale.

92. Moment magnétique d'un aimant. — Le problème de l'action du champ uniforme $\vec{H}$ sur l'aimant est résolu quand on connaît les points N et S et la quantité Σm ; nous appellerons *pôles* de l'aimant les points N et S, et *longueur* de l'aimant la distance l de ces points ; nous désignerons par $\vec{l}$ le vecteur $\overrightarrow{SN}$. Nous appellerons **moment magnétique** $\vec{M}$ de l'aimant un vecteur parallèle au vecteur $\vec{l}$, dirigé du pôle Sud vers le pôle Nord, et dont la grandeur est le produit de la longueur l par la quantité Σm ; on a :

$$\vec{M} = \vec{l}\,\Sigma m.$$

Le vecteur $\vec{M}$ est lié à l'aimant ; il tourne avec lui, et l'aimant est en équilibre dans un champ uniforme $\vec{H}$ lorsque le vecteur $\vec{M}$ est parallèle au vecteur $\vec{H}$.

Analytiquement, le vecteur $\vec{M}$ est défini, par rapport à trois axes de coordonnées, par ses projections M_x, M_y, M_z. Si nous désignons par $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, les coordonnées des points N et S, on a :

$$M_x = (\xi - \xi')\,\Sigma m, \qquad M_y = (\eta - \eta')\,\Sigma m, \qquad M_z = (\zeta - \zeta')\,\Sigma m.$$

Si x, y, z sont les coordonnées du point où se trouve la masse magnétique positive m, x', y', z' celles du point où se trouve la masse magnétique négative m' ($\Sigma m' = -\Sigma m$), les coordonnées des centres de gravité N et S de ces masses sont définies par :

$$\xi\,\Sigma m = \Sigma mx, \qquad \eta\,\Sigma m = \Sigma my, \qquad \zeta\,\Sigma m = \Sigma mz;$$
$$-\xi'\,\Sigma m = \Sigma m'x', \qquad -\eta'\,\Sigma m = \Sigma m'y', \qquad -\zeta'\,\Sigma m = \Sigma m'z';$$

et l'on a :

$$M_x = \Sigma mx + \Sigma m'x', \qquad M_y = \Sigma my + \Sigma m'y', \qquad M_z = \Sigma mz + \Sigma m'z'.$$

Supposons que l'aimant de moment magnétique $\vec{M}$ soit formé de plusieurs parties, qui soient des aimants de moments magnétiques $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$,... L'une des sommes, telles que Σmx, relative à l'aimant total, est la somme des termes $\Sigma m_1 x + \Sigma m_2 x$... relatifs aux diverses parties. L'une des composantes M_x du moment magnétique de l'aimant total est la somme des composantes $M_{1x} + M_{2x}$..., des moments magnétiques des diverses parties. *Le moment magnétique $\vec{M}$ d'un aimant composé de plusieurs autres aimants est donc égal à la somme géométrique des moments magnétiques des aimants composants* :

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Dans certains appareils, on utilise un système formé de deux aimants égaux fixés sur le même équipage et disposés en sens inverse (*fig.* 108) : son moment magnétique total est nul, et il est en équilibre dans un champ uniforme, par exemple dans le champ terrestre, quelle que soit son orientation. Un tel système est appelé **un système astatique.** Quand les grandeurs M_1 et M_2 des deux moments magnétiques sont égales, et qu'on cherche à régler la disposition des deux aimants en tournant l'un d'eux par rapport à l'autre, on constate que, au voisinage du parallélisme, le système se met en croix avec le champ terrestre, et se retourne face pour face lorsque l'angle α des deux aimants change de sens : il suffit de construire la résultante $\vec{M}$ des deux vecteurs $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ (*fig.* 109) pour expliquer ce phénomène.

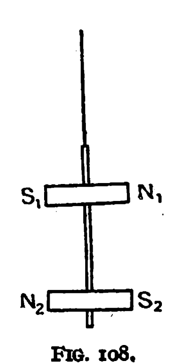


FIG. 108.

La définition du moment magnétique s'applique à un aimant de forme et d'aimantation quelconques. On utilise le plus souvent comme aimants des barreaux dont la longueur est grande par rapport à la section, et dont l'aimantation est telle que seules les extrémités paraissent

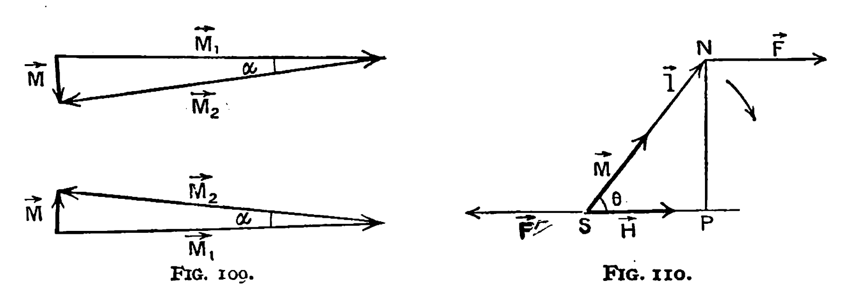


FIG. 109. FIG. 110.

présenter des propriétés magnétiques, par exemple jouissent seules de la propriété d'attirer la limaille de fer. On peut alors, en première approximation, admettre que les masses magnétiques sont localisées aux extrémités

confondre les points N et S avec ces extrémités, et leur distance l avec la longueur du barreau.

93. Calcul du couple exercé par un champ uniforme sur un aimant. — Supposons que le vecteur $\vec{l} = \vec{SN}$ fasse un angle θ avec le vecteur $\vec{H}$ (*fig.* 110). Le moment du couple formé par les deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ est, en valeur absolue :

$$C = F \cdot NP = F \cdot l \sin\theta = H \Sigma m \cdot l \sin\theta = MH \sin\theta.$$

Il tend à faire tourner l'aimant dans le sens qui amène le vecteur $\vec{M}$ sur le vecteur $\vec{H}$.

On sait qu'on représente un couple par un vecteur $\vec{C}$ perpendiculaire au plan du couple, dont la grandeur est égale au moment du couple, et dont le sens est lié par une convention arbitraire au sens de la rotation que produit le couple. Si l'on représente analytiquement les phénomènes par rapport à un trièdre de coordonnées $Oxyz$, le sens du vecteur $\vec{C}$ est au sens de la rotation ce que le sens positif d'un axe Oz est au sens positif de la rotation dans le plan de coordonnées correspondant, c'est-à-dire au sens de la rotation qui amène Ox sur Oy. Dans le cas que nous considérons, cela revient à dire que le trièdre formé par les trois vecteurs $\vec{M}, \vec{H}, \vec{C}$ est direct, c'est-à-dire de même sens que le trièdre des axes $Oxyz$ (*fig.* 111).

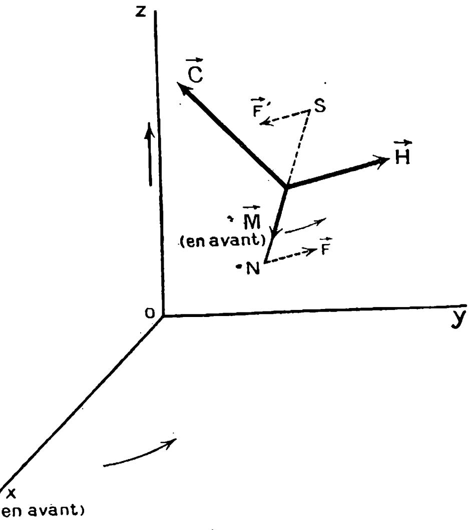


FIG. 111.

On sait qu'on appelle **produit vectoriel** d'un vecteur $\vec{M}$ par un vecteur $\vec{H}$, un troisième vecteur $\vec{C}$, perpendiculaire au plan des vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{H}$, de sens tel que le trièdre $\vec{M}$, $\vec{H}$, $\vec{C}$ soit direct, et de grandeur MH sin θ, égale à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{H}$. Cette définition est précisément celle que nous venons de donner pour le couple magnétique $\vec{C}$; nous écrirons :

$$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H}.$$

Il faut remarquer que, dans cette notation symbolique, l'ordre des deux facteurs $\vec{M}$ et $\vec{H}$ n'est pas indifférent : le sens de rotation de $\vec{M}$ vers $\vec{H}$ et celui de $\vec{H}$ vers $\vec{M}$ sont opposés et les deux vecteurs $\vec{M} \wedge \vec{H}$ et $\vec{H} \wedge \vec{M}$ sont opposés.

Si les vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{H}$ sont donnés analytiquement par leurs projections M_x, M_y, M_z, H_x, H_y, H_z sur trois axes rectangulaires, on exprimera le produit vectoriel à l'aide des formules qui donnent les valeurs algébriques des projections sur les trois plans de coordonnées de l'aire du parallélogramme $\vec{M}.\vec{H}$. On obtient les composantes C_x, C_y, C_z du vecteur $\vec{C}$ suivant les trois axes, c'est-à-dire les moments du couple par rapport à ces trois axes, par les formules :

$$C_x = M_yH_z - M_zH_y, \qquad C_y = M_zH_x - M_xH_z, \qquad C_z = M_xH_y - M_yH_x$$

Ce sont ces trois équations qui sont résumées par l'équation symbolique $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H}$. Elles mettent en évidence le fait que le moment C_z du couple par rapport à un axe Oz ne dépend que des composantes M_x, M_y, H_x, H_y du moment et du champ situées dans le plan xOy perpendiculaire à cet axe. Elles mettent aussi en évidence, par leur forme linéaire par rapport aux quantités M_x, M_y, M_z d'une part, H_x, H_y, H_z d'autre part, que si l'un ou l'autre des vecteurs $\vec{M}$ ou $\vec{H}$ est la résultante de plusieurs autres vecteurs, le couple résultant est égal à la somme géométrique des couples composants.

$$\overrightarrow{(M_1 + M_2)} \wedge \vec{H} = \vec{M}_1 \wedge \vec{H} + \vec{M}_2 \wedge \vec{H}; \qquad \vec{M} \wedge \overrightarrow{(H_1 + H_2)} = \vec{M} \wedge \vec{H}_1 + \vec{M} \wedge \vec{H}_2.$$

La relation que nous venons d'établir, $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H}$, ne dépend pas du sens du trièdre des axes. Toutefois nous conviendrons dès maintenant d'adopter le sens qui nous sera le plus commode pour l'expression des lois de l'électromagnétisme, et qui est celui que représente la figure 111. On peut le définir par l'une ou l'autre des règles suivantes :

Règle d'Ampère : on suppose un observateur placé suivant un des axes, Ox par exemple, la tête dans la direction positive : le sens de rotation positif dans le plan perpendiculaire, de Oy vers Oz, est le sens qui va devant lui de sa droite à sa gauche ; s'il regarde dans la direction positive de l'axe Oy, la direction positive de l'axe Oz est à sa gauche.

Règle de Maxwell : on suppose un tire-bouchon placé suivant un des axes, Oz par exemple, et on le tourne dans le sens des rotations positives du plan perpendiculaire, de Ox vers Oy : le sens positif sur Oz est le sens dans lequel progresse le tire-bouchon.

Règle des trois doigts de la main droite : le sens du trièdre $Oxyz$ est le sens du trièdre formé par les trois premiers doigts de la main droite étendus, le pouce suivant Ox, l'index suivant Oy et le médius suivant Oz.

94. Vérifications expérimentales. — Plaçons dans le champ magnétique terrestre un aimant mobile autour d'un axe vertical ; observons sa position d'équilibre, puis écartons l'en d'un angle θ : le moment par rapport à l'axe de rotation du couple qui tend à l'y ramener est $C = MH \sin \theta$, en désignant par M et H les composantes horizontales du moment magnétique de l'aimant et du champ magnétique terrestre. Il est facile de vérifier expérimentalement que le moment C du couple est proportionnel au sinus de l'angle d'écart θ, soit en l'équilibrant par un couple de torsion, soit en étudiant les oscillations de l'aimant pour différentes amplitudes. Nous reviendrons sur les mesures ma-

gnétiques au chapitre suivant : leur ensemble vérifie parfaitement la proportionnalité du couple à sin θ.

Ces mesures permettent de déterminer la constante de proportionnalité, $A = C / \sin\theta = MH$; nos hypothèses fondamentales se traduisent par le fait que la constante A est le produit de deux facteurs, dont l'un dépend uniquement de l'aimant, et l'autre dépend uniquement du champ magnétique où il est placé.

Portons successivement l'aimant en divers points où la composante horizontale du champ magnétique a pour grandeur H, H_1, H_2..., et déterminons les constantes A, A_1, A_2... correspondantes. Nous avons, d'après la relation $A = MH$:

$$\frac{H_1}{H} = \frac{A_1}{A}, \qquad \frac{H_2}{H} = \frac{A_2}{A}, \qquad \ldots\ldots$$

Cette expérience définit la mesure des champs H_1, H_2,... en fonction du champ magnétique H ; elle permet de mesurer un champ magnétique par un nombre, si l'on a choisi, d'une façon arbitraire, une unité de champ magnétique. Les hypothèses faites se traduisent ici par le fait que les valeurs trouvées pour les rapports $\frac{A_1}{A}$ ne doivent dépendre que des champs magnétiques et doivent être les mêmes quel que soit l'aimant employé. C'est un fait qu'on peut considérer comme vérifié directement par l'ensemble des expériences faites, soit pour la détermination du champ magnétique terrestre en différents lieux, soit pour la mesure des courants électriques par les champs magnétiques qu'ils produisent.

Les mêmes expériences fournissent la valeur du moment magnétique **M** :

$$M = \frac{A}{H} = \frac{A_1}{H_1} = \frac{A_2}{H_2} = \ldots\ldots$$

Sa valeur numérique est connue lorsque les valeurs numériques du couple A et du champ magnétique H sont connues. La formule $C = MH \sin\theta$ définit l'unité de moment magnétique lorsque l'unité de couple — qui est une unité mécanique — et l'unité de champ magnétique ont été définies arbitrairement.

On déterminera directement le rapport des moments magnétiques M, M′ de deux aimants en déterminant les constantes A et A′ pour ces deux aimants placés dans le même champ H : on aura :

$$\frac{M'}{M} = \frac{A'}{A}, \qquad \frac{A'}{M'} = \frac{A}{M} = H.$$

Les hypothèses fondamentales se traduisent ici par le fait que la valeur trouvée pour le rapport $\frac{M'}{M}$ doit être indépendante du champ magnétique employé à la comparaison. Ce fait peut également être considéré comme vérifié directement par l'ensemble des mesures magnétiques.

Nous avons supposé le champ H uniforme ; un tel champ est réalisé par le champ terrestre et par le champ magnétique à l'intérieur d'une bobine parcourue par un courant électrique ; d'ailleurs, si nous employons à nos mesures, comme cela est effectivement possible, un aimant suffisamment petit, nous

pourrons toujours supposer le champ magnétique uniforme dans l'espace occupé par l'aimant.

III. — *ACTIONS SUBIES ET CHAMP CRÉÉ PAR UN PETIT AIMANT*

95. Énergie d'un aimant dans un champ magnétique. — Considérons un *doublet magnétique* formé par deux masses magnétiques ponctuelles $+ m$ et $- m$ séparées par une distance très petite l, son moment magnétique est $M = ml$. Supposons qu'il soit placé dans le champ magnétique $\vec{H}$ créé par un système d'aimants permanents, les masses $+ m$ et $- m$ étant placées aux points A et B où le potentiel du champ $\vec{H}$ a les valeurs V_A et V_B (*fig.* 112). Il y est soumis à des forces magnétiques, et si nous le déplaçons, nous pouvons recueillir le travail effectué par ces forces magnétiques. Écartons-le indéfiniment du système d'aimants qui produit le champ; la masse magnétique m passe d'un point où le potentiel est V_A à un point où le potentiel est o, le travail effectué par la force $m\vec{H}$ qui agit sur elle est mV_A; de même le travail effectué par la force qui agit sur la masse $- m$ est $- mV_B$. Le travail effectué par les forces magnétiques dans le déplacement considéré est :

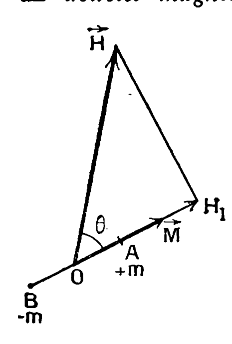


FIG. 112.

$$\mathcal{T} = m (V_A - V_B)$$

Comme le champ est produit par des aimants permanents, les échanges d'énergie avec le milieu extérieur du système formé par les aimants permanents et l'aimant mobile se réduisent à ce travail; on peut dire que ce système possédait une **énergie magnétique** :

$$W = m (V_A - V_B).$$

Comme la distance $BA = l$ est très petite, on peut écrire, en désignant par H_l la composante dans la direction $\vec{BA}$ du champ magnétique $\vec{H}$ au centre O de l'aimant, et en négligeant des termes en l^2 :

$$V_A - V_B = - H_l \,.\, l; \qquad W = - mH_l \,.\, l = - M \,.\, H_l = - \vec{M} \ \vec{H}.$$

L'énergie d'un petit aimant dans un champ magnétique est égale en valeur absolue et de signe contraire au produit du moment magnétique de l'aimant par la projection du champ sur la direction du moment magnétique, c'est-à-dire au produit scalaire des deux vecteurs champ et moment magnétiques.

Nous avons considéré un aimant formé de deux masses ponctuelles, ce qui correspond expérimentalement au cas d'un barreau dont les dimensions transversales sont très petites par rapport à la longueur. La formule s'applique, quelle que soit la forme de l'aimant, tant que ses dimensions restent assez

petites pour que les variations du champ de l'un à l'autre de ses points restent négligeables vis-à-vis de sa valeur H : nous pouvons en effet grouper deux par deux les masses magnétiques ponctuelles réparties dans l'aimant de façon à constituer des doublets, de moments magnétiques $d\vec{M}$, possédant l'énergie : $dW = -\vec{H}\, d\vec{M}$; l'énergie totale est $W = -\int \vec{H}\, d\vec{M} = -\vec{H}\int d\vec{M} = -\vec{M}\vec{H}$.

Le même raisonnement montre que la formule s'applique, quelles que soient les dimensions de l'aimant, si le champ $\vec{H}$ est uniforme.

On remarquera la différence entre la définition de l'énergie magnétique donnée ici, et la définition de l'énergie électrostatique donnée au paragraphe 60. Nous avons calculé en électrostatique l'énergie totale qu'on peut recueillir en ramenant un système de conducteurs à l'état neutre ; ici nous calculons seulement l'énergie qu'on peut recueillir en éloignant le petit aimant du système qui produit le champ, c'est-à-dire l'**énergie potentielle mutuelle de** ce système et du petit aimant. Nous ne pouvons pas calculer l'énergie totale du système d'aimants, comme nous avons calculé l'énergie totale du système de conducteurs, parce que nous ignorons quel travail il a fallu fournir pour aimanter les aimants, tandis que nous savions quel travail il avait fallu fournir pour charger les conducteurs. Par contre, nous pouvons calculer plus facilement l'énergie mutuelle, parce que nous pouvons, au moins théoriquement, supposer l'aimantation rigide, tandis que, dans le cas des conducteurs électriques, nous devons toujours tenir compte de la modification de la répartition des charges lors du déplacement dans le champ électrique.

96. Forces magnétiques agissant sur un petit aimant. — On peut déduire de l'expression de l'énergie l'expression des forces qui s'exercent sur le petit aimant, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait en électrostatique dans le cas des conducteurs qui se déplacent à charge constante (§ 65). Lorsqu'on déplace un petit aimant dans le champ créé par des aimants permanents immobiles, il n'y a pas d'autre échange d'énergie entre ce système et le milieu extérieur que le travail accompli par les forces magnétiques qui agissent sur le petit aimant. Ce travail est égal à la diminution de l'énergie du système, et la projection X des forces magnétiques sur un axe Ox est donnée, en fonction du déplacement x parallèle à cet axe, par la formule :

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x}.$$

On calcule la dérivée partielle de W par rapport à x en calculant sa variation pour une translation dx parallèle à Ox ; dans cette translation, le vecteur $\vec{M}$ reste constant ; on a :

$$W = -\vec{M}\vec{H} = -(M_x H_x + M_y H_y + M_z H_z) ;$$

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x} = \vec{M}\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

On calculerait de même les autres composantes suivant Oy et Oz. Si le champ

est uniforme, le vecteur $\vec{H}$ est constant ; ces composantes sont toutes nulles, et le système des forces magnétiques qui s'exercent sur l'aimant se réduit à un couple : c'est le résultat déjà trouvé directement.

Calculons maintenant le moment L des forces par rapport à un axe passant par le centre O du petit aimant. On a : $L = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$. Il faut évaluer la variation dW de l'énergie pour une rotation $d\alpha$ autour de l'axe considéré. L'énergie peut se mettre sous la forme $W = -MH\cos\theta$, en désignant par θ l'angle des deux vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{H}$; dans la rotation autour d'un axe passant par le point O, M et H restent constants, et seul θ peut varier. Si l'axe est situé dans le plan défini par les deux vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{H}$, la variation $d\theta$ de l'angle θ est du second ordre par rapport à la rotation $d\alpha$, et la dérivée $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ est nulle : le moment des forces par rapport à cet axe est nul. Si au contraire l'axe est perpendiculaire à ce plan, la variation $d\theta$ est égale à la rotation $d\alpha$, et l'on a :

$$L = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial (MH\cos\theta)}{\partial \theta} = -MH\sin\theta.$$

La rotation a été comptée positivement dans le sens qui augmente l'angle θ, le sens du moment L est donc celui qui tend à diminuer l'angle θ.

Les résultats que nous venons de trouver sont ceux que nous avons trouvés directement pour le couple dans un champ uniforme, et que nous avons exprimés symboliquement par la relation vectorielle $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H}$. *L'action d'un champ magnétique sur un petit aimant se réduit au couple $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H}$, et à une force appliquée au centre de l'aimant, dont les composantes sont données par trois relations de la forme $X = \vec{M}\frac{\partial \vec{H}}{\partial x}$.*

Ces formules ont été déduites de l'expression de l'énergie, et n'ont été établies que pour un petit aimant à aimantation rigide, placé dans le champ d'aimants permanents. On ne peut calculer l'énergie et ses variations qu'en faisant des hypothèses sur les différents états par lesquels peut passer successivement le système qu'on considère. Mais il est évident que les forces qui s'exercent sur un aimant ne dépendent que de son état d'aimantation actuel, et du champ magnétique aux différents points de l'espace qu'il occupe. *Tandis que la formule qui donne l'énergie n'est valable que dans le cas particulier considéré, on peut au contraire appliquer dans tous les cas les formules qui donnent le couple et la force :*

$$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H} \qquad \text{et} \qquad X = \vec{M}\frac{\partial \vec{H}}{\partial x}.$$

Le moment magnétique $\vec{M}$ du petit aimant peut être dû à de l'aimantation induite ; le champ magnétique $\vec{H}$ peut être créé par des aimants à aimantation induite ou des courants électriques.

97. Potentiel créé par un petit aimant. — Considérons un doublet magnétique formé par deux masses ponctuelles $+m$ et $-m$ placées en deux points, A et B, séparés par une distance l ; son moment magnétique est $M = ml$. Considérons un point P, défini par sa distance $OP = r$ au centre de l'aimant et par l'angle θ des directions $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{BA}$ (*fig.* 113), et calculons le potentiel créé par l'aimant au point P, en supposant la longueur l très petite par rapport à la distance r. Si r_1 et r_2 sont les deux distances AP et BP, le potentiel newtonien créé en P par les masses magnétiques $+m$ et $-m$ est :

$$V = \frac{m}{\mu_0 r_1} - \frac{m}{\mu_0 r_2} = \frac{m}{\mu_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

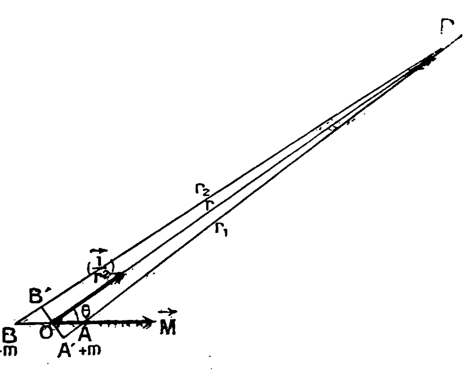


FIG. 113.

Prenons sur PA et PB des longueurs PA' et PB' égales à r : la droite OA', par exemple, peut être considérée indifféremment comme perpendiculaire à l'une ou l'autre des directions très voisines PO ou PA ; le triangle OAA' est rectangle en A' et son angle en O est $\frac{\pi}{2} - \theta$; on a donc $r - r_1 = AA' = OA \cos\theta$. De même $r_2 - r = BB' = OB \cos\theta$, et :

$$r_2 - r_1 = l \cos\theta.$$

En portant cette valeur dans l'expression de V, et en négligeant au dénominateur $l^2 \cos^2\theta$ devant r^2, on obtient :

$$V = \frac{ml\cos\theta}{\mu_0 r^2} = \frac{M\cos\theta}{\mu_0}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Cette formule donne le potentiel en grandeur et en signe : $\cos\theta$ et V sont positifs en même temps, quand θ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et que r_1 est plus petit que r_2.

Le moment magnétique $\overrightarrow{M}$ est un vecteur dirigé suivant $\overrightarrow{BA}$: la quantité $M\cos\theta$ représente sa projection M_r sur la direction $\overrightarrow{OP}$, et on peut écrire :

$$V = \frac{M_r}{\mu_0}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Le potentiel en un point est égal, en unités électromagnétiques ($\mu_0 = 1$), *à la composante du moment magnétique de l'aimant suivant la droite qui le joint au point considéré, divisée par le carré de la distance de ce point à l'aimant.*

Sous cette forme, la formule du potentiel peut facilement être étendue, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour l'énergie au para-

graphe 95, à un aimant de forme quelconque, de dimensions assez petites par rapport à la distance du point P à l'aimant ; on peut alors considérer la direction OP et la distance r comme identiques pour tous les doublets magnétiques formés par les masses réparties dans l'aimant.

Si l'on emploie la rotation vectorielle, on mettra cette formule sous une forme symbolique en introduisant un vecteur $\overrightarrow{\left(\frac{1}{r^2}\right)}$ de direction $\overrightarrow{OP}$ et de grandeur $\frac{1}{r^2}$. On aura alors :

$$V = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{\left(\frac{1}{r^2}\right)}.$$

Le vecteur $-\overrightarrow{\left(\frac{1}{r^2}\right)}$, de direction $\overrightarrow{PO}$, peut être considéré comme représentant le champ newtonien créé au point O par une masse agissante $+1$ placée en P, champ qui dérive du potentiel $\frac{1}{r}$. On peut donc écrire :

$$-\overrightarrow{\left(\frac{1}{r^2}\right)} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}, \qquad V = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}.$$

Pour le calcul analytique de cette expression, la distance r doit être exprimée en fonction des cordonnées des points O et P, et les dérivations exprimées par le symbole gradient doivent être effectuées par rapport aux coordonnées du point O.

Nous avons donné le calcul complet du potentiel, pour bien montrer qu'on a là un potentiel newtonien. Mais nous aurions pu obtenir directement le résultat en remarquant que le potentiel V est, par définition, l'énergie mutuelle du petit aimant et d'une masse magnétique $+1$ placée en P. Cette énergie se calcule par la formule du paragraphe 95, et on a $V = -\overrightarrow{M}\overrightarrow{H}$, en désignant par $\overrightarrow{H}$ le champ créé en O par la masse $+1$ placée en P, champ qui est égal à $-\frac{1}{\mu_0}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}$.

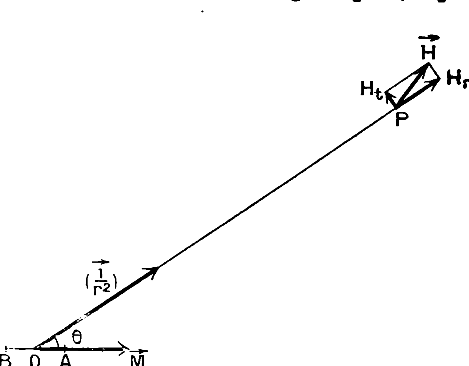


FIG. 114.

98. Champ créé par un petit aimant. — De l'expression du potentiel en fonction des coordonnées polaires du point P, $V = \frac{M \cos \theta}{\mu_0 r^2}$, nous pouvons déduire la valeur du champ magnétique en P. Il est évident que ce champ est situé dans le plan défini par la droite OP et le vecteur $\overrightarrow{M}$, puisqu'il est produit par deux masses magnétiques A et B placées dans ce plan. Nous le décomposerons en deux composantes rectangu-

laires, l'une, radiale, H_r, dirigée suivant OP, l'autre tangentielle H_t, dirigée perpendiculairement à OP (*fig.* 114).

La composante radiale H_r, comptée positivement dans le sens de O vers P, est donnée par :

$$H_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2M\cos\theta}{\mu_0 r^3}.$$

La composante tangentielle H_t s'obtient en calculant la variation dV du potentiel pour un déplacement dt suivant la perpendiculaire à OP. Dans ce déplacement, r reste constant, et l'angle θ varie d'une quantité $d\theta = \frac{dt}{r}$. On a donc, H_t étant compté positivement dans le sens des angles θ croissants :

$$H_t = -\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{M\sin\theta}{\mu_0 r^3}.$$

Le champ aux différents points d'une droite OP *passant par l'aimant garde une direction constante et varie en raison inverse du cube de la distance à l'aimant.*

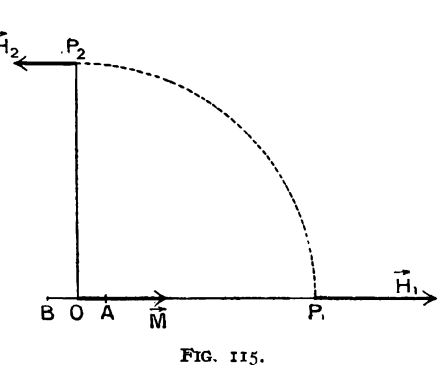


FIG. 115.

L'expression du champ se simplifie si le point P est placé sur la droite AB ou sur la perpendiculaire à cette droite passant par le point O (*fig.* 115). Ces positions sont dites les **positions principales de Gauss.** Dans la première, on a $\theta = 0$; le champ est dirigé suivant la droite OP_1 dans la direction du vecteur $\vec{M}$, et sa valeur H_1 est :

$$H_1 = H_r = 2\frac{M}{\mu_0 r^3}.$$

Dans la seconde, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$; le champ est dirigé perpendiculairement à la droite OP_2 ; il est parallèle au vecteur $\vec{M}$, de sens opposé, et sa valeur H_2 est :

$$H_2 = H_t = \frac{M}{\mu_0 r^3}.$$

Le rapport H_1 / H_2 *des champs magnétiques créés par un aimant en deux points* P_1 *et* P_2 *situés dans les deux positions principales de Gauss, à la même distance de l'aimant, est égal à* 2, *à condition que cette distance soit grande par rapport aux dimensions de l'aimant.*

Cette propriété est très importante, car sa vérification constitue une vérification expérimentale de la loi de Coulomb. Supposons en effet que le champ créé par une masse magnétique m à la distance r soit $H = m\varphi(r)$, $\varphi(r)$ étant une fonction quelconque; il dérive d'un potentiel $V = mf(r)$, et on a

$\varphi(r) = -f'(r)$. Reprenons avec cette hypothèse le calcul du potentiel créé en un point P par un doublet magnétique (*fig.* 113). On aura :

$$V = mf(r_1) - mf(r_2) = mf'(r)(r_1 - r_2) = -Mf'(r)\cos\theta = M\varphi(r)\cos\theta.$$

Le champ qui dérive de ce potentiel a pour composantes :

$$H_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -M\varphi'(r)\cos\theta, \qquad H_t = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{M}{r}\varphi(r)\sin\theta.$$

Les champs H_1 et H_2 dans les deux positions principales de Gauss $\left(\theta = 0\right.$ et $\left.\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ sont :

$$H_1 = -M\varphi'(r), \qquad H_2 = \frac{M}{r}\varphi(r),$$

et leur rapport est :

$$\frac{H_1}{H_2} = -r\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

L'expérience montre que ce rapport est égal à 2 ; on a donc :

$$\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{2}{r}, \qquad \text{d'où} \qquad \log\varphi(r) = -2\log r + \log k;$$

$$\varphi(r) = \frac{k}{r^2}.$$

La mesure du rapport H_1 / H_2 est une détermination expérimentale de la loi de variation avec la distance des actions magnétiques. Elle peut se faire d'une façon très précise par les méthodes que nous décrirons dans le prochain chapitre ; Gauss a montré, en 1841, que ce rapport est égal à 2, avec une précision de l'ordre du millième, et a ainsi réalisé une vérification expérimentale de la loi de Coulomb infiniment plus précise que celle de Coulomb.

99. Résumé des hypothèses fondamentales et des vérifications expérimentales. — Nous sommes partis des hypothèses fondamentales exprimées par la formule $\vec{F} = m\vec{H}$ et par la loi de Coulomb, complétées par l'hypothèse que la masse magnétique totale d'un aimant est nulle. Nous en avons déduit différentes formules, qui expriment l'action d'un champ sur un petit aimant, ou le potentiel créé par ce petit aimant. Elles peuvent être résumées par la formule de l'énergie $W = -\vec{M}.\vec{H}$, et par la formule du potentiel $V = \frac{1}{\mu_0}\vec{M}.\left(\overrightarrow{\frac{1}{r^2}}\right)$: la seule grandeur caractérisant l'aimant qui y figure est son moment magnétique $\vec{M}$. Toutes les expériences de vérification ont porté sur ces formules, et les quantités mesurées, forces, couples ou champs, peuvent toujours être calculées à partir du vecteur $\vec{M}$, sans faire aucunement intervenir les masses magnétiques.

Nous aurions pu prendre comme hypothèses fondamentales les faits exprimés par ces formules, et considérer un aimant quelconque comme formé par la

juxtaposition de petits aimants, définis chacun par leur moment magnétique. Notre exposé aurait alors suivi de plus près l'expérience ; nous n'aurions pas eu à considérer des masses magnétiques, qui n'existent sans doute pas, ni à faire une hypothèse supplémentaire pour affirmer l'impossibilité de les isoler. Mais cette méthode aurait eu l'inconvénient de ne pas montrer directement que le champ magnétique est un champ newtonien et de compliquer la définition du système d'unités électromagnétiques. Nous aurions été amenés à introduire, comme conséquence de nos hypothèses fondamentales, la notion de masses magnétiques fictives permettant un calcul plus facile des forces : il n'y a aucun inconvênient à prendre cette notion comme point de départ. Nous montrerons d'ailleurs au chapitre XI comment la répartition de ces masses magnétiques fictives peut se déduire de la connaissance du moment magnétique des différentes parties de l'aimant.

CHAPITRE X

MESURES MAGNÉTIQUES

I. — *MÉTHODES D'ORIENTATION*

100. Détermination de la direction du champ magnétique terrestre. — Nous avons dit, au paragraphe 91, qu'un aimant suspendu dans un champ uniforme par son centre de gravité s'oriente de facon que sa ligne des pôles $\overrightarrow{SN}$ prenne la direction du champ. Si l'aimant est mobile autour d'un axe passant par son centre de gravité, il s'oriente de façon que la projection $\overrightarrow{S'N'}$ de la ligne des pôles sur le plan perpendiculaire à l'axe prenne la direction de la composante $\overrightarrow{H}$ du champ située dans ce plan. La détermination de la position d'équilibre permet donc de déterminer la direction de cette composante, si la position de la ligne S'N' dans l'aimant est connue.

Les aimants employés sont en général des barreaux ou des aiguilles, aimantés de telle sorte que la direction S'N' coïncide avec leur axe de symétrie BA qui est défini géométriquement par les pointes de l'aiguille ou par des traits tracés sur le barreau. Il est d'ailleurs facile de déterminer la direction exacte de la ligne S'N' : il suffit de retourner l'aimant face pour face, cette ligne reprend la même direction, et la droite BA prend une direction B_1A_1, (*fig.* 116), symétrique de la première par rapport à la direction du champ. Cette dernière direction est déterminée expérimentalement comme étant la bissectrice des directions BA et B_1A_1.

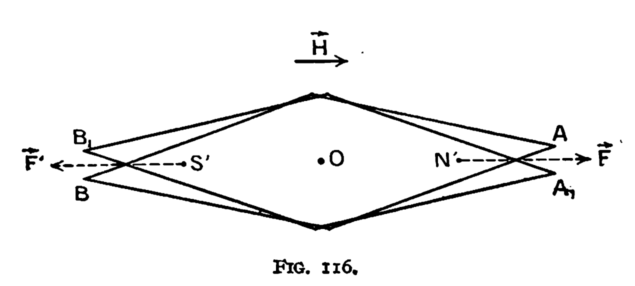


FIG. 116.

Les appareils destinés à déterminer la direction du champ magnétique terrestre portent le nom général de **boussoles.** Les boussoles ordinaires servent à déterminer, au point où l'on se trouve, la direction de la composante horizontale du champ magnétique terrestre ; on en déduit la direction du Nord géographique si l'on connaît à l'avance l'angle que font ces deux directions. Elles

se composent en général d'une aiguille mobile, autour d'un axe vertical, devant un cadran, qui figure une rose des vents; dans les boussoles marines, ou *compas*, le cadran divisé est fixé à l'aiguille et tourne avec elle en face de repères fixés au navire. Le problème le plus délicat, surtout dans les navires en fer, est la correction des erreurs dues au champ magnétique produit par l'aimantation, permanente ou induite, de la masse du navire : on obtient la *compensation des compas* en disposant, dans leur voisinage, des aimants et des masses de fer qui compensent ce champ magnétique.

L'usage de la boussole nécessite la connaissance de l'angle que fait le méridien géographique avec le méridien magnétique, c'est-à-dire avec le plan vertical contenant la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Cet angle s'appelle la **déclinaison**; il se détermine à l'aide d'une *boussole de déclinaison*. On obtient une grande précision dans la détermination de la position d'équilibre du barreau aimanté en visant avec des microscopes des traits fins tracés sur ses extrémités; bien entendu, on élimine les erreurs de centrage en visant les deux extrémités, et on applique la méthode de retournement signalée plus haut. Les microscopes de visée sont portés par le cercle vertical d'un théodolite ordinaire, de sorte qu'on peut déterminer successivement, avec le même appareil, le plan du méridien magnétique et le plan du méridien géographique; on lit leur angle sur le cercle horizontal.

La connaissance complète de la direction du champ magnétique terrestre nécessite aussi la connaissance de l'angle que fait ce champ avec sa composante horizontale. Cet angle s'appelle l'**inclinaison** et se détermine à l'aide d'une *boussole d'inclinaison*. Dans cet appareil, l'aiguille aimantée est mobile autour d'un axe horizontal, auquel on peut donner différentes orientations : deux cercles gradués, l'un vertical, l'autre horizontal, permettent de mesurer l'angle que fait l'aiguille avec l'horizontale, et l'azimut du plan qu'elle décrit; on déduit la valeur de l'inclinaison de mesures faites dans différents azimuts. En plus des erreurs signalées à propos de la boussole de déclinaison, il faut ici prendre garde que la position d'équilibre d'un aimant mobile autour d'un axe horizontal dépend de son poids, si son centre de gravité n'est pas situé sur l'axe de rotation.

Avec de bons instruments, la direction du champ magnétique terrestre peut être déterminée avec une précision qui atteint 1/10 de minute pour la déclinaison, et une minute pour l'inclinaison. Signalons en passant que les méthodes d'induction, que nous étudierons plus loin (§ 223), permettent de mesurer ce dernier angle avec une précision un peu supérieure, de l'ordre de 10 secondes.

La valeur de ces angles varie d'un point à l'autre de la Terre : on trouvera dans les annuaires, tels que celui du Bureau des Longitudes, des cartes représentant ces variations. En France, le pôle Nord de l'aiguille aimantée se place à l'ouest du méridien géographique et se dirige vers le bas : la déclinaison est occidentale et varie environ (en 1940) de 6° 10′, à Nice, à 12°, à Brest; l'inclinaison est positive et varie environ de 60° 15′, à Perpignan, à 66°, à Dunkerque.

Ces nombres varient d'ailleurs avec le temps; en dehors des variations accidentelles et rapides, dites orages magnétiques, qui accompagnent le plus souvent les aurores boréales, les différents éléments du champ magnétique terrestre présentent des variations périodiques, séculaires et diurnes. C'est ainsi qu'à Paris la déclinaison était de 8° Est en 1556, et l'inclinaison de 75°

en 1666. Actuellement la déclinaison en France diminue de 9 à 10 minutes par an. Elle présente chaque jour deux maxima vers 2 heures et 14 heures ; l'amplitude de la variation diurne est plus grande en été qu'en hiver ; elle est comprise entre 4 et 12 minutes. La grandeur de la variation diurne est d'ailleurs différente suivant les années, et paraît liée à l'activité solaire, manifestée par le nombre de taches du soleil.

101. Magnétomètre. — Le problème étudié au paragraphe précédent est celui de la détermination de la direction d'un champ magnétique par rapport à une direction-repère donnée à l'avance, méridien géographique ou axe d'un navire. Il arrive qu'on se propose simplement de mesurer l'angle que font entre elles les composantes horizontales de différents champs magnétiques, dont les directions sont peu différentes, et qu'on peut établir successivement en un même point.

On place alors en ce point une aiguille aimantée, suspendue à un fil sans torsion (fil de cocon), et portant un miroir qui permet de mesurer, par la méthode optique, les angles dont elle tourne. L'aiguille peut être prise très petite, de 1 centimètre de longueur par exemple, et on peut presque toujours admettre que le champ, dans l'espace où elle se déplace, est uniforme. Un tel appareil constitue un **magnétomètre ;** il peut être complété par un amortisseur, à air par exemple, qui supprime ses oscillations et permet d'effectuer plus rapidement et plus commodément les mesures ; il doit être placé dans une cage fermée, qui le soustrait à l'action des courants d'air. Il faut, comme dans tout appareil de mesures magnétiques, que la cage et les supports ne contiennent aucune pièce de fer ; on les construit par exemple en bronze bien exempt de fer.

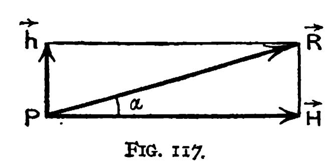


FIG. 117.

Si le magnétomètre placé en un point P est soumis uniquement à l'action du champ terrestre, il s'oriente de façon que le vecteur $\vec{M}$, moment magnétique de l'aiguille, prenne la direction de la composante horizontale $\vec{H}$ de ce champ. Si l'on fait ensuite agir sur lui un champ $\vec{h}$, créé par des aimants ou des courants disposés de telle sorte que le champ $\vec{h}$ soit perpendiculaire à la composante horizontale $\vec{H}$ (*fig.* 117), il s'oriente de façon que le vecteur $\vec{M}$ prenne la direction du champ $\vec{R}$ résultant de l'addition géométrique des champs $\vec{H}$ et $\vec{h}$; il tourne alors d'un angle α, donné par l'équation :

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{h}{H}.$$

La mesure de l'angle α donne le rapport des champs h et H, et permet de mesurer le champ h en valeur relative.

Si l'on mesure des champs faibles, les angles de déviation sont petits et peuvent être confondus avec leurs tangentes ; le déplacement du spot sur l'échelle est proportionnel à la valeur du champ h. Evaluons la sensibilité du magnétomètre, en admettant par exemple qu'on peut apprécier une dévia-

tion du spot de 1/10 de millimètre sur une échelle placée à 2 mètres du miroir; la rotation correspondante du rayon réfléchi est 1/20.000, celle du miroir est 1/40.000 (5''), et correspond à un champ h égal à H/40.000 ; nous verrons que la composante horizontale H est environ 0,2 gauss, le champ h ainsi mis en évidence est de 1/200.000 de gauss. On peut encore mesurer des champs plus faibles en réduisant le champ directeur H, par l'action d'un aimant qui produit au point P un champ dont la composante horizontale est parallèle à $\vec{H}$ et de sens contraire.

Si, au contraire, l'angle de déviation α est plus grand, il peut être mesuré avec une erreur relative très faible, si l'on détermine avec soin la distance de l'échelle au miroir et son orientation par rapport au rayon lumineux. Le rapport h / H = tang α est alors déterminé avec une grande précision.

Nous verrons plus tard l'application de cette méthode à la mesure des courants électriques par les champs magnétiques qu'ils produisent (chap. XXV) ; inversement, elle permet de déterminer, à partir des mesures absolues de courants électriques (chap. XXVI), la valeur de la composante horizontale du champ terrestre, avec une précision de l'ordre du 1/10.000.

102. Mesure de $\frac{M}{H}$. — Supposons que le champ magnétique h soit le champ, H_1 ou H_2, produit par un aimant de moment magnétique $\vec{M}$, placé en un point O_1 ou O_2, tel que le point P où se trouve le magnétomètre, soit, par rapport à cet aimant, dans une des positions principales de Gauss (*fig.* 118 et 119), à une distance r grande par rapport aux dimensions de l'aimant. On a (§ 98) :

$$H_1 = 2\frac{M}{\mu_0 r^3}, \qquad H_2 = \frac{M}{\mu_0 r^3};$$

et les déviations correspondantes α_1 et α_2 sont :

$$\text{tang}\,\alpha_1 = \frac{2}{r^3}\cdot\frac{M}{\mu_0 H}, \qquad \text{tang}\,\alpha_2 = \frac{1}{r^3}\cdot\frac{M}{\mu_0 H}.$$

La mesure de ces déviations permet (§ 98) de vérifier la loi de Coulomb en vérifiant que le rapport tgα_1 : tgα_2 est égal à 2; elle permet de mesurer le rapport M'/M des moments magnétiques de deux aimants, en mesurant le rapport tgα'_1/tgα_1 des déviations qu'ils produisent lorsqu'on les fait agir successivement. Enfin elle permet de déterminer la valeur du rapport M/μ_0H. Nous verrons tout à l'heure l'importance de cette dernière détermination, qui est utilisée pour la mesure absolue de la composante horizontale H en unités électromagnétiques.

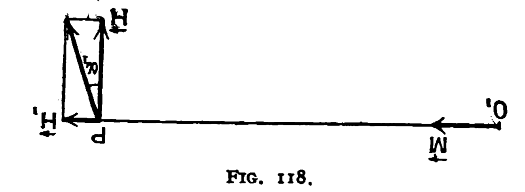


FIG. 118.

Une cause d'erreur importante provient de ce que les dimensions du bar-

reau agissant $\vec{M}$ ne peuvent pas être prises très petites, si l'on veut obtenir des déviations α_1 et α_2 assez grandes pour être mesurées avec une faible erreur relative. On prendra pour distance r la distance du magnétomètre P au centre magnétique O du barreau. Il peut ne pas coïncider avec son centre de figure : on s'affranchit aisément de cette erreur en faisant, pour chaque position principale, quatre expériences à la même distance, d'abord en retournant le barreau $\vec{M}$ bout pour bout, puis en le plaçant dans la position symétrique par rapport au magnétomètre, et en prenant la moyenne des quatre déviations peu différentes obtenues. L'action du barreau $\vec{M}$ ne peut d'ailleurs pas être assimilée à celle d'un aimant infiniment petit ; elle dépend de la répartition des masses magnétiques dans le barreau. Aucune méthode ne permet de connaître cette répartition avec assez de précision pour calculer les corrections ; on peut heureusement les déduire directement des expériences.

FIG. 119.

Reprenons le calcul du champ produit par un doublet magnétique de longueur l dans la première position de Gauss (*fig.* 120) ; employons, pour simplifier, un système d'unités électromagnétique ($\mu_0 = 1$). **La loi de Coulomb donne :**

$$H_1 = \frac{m}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{m}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = m\frac{2rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} = \frac{2M}{r^3}\frac{1}{\left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^2} = \frac{2M}{r^3}\left(1 + \frac{l^2}{2r^2} + \dots\right).$$

La parenthèse contient un développement en série par rapport à $\frac{l^2}{r^2}$, qui est rapidement convergent si r est par exemple supérieur à 10 l ; on peut ne conserver que les deux premiers termes, et écrire :

FIG. 120.

$$H_1 = \frac{2M}{r^3} + \frac{c_1}{r^5}.$$

Si l'on considère maintenant l'ensemble du barreau aimanté, dont le centre magnétique est O, son action sera la somme des actions des doublets qui le composent, et pourra s'exprimer par une formule :

$$H_1 = \frac{2M}{r^3} + \frac{C_1}{r^5}.$$

Il en sera de même dans la seconde position principale de Gauss, et on aura :

$$H_2 = \frac{M}{r^3} + \frac{C_2}{r^5}.$$

Les coefficients C_1 et C_2 ne peuvent pas être calculés directement, en l'absence de données précises sur la répartition des masses magnétiques : mais il suffit de connaître la forme de ces relations. On déterminera les déviations α_1

et α_2 pour différentes distances, et on représentera les résultats expérimentaux par des formules de la forme :

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{A_1}{r^3} + \frac{B_1}{r^5}, \qquad \operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{A_2}{r^3} + \frac{B_2}{r^5}.$$

Les coefficients A_1 et A_2 sont égaux aux rapports $\frac{2M}{H}$ et $\frac{M}{H}$.

C'est ainsi qu'a procédé Gauss : les distances r ont varié de 130 à 400 centimètres, les déviations de $2°\,14'$ à $4'\,36''$, et le rapport des coefficients A_1 et A_2, qui était déterminé avec une précision de l'ordre du millième, a été trouvé exactement égal à 2.

II. — *MÉTHODES D'OSCILLATIONS*

103. Oscillations d'un aimant. — Considérons un aimant mobile autour d'un axe vertical, dans un champ magnétique dont la composante horizontale est $\vec{H}$, et désignons par $\vec{M}$ la composante horizontale du moment magnétique de l'aimant. S'il est écarté d'un angle θ de sa position d'équilibre, il est soumis à un système de forces, qui tendent à l'y ramener, et dont le moment, par rapport à l'axe vertical, est $-$ MH sin θ (§ 96) ; s'il est abandonné à lui-même, il va osciller autour de sa position d'équilibre. Si l'on suppose qu'il n'est soumis à aucune force autre que les forces magnétiques, et en particulier qu'il n'existe pas de forces d'amortissement, et si on désigne par I le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe de rotation, l'équation du mouvement est :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -MH\sin\theta.$$

Cette équation a exactement la même forme que l'équation du mouvement d'un pendule sous l'action de la pesanteur, et les oscillations de l'aimant suivent les mêmes lois que les oscillations du pendule.

Si l'amplitude des oscillations est petite, on peut confondre le sinus de l'angle θ avec cet angle, et écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + MH\theta = 0.$$

La solution générale de cette équation est :

$$\theta = \theta_0 \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - \varphi\right);$$

l'amplitude θ_0 et la phase φ sont déterminées par les conditions initiales ; la période T est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MH}}.$$

Les petites oscillations d'un aimant sont isochrones, et la période de ces oscillations est inversement proportionnelle à la racine carrée du moment magnétique de l'aimant et à la racine carrée du champ magnétique qui agit sur lui.

Il est facile de déterminer expérimentalement cette période avec précision : on peut par exemple fixer un miroir sur l'aimant pour repérer exactement son passage par la position d'équilibre, et l'amortissement des oscillations est en général assez faible pour permettre d'en compter un grand nombre. Le barreau doit être suspendu par une suspension sans torsion, ou du moins dont le couple de torsion soit négligeable par rapport au couple magnétique. Les amplitudes doivent rester petites ; on sait que, dans le mouvement du pendule, la période T' des oscillations d'amplitude petite θ_0 est liée à la période des oscillations d'amplitude infiniment petite par la relation $T' = T\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$; la correction $\frac{\theta_0^2}{16}$ est inférieure au 1/1.000 si l'amplitude θ_0 est inférieure à $\sqrt{0{,}016} = 0{,}126$, soit environ 7°.

Les formules établies s'appliquent à un aimant dont l'aimantation est rigide. En réalité, à son aimantation permanente, qu'on peut caractériser par l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$, égale au rapport M/v de son moment magnétique à son volume, se superpose toujours une aimantation induite produite par le champ H, qui varie quand l'aimant se déplace par rapport à ce champ. L'erreur relative sur la période qui en résulte est d'autant plus importante que H est plus grand, et $\mathfrak{J}$ plus faible : pour des barreaux d'acier à section carrée, dont la longueur est 10 fois le côté, elle est de l'ordre des 4/10 de la valeur en unités électromagnétiques du rapport $H / \mathfrak{J}$. On réalise facilement des aimants pour lequels $\mathfrak{J} = 200$; dans le champ terrestre ($H = 0{,}2$), l'erreur due à l'aimantation induite est inférieure à 1/2.000 : il n'y aura à en tenir compte que pour des mesures de haute précision.

104. Mesures relatives. — Si l'on fait osciller successivement un même aimant dans deux champs magnétiques différents H et H', les périodes T et T' sont données par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MH}}, \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MH'}}, \qquad \frac{H'}{H} = \frac{T^2}{T'^2}.$$

La mesure des périodes donne la mesure des champs en valeur relative.

Cette méthode a souvent été employée pour déterminer les valeurs relatives de la composante horizontale du champ magnétique terrestre en différents lieux. La principale difficulté provient des variations possibles du moment magnétique de l'aimant, soit avec la température, soit avec le temps ; l'aimantation d'un aimant diminue toujours lentement avec le temps, surtout s'il subit des chocs.

Si l'on veut comparer au champ terrestre H un autre champ magnétique H', produit par exemple par un courant, on est gêné par l'impossibilité de soustraire l'aimant à l'action du champ terrestre. On tourne la difficulté en plaçant le champ H' parallèlement au champ H, et en le faisant agir successivement dans les deux sens. L'aimant oscille d'abord sous l'influence du champ

$H + H'$, puis du champ $H - H'$, et les périodes T et T' sont liées par la relation :

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{H - H'}{H + H'}; \qquad \frac{H'}{H} = \frac{T'^2 - T^2}{T'^2 + T^2}.$$

On comparera de même les moments magnétiques M et M' de deux aimants en les faisant osciller en un même point du champ magnétique terrestre. Les périodes T et T' sont données, en désignant par I et I' les moments d'inertie des deux aimants, par les relations :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MH}}, \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{M'H}}; \qquad \frac{M'}{M} = \frac{I'}{I} \cdot \frac{T^2}{T'^2}.$$

Pour déterminer le rapport M'/M, il faut mesurer le rapport des périodes et le rapport des moments d'inertie. Ces derniers peuvent se calculer d'après les dimensions des aimants, ou se déterminer expérimentalement comme nous le verrons au paragraphe suivant. On peut éliminer cette mesure accessoire en montant les deux aimants sur le même support, les deux vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{M'}$ étant parallèles, d'abord de même sens, puis de sens contraire : on constitue ainsi un aimant unique, dont le moment magnétique est d'abord $M + M'$, puis $M - M'$, et dont le moment d'inertie est constant et égal à $I + I'$. Les deux périodes T et T' sont liées par la relation :

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{M - M'}{M + M'}; \qquad \frac{M'}{M} = \frac{T'^2 - T^2}{T'^2 + T^2}.$$

Cette méthode a pour inconvénient que les aimants, trop rapprochés, réagissent l'un sur l'autre, et que l'aimantation induite peut être différente dans les deux expériences.

105. Mesures absolues. — De la formule qui donne la période on peut tirer la valeur du produit MH :

$$MH = \frac{4\pi^2 I}{T^2}.$$

Cette valeur est connue en unités C. G. S. si la période T est mesurée en secondes et si le moment d'inertie I est connu. Si l'aimant a une forme géométrique simple, ce moment d'inertie peut être calculé d'après sa masse et ses dimensions : c'est ainsi que le moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle, de masse *m* et de côtés *a*, *b*, *c*, par rapport à un axe passant par son centre et parallèle au côté *c*, est :

$$I = m\frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Mais l'aimant est nécessairement supporté par un étrier qui oscille avec lui, et dont le moment d'inertie n'est pas négligeable dans des mesures de précision ; d'autre part, il est rare que le barreau soit suffisamment homogène pour que le calcul fournisse une approximation suffisante. Il est néces-

saire de déterminer expérimentalement le moment d'inertie du système total. On répète alors l'expérience en fixant sur le barreau deux masses cylindriques μ en cuivre, à des distances égales r de l'axe de rotation (*fig.* 121) : le moment magnétique n'est pas modifié, le moment d'inertie devient $I + 2\mu r^2$, et la période prend une nouvelle valeur T'. On a :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{MH} I, \qquad T'^2 = \frac{4\pi^2}{MH}(I + 2\mu r^2);$$

d'où, par soustraction :

$$T'^2 - T^2 = \frac{4\pi^2}{MH} 2\mu r^2; \qquad MH = \frac{8\pi^2 \mu r^2}{T'^2 - T^2}.$$

Il serait d'ailleurs facile, si la précision des expériences le nécessitait, de tenir compte du moment d'inertie des cylindres μ par rapport à leur axe.

Ces mesures fournissent la valeur du produit $\Pi = MH$. Nous avons déjà vu (§ 102) comment on peut déterminer, pour le même aimant, le rapport $\rho = M/\mu_0 H$. De ces deux mesures, on déduit, en fonction des unités mécaniques seules, les deux quantités $\mu_0 H^2 = \Pi/\rho$ et $M^2/\mu_0 = \Pi\rho$. En unités électromagnétiques, μ_0 est, par définition, égal à 1 : on obtient donc une mesure absolue en unités électromagnétiques de la composante horizontale H du champ magnétique terrestre et du moment magnétique M de l'aimant.

Cette méthode, due à Gauss, est encore couramment employée dans les observatoires magnétiques; avec les appareils modernes, elle permet d'obtenir la valeur de H avec une précision de l'ordre du 1/10.000. On tend d'ailleurs à la remplacer par des méthodes électriques (cf. §§ 101 et 263), qui permettent d'obtenir une précision comparable par des mesures beaucoup plus rapides.

La valeur de la composante H varie d'un point à l'autre du globe. Actuellement, elle varie en France de 0g,188 à Dunkerque, à 0g,226 à Perpignan.

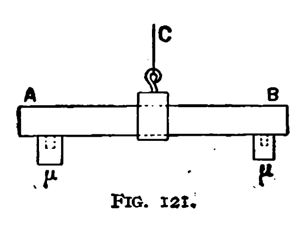


FIG. 121.

Quant à la valeur de M, elle dépend des dimensions de l'aimant et de son état d'aimantation ; on définit l'*intensité d'aimantation moyenne* $\mathfrak{I}$ de l'aimant comme étant le rapport $\mathfrak{I} = M / v$ de son moment magnétique à son volume. Pour les barreaux aimantés couramment employés, la valeur de $\mathfrak{I}$ est généralement comprise entre 100 et 200 unités électromagnétiques C. G. S. ; on peut, avec des aciers spéciaux au tungstène, construire des barreaux pour lesquels la valeur de $\mathfrak{I}$ atteint et dépasse 500 (cf. § 196).

III. — *UNITÉS MAGNÉTIQUES*

106. Système d'unités électromagnétiques. — Nous avons déjà donné, au paragraphe 89, la définition des unités électromagnétiques de masse magnétique et de champ magnétique, déduite de la loi de Coulomb. Cette définition ne correspond évidemment pas à une expérience réalisable, puisque la notion de masse magnétique ne correspond pas à une réalité physique : nous venons de voir que les véritables grandeurs mesurables sont le moment magnétique M

d'un aimant et le champ magnétique H, ou plutôt les quantités $M/\sqrt{\mu_0}$ et $H\sqrt{\mu_0}$. Ce sont ces quantités qu'il faudrait introduire dans les définitions des unités pour suivre la marche des mesures. Mais nous avons déjà dit (§ 99) que, si nous avions pris comme hypothèses fondamentales les formules qui expriment l'action d'un champ magnétique sur un aimant ou le champ magnétique créé par un aimant, nous aurions introduit, pour simplifier les calculs, la notion de masse magnétique et la loi de Coulomb : il n'y a aucun inconvénient à prendre ces dernières notions comme point de départ pour la définition du système d'unités.

Comme les unités électriques (§ 76), les unités magnétiques peuvent être considérées comme formant, avec les unités mécaniques, un *système à quatre unités fondamentales*, les trois unités mécaniques de longueur, de masse et de temps et l'unité de masse magnétique. Les unités de champ magnétique, de flux de force magnétique, de moment magnétique, d'intensité d'aimantation sont définies, à partir des quatre unités fondamentales, par les formules mêmes qui définissent ces grandeurs :

$$F = mH, \qquad \Phi = \int_{\text{s}} \vec{H}\,\vec{ds}, \qquad M = l\,\Sigma m, \qquad I = \frac{M}{v}.$$

Si les quatre unités fondamentales sont choisies arbitrairement, l'expression de la loi de Coulomb contient un coefficient numérique μ_0, et ce même coefficient figure dans l'expression du potentiel créé par un petit aimant.

$$f = \frac{1}{\mu_0}\frac{mm'}{r^2}, \qquad V = \frac{1}{\mu_0}\vec{M}\,\vec{\text{grad}}\,\frac{1}{r}.$$

Un **système électromagnétique d'unités** est un système ne comportant plus comme unités fondamentales que les trois unités mécaniques, *l'unité de masse magnétique ayant été choisie de façon que le coefficient μ_0 de la loi de Coulomb soit égal à* 1 ; c'est donc une unité dérivée, définie par la formule :

$$f = \frac{mm'}{r^2}.$$

Si les unités mécaniques choisies sont les unités C. G. S., le système d'unités ainsi défini est le **système électromagnétique C. G. S.**

L'unité électromagnétique C. G. S. de **masse magnétique** est la masse magnétique qui, placée à un centimètre d'une masse égale, la repousse avec une force d'une dyne.

L'unité électromagnétique C. G. S. de **champ magnétique** est le champ qui, agissant sur l'unité électromagnétique C. G. S. de masse magnétique, exerce sur elle une force d'une dyne. Cette unité s'appelle le **gauss** (cf. § 113).

L'unité électromagnétique C. G. S. de **flux de force magnétique** est le flux à travers une surface d'un centimètre carré d'un champ uniforme d'un gauss normal à cette surface. Cette unité s'appelle le **maxwell** (cf. § 113).

L'unité électromagnétique C. G. S. de **moment magnétique** est le moment magnétique d'un doublet magnétique formé de deux masses magnétiques égales à l'unité électromagnétique C. G. S. de masse magnétique séparées par une distance d'un centimètre.

*L'unité électromagnétique C. G. S. d'***intensité d'aimantation** est l'intensité d'aimantation d'un aimant dont le moment magnétique est égal à l'unité électromagnétique C. G. S. de moment magnétique et dont le volume est un centimètre cube.

107. Équations de dimensions des unités électromagnétiques. — Si l'on change les unités mécaniques, en conservant la convention $\mu_0 = 1$, on obtient de nouvelles unités électromagnétiques, qu'on peut calculer à l'aide de leurs équations de dimensions (§ 78).

Si, dans la formule de définition de la masse magnétique, nous faisons $m' = m$, nous obtenons l'équation de dimensions de la masse magnétique :

$$m^2 = Fr^2, \qquad m = L\sqrt{F}, \qquad m = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

De la formule de définition du champ magnétique, on tire :

$$H = \frac{F}{m} = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Les dimensions du flux de force du champ magnétique sont :

$$\Phi = H.S = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Le moment magnétique $\mathcal{M}$ d'un doublet est $\mathcal{M} = ml$; ses dimensions sont :

$$\mathcal{M} = L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Celles de l'intensité d'aimantation :

$$I = \frac{\mathcal{M}}{v} = \frac{\mathcal{M}}{L^3} = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

On remarquera que l'intensité d'aimantation I a mêmes dimensions que le champ H ; ce fait n'a d'ailleurs pas d'autre signification (cf. § 78) que d'exprimer que les deux unités correspondantes varient de la même façon quand on change la grandeur des unités fondamentales. L'intensité d'aimantation et le champ magnétique sont évidemment des grandeurs de natures différentes, et dans un système d'unités non électromagnétique, elles ont des dimensions différentes.

Si l'on forme les dimensions du produit $\mathcal{M}H$ et du rapport $\frac{\mathcal{M}}{H}$, on trouve :

$$\mathcal{M}H = L^2MT^{-2}, \qquad \frac{\mathcal{M}}{H} = L^3,$$

en accord, pour $\mu_0 = 1$, avec les formules employées aux paragraphes 105 et 102 :

$$\mathcal{M}H = \frac{4\pi^2\Sigma mr^2}{T^2} \qquad \frac{\mathcal{M}}{H} = r^3 \operatorname{tang} \alpha_2.$$

CHAPITRE XI

ÉTUDE DES MILIEUX AIMANTÉS

I. — *RÉPARTITION DES MASSES MAGNÉTIQUES A L'INTÉRIEUR D'UN AIMANT*

108. Aimantation. — Nous n'avons pas cherché jusqu'ici à préciser quelle était la répartition des masses magnétiques, dont nous admettions l'existence à la surface et à l'intérieur des aimants. Il est d'ailleurs inutile de connaître cette répartition pour calculer les actions exercées par de petits aimants en des points éloignés, ou subies par ces petits aimants dans des champs sensiblement uniformes. Sa connaissance n'est nécessaire que pour étendre les résultats à des aimants de plus grandes dimensions, par exemple pour calculer le champ en un point voisin d'un aimant.

Nous continuerons à nous placer dans le cas de l'aimantation rigide : les masses magnétiques occupent des positions fixes ; elles conservent ces positions si on sépare l'aimant en plusieurs parties. L'expérience de l'aimant brisé (*fig.* 122) nous apprend que dans ces conditions chacune des parties se comporte comme un aimant entier ; quelle que soit la portion de l'aimant que nous considérions, elle contient des quantités égales de magnétisme positif et négatif. C'est d'ailleurs là une des hypothèses fondamentales dont nous sommes partis (§ 90).

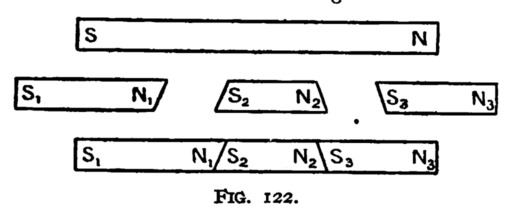


FIG. 122.

Montrons qu'elle n'est pas contradictoire avec l'existence apparente de masses magnétiques localisées au voisinage des pôles d'un aimant. Réalisons l'expérience de l'aimant brisé, avec un barreau régulièrement aimanté NS, présentant un pôle à chaque extrémité ; chacun des fragments N_1S_1, N_2S_2, N_3S_3, (*fig.* 122) présente aussi un pôle à chaque extrémité. Rapprochons-les : nous reconstituons le barreau primitif avec exactement les mêmes propriétés magnétiques, comme on peut le montrer par son spectre magnétique ; deux masses magnétiques égales en valeur absolue et de signes contraires, telles que N_1 et S_2, placées au même point, ne produisent aucun champ, et l'action du barreau composé se réduit à celle des masses magnétiques terminales S_1N_3.

Nous préciserons l'hypothèse fondamentale en admettant que, quelque loin que nous poussions la division de l'aimant en petites particules, chacune de

ces particules constitue toujours un aimant complet. Les plus petites particules qu'on puisse théoriquement obtenir sont les molécules ; bien que cette limite soit loin de pouvoir être atteinte expérimentalement, nous étendrons l'hypothèse jusque-là, et nous admettrons que chaque molécule de matière aimantée constitue un aimant.

Nous n'avons pas besoin, pour l'étude que nous allons faire, de connaître l'origine des propriétés magnétiques de la molécule. Indiquons toutefois que l'hypothèse la plus vraisemblable est celle d'Ampère : la molécule magnétique contient des charges électriques en mouvement, c'est-à-dire des courants électriques qui sont équivalents à des aimants (cf. § 131).

Les actions subies ou exercées par un aimant A sont la résultante des actions subies ou exercées par les différents éléments en lesquels on peut décomposer la matière aimantée. Nous savons que l'action subie ou exercée par un petit aimant dépend uniquement du vecteur moment magnétique qui le caracrise. Considérons un petit élément de volume dv, autour d'un point M de l'aimant A (*fig.* 123) ; il constitue un aimant de moment magnétique $\overrightarrow{dM}$; comme le moment magnétique d'un aimant est égal à la somme des moments magnétiques de ses différentes parties, $\overrightarrow{dM}$ est proportionnel à dv, et on peut définir un vecteur $\vec{I}$ par la relation :

$$\vec{I} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dv}.$$

Le vecteur $\vec{I}$ s'appelle l'**aimantation** au point M ; *sa direction, ou* **direction de l'aimantation,** *est celle du vecteur moment magnétique d'un élément de volume pris autour du point* M ; *sa grandeur est l'***intensité d'aimantation ;** *elle est égale au quotient du moment magnétique de l'élément par son volume.*

Les actions magnétiques exercées ou subies par l'élément de volume dv sont entièrement définies par son moment magnétique $\overrightarrow{dM} = \vec{I}\,dv$. Les actions magnétiques exercées ou subies par un aimant peuvent être entièrement calculées lorsqu'on connaît l'aimantation $\vec{I}$ en chaque point de la matière aimantée. C'est ce calcul que nous allons faire maintenant.

109. Calcul des actions subies par un aimant. — Supposons d'abord que l'aimant A soit placé dans un champ magnétique produit par un système d'aimants permanents B ; soit $\vec{H}$ la valeur de ce champ au point M, et V le potentiel dont il dérive. Le champ $\vec{H}$ est celui qui existait au point M avant que l'aimant A n'ait été apporté dans le champ magnétique du système B. Il est certain que le champ est modifié par la présence de l'aimant A, et qu'un élément de volume dv de cet aimant est soumis, non seulement aux forces créées par le système B, mais aussi aux forces créées par les autres parties de l'aimant A. Mais ces dernières forces sont des forces intérieures ; leur résultante pour l'ensemble de l'aimant A est nulle, et elles ne produisent aucun travail lorsqu'on le déplace. C'est le champ $\vec{H}$, produit par le système B seul, que nous avons à considérer pour calculer les forces qui agissent sur l'ensemble

de l'aimant A et le travail que peuvent fournir ces forces quand on éloigne indéfiniment l'aimant A, c'est-à-dire l'énergie potentielle mutuelle de l'aimant A et du système B.

Nous savons (§ 95) que l'énergie magnétique de l'élément de volume dv, de moment magnétique $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{I}dv$, dans le champ $\overrightarrow{H} = -\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V$, est :

$$dW = -\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{H} = \overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot dv.$$

L'énergie magnétique W de l'aimant A dans le champ $\overrightarrow{H}$ s'obtiendra en faisant la somme de l'énergie de tous les éléments contenus dans le volume total v de l'aimant ; on a :

$$W = \iiint_v \overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot dv.$$

Si les phénomènes sont exprimés analytiquement par rapport à un trièdre d'axes $Oxyz$, cette formule peut s'écrire :

$$W = \iiint_v \left(I_x \frac{\partial V}{\partial x} + I_y \frac{\partial V}{\partial y} + I_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Cette intégrale peut se transformer par une intégration par parties ; on a en effet :

$$\iiint_v I_x \frac{\partial V}{\partial x}\, dxdydz = \iint_S I_x V dydz - \iiint_v V \frac{\partial I_x}{\partial x}\, dxdydz.$$

et :

$$W = \iint_S V(I_x dydz + I_y dzdx + I_z dxdy) - \iiint_v V \left(\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} \right) dxdydz.$$

En reprenant la notation vectorielle, cette formule peut s'écrire :

$$W = \iint_S V \cdot \overrightarrow{I}\, \overrightarrow{dS} - \iiint_v V \cdot \text{div}\, \overrightarrow{I}\, dv.$$

La première intégrale est étendue à toute la surface qui limite la matière aimantée, le sens du vecteur $\overrightarrow{dS}$, porté par la normale à la surface, étant le sens $\overrightarrow{M'N}$ qui va vers l'extérieur (*fig.* 123).

Désignons par $I_n = I \cos \theta$ la projection du vecteur $\overrightarrow{I}$ sur la normale $\overrightarrow{M'N}$ dirigée vers l'extérieur, posons :

$$I_n = \sigma, \qquad -\text{div}\, \overrightarrow{I} = \rho.$$

On peut écrire :

$$W = \iint_S V \cdot \sigma dS + \iiint_v V \cdot \rho dv.$$

Si nous nous rappelons que, d'après la définition même du potentiel, l'énergie d'un système de masses magnétiques m placé dans un champ qui dérive du potentiel V est $W = \Sigma Vm$, nous voyons que *l'énergie d'un aimant A à aimantation rigide, placé dans un champ magnétique créé par un système d'aimants permanents B, est la même que celle d'un système A′ de masses magnétiques réparties à la surface de l'aimant, avec une densité superficielle $\sigma = I_n$, et à l'intérieur de l'aimant, avec une densité cubique $\rho = - div \vec{I}$.*

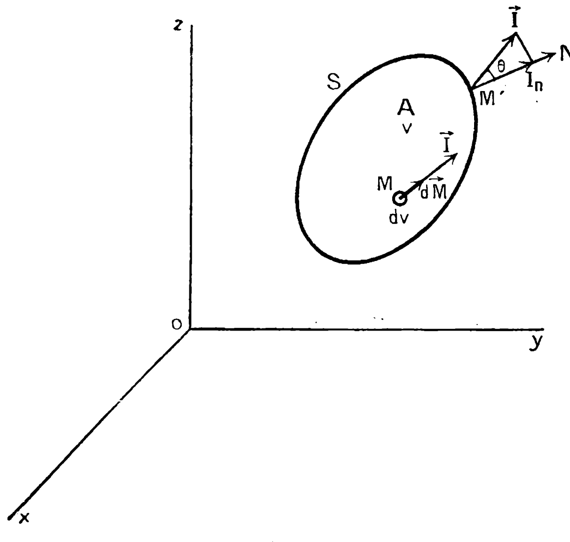


Fig. 123.

La résultante et le moment résultant du système de forces qui s'exercent sur l'aimant A, ou sur le système de masses A′ lié à l'aimant A, peuvent se calculer en calculant les dérivées partielles de l'énergie W : on obtiendra le même résultat dans les deux cas.

Nous avons montré au paragraphe 96 que l'expression des forces a une signification plus générale que celle de l'énergie ; le résultat obtenu peut s'appliquer à un aimant A quelconque, à aimantation rigide ou induite, dans un champ $\vec{H}$ quelconque, dérivant ou non d'un potentiel, créé par des aimants ou des courants.

Le système des forces magnétiques qui s'exercent sur un aimant A quelconque, placé dans un champ magnétique $\vec{H}$ quelconque, est équivalent au système des forces qui s'exercent sur le système A′ de masses magnétiques, défini par $\sigma = I_n$ et $\rho = - div \vec{I}$.

110. Potentiel et champ créés par un aimant. — Évaluons maintenant le potentiel créé en un point extérieur P par un aimant A. Le potentiel dV créé au point P par l'élément de volume dv, de moment magnétique $d\vec{M} = \vec{I}\, dv$, est (§ 97) :

$$dV = \frac{1}{\mu_0} d\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = \frac{1}{\mu_0} \vec{I} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \cdot dv.$$

Dans cette formule, r représente la distance MP, et les dérivations exprimées par le symbole $\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}$ doivent être faites par rapport aux coordonnées du point M. Elle est identique à celle qui donne l'énergie dW ; la fonction générale V qui figure dans la formule de l'énergie a ici la valeur particulière $\frac{1}{\mu_0 r}$. On peut

donc répéter les mêmes calculs, et on obtient, pour le potentiel créé par l'aimant A au point P :

$$V = \iint_S \frac{\sigma dS}{\mu_0 r} + \iiint_v \frac{\rho dv}{\mu_0 r}.$$

Cette expression est celle du potentiel newtonien créé en P par le système de masses A' : *le potentiel créé par l'aimant* A *est identique à celui que crée le système de masses* A'. *Il en est évidemment de même pour le champ magnétique*, qui est le gradient du potentiel changé de signe.

Nous aurions pu d'ailleurs déduire sans aucun calcul le résultat relatif au potentiel de celui relatif à l'énergie ; le potentiel créé en P par l'aimant A n'est en effet autre chose que l'énergie mutuelle de l'aimant A et d'une masse magnétique + 1 placée en P, et le travail recueilli en les éloignant indéfiniment l'un de l'autre est le même, qu'on déplace A ou la masse + 1.

111. Équivalence entre un aimant et un système de masses magnétiques. — En résumé, les forces subies et les champs créés par l'aimant A peuvent se calculer en le remplaçant par le système A' de masses magnétiques : c'est l'hypothèse fondamentale que nous avons prise comme point de départ de notre étude du magnétisme. Nous venons de démontrer que cette hypothèse est indépendante de l'existence des masses magnétiques, et reste valable même si l'explication réelle des phénomènes magnétiques doit être cherchée dans l'existence d'aimants moléculaires dont la nature nous est inconnue.

Nous avons en même temps montré comment on pouvait calculer la répartition des masses magnétiques si l'on connaît la répartition des aimants élémentaires ; nous avons trouvé les relations $\rho = -\operatorname{div} \vec{I}$ et $\sigma = I_n$. En général, cette seconde répartition est aussi mal connue que la première, et il est pratiquement impossible de calculer le champ au voisinage d'un aimant ou l'action d'un champ non uniforme sur un aimant de grandes dimensions.

Si l'aimant A a la forme d'un barreau cylindrique, dont la longueur est grande par rapport à la section, et si son aimantation est régulière, on pourra obtenir une première approximation en admettant que l'aimantation $\vec{I}$ est en chaque point parallèle aux génératrices du cylindre, et a une intensité I constante (*fig.* 124). Dans ces conditions, la densité cubique $\rho = -\operatorname{div} \vec{I}$ est nulle dans tout le barreau ; la densité superficielle $\sigma = I_n$ est nulle sur les faces latérales ; elle est égale en valeur absolue à l'intensité d'aimantation I sur les faces terminales, si celles-ci sont perpendiculaires aux génératrices. On peut donc remplacer le barreau par deux couches uniformes de magnétisme, de densités $\sigma = + I$ et $\sigma = - I$, placées sur les faces terminales ; les masses magnétiques totales de ces couches sont IS et — IS, en désignant par S la section du barreau.

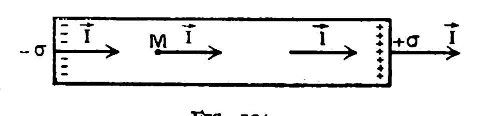


Fig. 124.

Cette répartition ne peut être considérée que comme une première approximation : l'expérience du spectre magnétique suffit à montrer qu'il y a des masses

magnétiques sur les surfaces latérales, au voisinage des extrémités, et qu'elles ne sont pas négligeables sur une longueur qui est de l'ordre de grandeur des dimensions transversales du barreau. Elle pourra être utilisée pour calculer le champ créé par le barreau en un point dont la distance au barreau est grande par rapport à ses dimensions transversales, sans être grande par rapport à sa longueur, ou pour calculer l'action sur le barreau d'un champ non uniforme, qui varie lentement au voisinage de chaque extrémité, tout en ayant des valeurs très différentes pour les deux extrémités.

II. — *CHAMP ET INDUCTION MAGNÉTIQUES*

112. Définition du champ et de l'induction magnétiques à l'intérieur d'un aimant. — Il est évidemment impossible de définir expérimentalement le champ magnétique à l'intérieur d'un aimant, et la formule trouvée tout à l'heure (§ 110) pour le potentiel créé par cet aimant :

$$V = \iint_S \frac{\sigma dS}{\mu_0 r} + \iiint_v \frac{\rho dv}{\mu_0 r} \qquad (\sigma = I_n, \quad \rho = -\operatorname{div} \vec{I}),$$

n'a de signification physique que pour les points extérieurs. Mais cette formule définit une fonction V qui reste définie et continue en tous les points de la surface et du volume de l'aimant (§ 14), ou des aimants, si l'on considère un système d'aimants quelconque. De cette fonction, considérée comme une fonction potentiel, dérive un vecteur :

$$\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V,$$

défini et continu en un point M quelconque extérieur ou intérieur aux aimants. *Par définition, ce vecteur* $\vec{H}$ *s'appellera le champ magnétique au point* M : cette nouvelle définition coïncide avec les précédentes pour tous les points extérieurs aux aimants ; elle permet d'étendre la notion de champ magnétique aux points intérieurs ; nous étudierons spécialement au paragraphe 114 la façon dont varie le vecteur $\vec{H}$ lorsqu'on traverse la surface de l'aimant.

Le champ $\vec{H}$ est le champ newtonien créé par les distributions de masses agissantes σ et ρ; il possède toutes les propriétés du champ newtonien. En particulier, on peut lui appliquer le théorème de Poisson : on a, à l'intérieur de la matière aimantée :

$$\mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = 4\pi\rho, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{div} \mu_0\vec{H} + 4\pi \operatorname{div} \vec{I} = 0.$$

Le vecteur aimantation $\vec{I}$ ne satisfait à aucune condition imposée à l'avance, car un aimant peut être constitué par la juxtaposition de parties aimantées séparément de façon quelconque. En général, $\operatorname{div} \vec{I}$ n'est pas nul, et par suite

div $\vec{H}$ n'est pas nul non plus : le flux du vecteur $\vec{H}$ n'est pas conservatif. Nous considérerons un nouveau vecteur $\vec{B}$, que nous définirons par la relation vectorielle :

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + 4\pi\vec{I}.$$

Le vecteur $\vec{B}$ sera, par définition, l'**induction magnétique** au point M. De sa définition résulte la relation suivante, qui exprime que son flux est conservatif :

$$\operatorname{div}\vec{B} = \operatorname{div}\mu_0\vec{H} + 4\pi \operatorname{div}\vec{I}, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

Remarquons que les définitions données ne font intervenir que l'état actuel de l'aimantation et du champ; elles s'appliquent donc au cas de l'aimantation induite; il en sera de même des théorèmes que nous démontrerons dans les paragraphes suivants. Les définitions et les théorèmes s'appliquent également quel que soit le mode de production du champ, pourvu qu'il dérive d'un potentiel : nous utiliserons cette remarque lors de l'étude des champs créés par les courants.

113. Propriétés du champ et de l'induction. — Les définitions des vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{B}$ sont valables en tous les points de l'espace, extérieurs ou intérieurs à la matière aimantée. A l'extérieur de la matière aimantée, où l'aimantation $\vec{I}$ est nulle, les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ ne diffèrent que par le facteur constant μ_0; ils jouissent tous deux des propriétés du champ newtonien en dehors des masses agissantes. Ils dérivent d'un potentiel : leur circulation le long d'un chemin fermé qui ne pénètre pas dans la matière aimantée est nulle. Ils ont un flux conservatif; leur flux à travers une surface fermée qui ne renferme pas de masses agissantes est nul; nous savons même (§ 90) que, dans le cas du magnétisme, on peut étendre ce théorème au cas où la surface fermée contient des aimants, puisque la masse magnétique totale d'un aimant est nulle : il suffit que la surface ne coupe pas la matière aimantée.

Étudions maintenant les phénomènes à l'intérieur de la matière aimantée. *Les deux vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{B}$, champ et induction, ne sont plus proportionnels* : la différence géométrique des vecteurs $\vec{B}$ et $\mu_0\vec{H}$, est, par définition, le vecteur $4\pi\vec{I}$; *leur direction est en général différente,* car il n'y a aucune raison pour que le vecteur aimantation en un point d'un aimant à aimantation rigide ait même direction que le champ magnétique créé en ce point par l'aimant lui-même, à plus forte raison que le champ créé par l'aimant et des aimants extérieurs, qui peuvent être quelconques.

Considérons d'abord le vecteur champ magnétique $\vec{H}$: *par définition, le champ magnétique dérive d'un potentiel* V; *sa circulation, le long d'un circuit fermé quelconque, traversant ou non la matière aimantée, est nulle.* La fonction potentiel magnétique V est continue en tous les points de l'espace, y compris ceux qui se trouvent à la surface ou à l'intérieur de la matière aimantée. Elle peut être représentée par des surfaces équipotentielles tracées, sans discon-

tinuités, dans tout l'espace. Par contre, nous avons déjà remarqué qu'en général la divergence du vecteur $\vec{H}$ n'est pas nulle, *le flux de force du vecteur champ magnétique n'est pas conservatif à l'intérieur de la matière aimantée.*

Considérons maintenant le vecteur induction magnétique $\vec{B}$. Comme le vecteur aimantation $\vec{I}$ n'a aucune raison de dériver d'un potentiel, l'*induction* $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + 4\pi\vec{I}$ *ne dérive pas en général d'un potentiel : la circulation du vecteur induction magnétique le long d'un circuit fermé traversant la matière aimantée est en général différente de zéro.*

Par contre, son flux est conservatif en tous les points de l'espace. En effet, nous avons vu que le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers une surface fermée extérieure à la matière aimantée est nul, et il résulte immédiatement de la définition de l'induction que l'on a en tous les points de la matière aimantée div $\vec{B}$ = o, c'est-à-dire que le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée, entièrement intérieure à la matière aimantée, est nul. Il reste à considérer le cas d'une surface Σ qui coupe partiellement la matière aimantée (*fig.* 125).

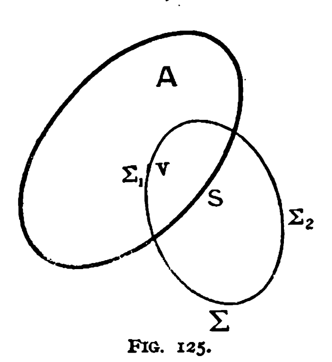


FIG. 125.

Nous ne pouvons pas appliquer directement le théorème de Green à cette surface, car elle renferme une partie de la surface de l'aimant, qui est une surface de discontinuité pour le vecteur $\vec{B}$. Nous décomposerons le flux Φ en deux parties : l'une est le flux, à travers la portion Σ_1 de la surface Σ intérieure à l'aimant, du vecteur $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + 4\pi\vec{I}$; l'autre le flux, à travers la portion Σ_2 extérieure à l'aimant, du vecteur $B = \mu_0\vec{H}$. On a :

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} (\mu_0\vec{H} + 4\pi\vec{I})\, d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \mu_0\, \vec{H}d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{H}d\vec{S} + 4\pi \iint_{\Sigma_1} \vec{I}d\vec{S}.$$

Le vecteur $\vec{H}$ est le champ newtonien créé par la distribution de masses magnétiques $\rho = -\text{div}\,\vec{I}$ et $\sigma = I_n$. D'après le théorème de Gauss, son flux à travers la surface Σ est égal au produit par $4\pi/\mu_0$ des masses magnétiques contenues dans la partie V du volume de l'aimant et sur la partie S de sa surface intérieure à la surface Σ :

$$\mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{H}d\vec{S} = 4\pi \iiint_{V} -\text{div}\,\vec{I}\, dv + 4\pi \iint_{S} \vec{I}d\vec{S}.$$

Transformons l'intégrale de volume par le théorème de Green, ce qui est

possible, puisque le vecteur $\vec{I}$ est continu dans tout le volume V ; on a :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{I}\, dv = \iint_{\Sigma_1} \vec{I}\, d\vec{S} + \iint_S \vec{I}\, d\vec{S},$$

et :

$$\mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{H}\, d\vec{S} = -4\pi \iint_{\Sigma_1} \vec{I}\, d\vec{S},$$

ce qui démontre que le flux Φ du vecteur $\vec{B}$ à travers la surface Σ est nul.

Le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers une surface fermée quelconque est nul, même si cette surface coupe la matière aimantée. Les lignes de force du champ de vecteurs $\vec{B}$ s'appellent les **lignes d'induction** ; elles peuvent être tracées d'une façon continue dans tout l'espace, et y forment des tubes d'induction fermés sur eux-mêmes (*fig.* 126) ; le flux du vecteur $\vec{B}$ s'appelle le **flux d'induction** ou **flux magnétique** ; *il conserve la même valeur à travers toutes les sections d'un même tube d'induction, que ces sections soient prises en dehors de l'aimant ou à l'intérieur de la matière aimantée.*

Les deux vecteurs induction et champ magnétiques que nous avons définis sont essentiellement distincts à l'intérieur de l'aimant, et y ont des propriétés différentes, le champ dérivant d'un potentiel, et l'induction ayant un flux conservatif. A l'extérieur de l'aimant, les deux vecteurs ne sont au contraire pas physiquement distincts : ils sont toujours parallèles, et le rapport de leurs grandeurs H et $B = \mu_0 H$ est une constante qui ne dépend que des unités choisies. Dans un système non électromagnétique, ces grandeurs ont, il est vrai, des mesures différentes ; mais c'est là le résultat d'une convention de définition, qui ne correspond à aucune réalité expérimentale. Les expériences de mesures effectivement réalisables sont toujours des expériences dans lesquelles on mesure, par la variation d'une certaine propriété, le rapport de deux grandeurs de même espèce : il est impossible de dire si une expérience mesure le rapport H_1/H_2 de deux champs ou le rapport B_1/B_2 de deux inductions, puisque ces rapports sont toujours égaux.

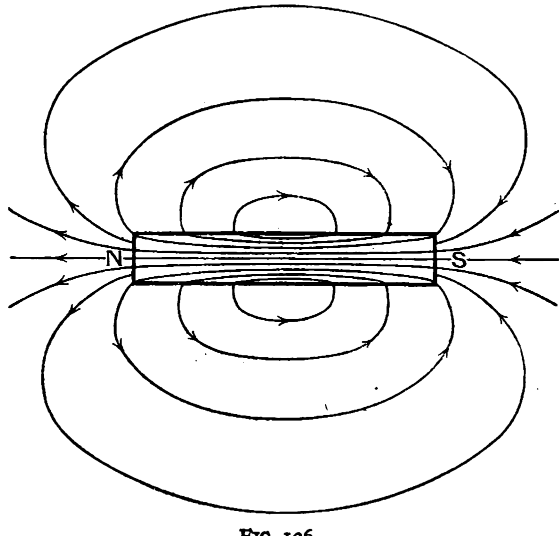


FIG. 126.

Si l'on emploie un système d'unités électromagnétiques, la relation de définition de l'induction devient :

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I},$$

relation qui montre que le champ, l'induction et l'intensité d'aimantation sont trois grandeurs ayant mêmes dimensions (cf. § 107).

En un point extérieur à la matière aimantée, le champ et l'induction deviennent identiques. L'induction magnétique se mesure donc avec la même unité que le champ magnétique, et le flux d'induction se mesure avec la même unité que le flux de force magnétique; dans le système électromagnétique C. G. S., ces unités sont le *gauss* et le *maxwell* (§ 106). Signalons toutefois que certains auteurs réservent les noms de gauss et de maxwell aux unités électromagnétiques C. G. S. d'induction et de flux d'induction, et emploient pour l'unité électromagnétique C. G. S. de champ le nom d'*œrsted* : cette distinction paraît inutile, car, d'une part, il est impossible de placer des instruments de mesure du champ et de l'induction à l'intérieur de la matière aimantée, et, d'autre part, il est impossible de savoir si des instruments placés à l'extérieur mesurent le champ ou l'induction, qui d'ailleurs doivent être exprimés en unités électromagnétiques par le même nombre.

114. Conditions aux limites. — Nous allons chercher comment varient les vecteurs champ et induction magnétiques lorsqu'on franchit la surface qui sépare le milieu aimanté du vide (ou de l'air) environnant, c'est-à-dire lorsqu'on passe d'un point A infiniment voisin de cette surface dans l'air à un point A′ infiniment voisin dans la matière aimantée. Nous désignerons par $\vec{H}$ et $\vec{B}$, $\vec{H}'$ et $\vec{B}'$ les valeurs de ces vecteurs aux points A et A′ ; nous décomposerons chacun d'eux en deux composantes, l'une dirigée suivant la normale à la surface de séparation, l'autre tangente à cette surface ; nous désignerons ces composantes par H_n, B_n, H'_n, B'_n ; H_t, B_t, H'_t, B'_t.

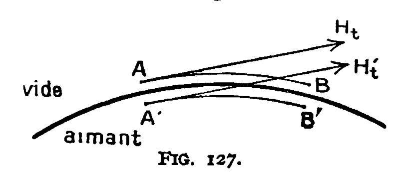


FIG. 127.

Nous savons que la fonction potentiel V est continue et a des valeurs infiniment voisines aux deux points A et A′. Prenons un autre couple quelconque de points BB′ infiniment voisins l'un de l'autre, de part et d'autre de la surface de séparation (*fig.* 127) : les différences de potentiel $V_A - V_B$, $V_{A'} - V_{B'}$ diffèrent entre elles d'une quantité infiniment petite, autrement dit sont égales. Ces différences de potentiel représentent la circulation des composantes H_t, H'_t du champ magnétique lorsqu'on parcourt les trajets égaux AB, A′B′ le long de la surface de séparation : ces circulations étant égales, quelle que soit la position des points BB′, les composantes H_t et H'_t sont égales : *la composante tangentielle du champ magnétique varie d'une façon continue lorsqu'on traverse la surface qui sépare un milieu aimanté du vide environnant, ou, d'une façon plus générale, lorsqu'on traverse la surface de séparation de deux milieux, aimantés ou non.*

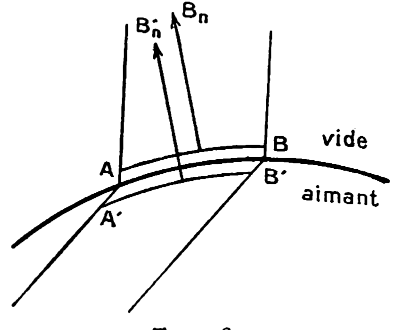


FIG. 128.

Nous savons d'autre part que le flux du vecteur induction est le même à travers les différentes sections d'un tube d'induction : considérons un tel tube, et coupons-le par deux surfaces AB et A'B' infiniment voisines, parallèles à la surface de séparation, de part et d'autre de cette surface (*fig.* 128). Les flux du vecteur $\vec{B}$ à travers ces surfaces sont les flux des composantes B_n, B'_n ; ces flux sont égaux ; les surfaces AB, A'B' sont égales à un infiniment petit près ; elles sont d'ailleurs quelconques : les composantes B_n, B'_n sont égales. *La composante normale de l'induction magnétique varie d'une façon continue lorsqu'on traverse la surface qui sépare un milieu aimanté du vide environnant, ou, d'une façon plus générale, lorsqu'on traverse la surface de séparation de deux milieux, aimantés ou non.*

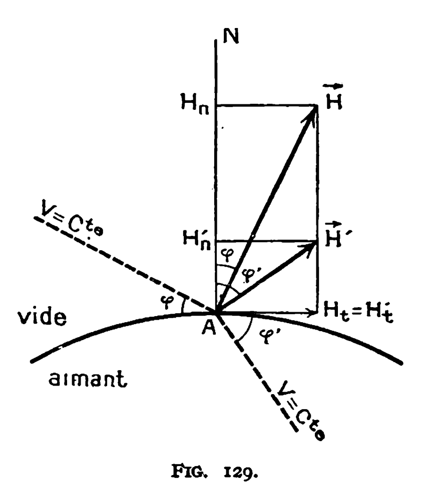


FIG. 129.

Reprenons les deux vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{H}'$, champs magnétiques dans l'air et dans la matière aimantée en un point A de la surface de séparation (*fig.* 129); ces deux vecteurs ont même composante tangentielle, ils sont donc dans un même plan normal à cette surface. Désignons par φ et φ' leurs angles avec la normale AN à la surface : on a :

$$\tang \varphi = \frac{H_t}{H_n}, \qquad \tang \varphi' = \frac{H'_t}{H'_n}.$$

Désignons par $\mu\mu_0$ le rapport entre les composantes normales B'_n et H'_n de l'induction et du champ dans la matière aimantée. On a :

$$H_t = H'_t, \qquad B_n = B'_n, \qquad \mu_0 H_n = B_n, \qquad \mu\mu_0 H'_n = B'_n ;$$

d'où :

$$\tang \varphi' = \mu \tang \varphi.$$

La surface équipotentielle qui passe au point A est normale au vecteur $\vec{H}$ dans l'air et au vecteur $\vec{H}'$ dans la matière aimantée : elle présente sur la surface de séparation des deux milieux une arête, avec deux plans tangents distincts, qui font avec la surface de séparation des angles φ et φ'.

La ligne d'induction qui passe au point A y présente un point anguleux : elle est tangente dans l'air au vecteur $\vec{B}$, c'est-à-dire au vecteur $\vec{H}$, dans l'aimant au vecteur $\vec{B}'$. Le vecteur $\vec{B}'$ dans l'aimant n'a pas en général pour direction la direction du vecteur $\vec{H}'$; le cas où ces deux vecteurs ont même direction est cependant un cas particulier important, que nous rencontrerons dans l'étude de l'aimantation induite. Il correspond le plus souvent à des cas où le rapport μ a une valeur connue, caractérisant le milieu aimanté (perméabilité, § 190). La

ligne d'induction, tangente aux vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{H}'$, reste alors dans un plan normal à la surface de séparation, et subit une *réfraction* donnée par la formule :

$$\text{tang}\,\varphi' = \mu\ \text{tang}\,\varphi.$$

Nous verrons que, lorsque le milieu aimanté est du fer, les valeurs de μ sont considérables et souvent dépassent 1.000 ; il en résulte que, à moins que l'angle φ' ne soit voisin de 90°, l'angle φ est très petit : les lignes d'induction dans l'air sont approximativement normales à la surface du fer.

Un autre cas particulier intéressant (cf. § 122) est celui où l'aimantation est normale à la surface de séparation, c'est-à-dire où le vecteur aimantation se réduit à sa composante normale I_n, la composante tangentielle I_t étant nulle. On a alors dans la matière aimantée :

$$B'_n = \mu_0 H'_n + 4\pi I_n, \qquad B'_t = \mu_0 H'_t.$$

Comme on a, à l'extérieur de la matière aimantée, $B_t = \mu_0 H_t$, on voit qu'on a à la fois :

$$B_n = B'_n, \qquad B_t = B'_t.$$

L'induction magnétique ne subit alors aucune discontinuité à la traversée de la surface de séparation.

115. Champ dans une cavité à l'intérieur de l'aimant. — Nous avons dit qu'il n'était pas possible de mesurer le champ magnétique en un point M à l'intérieur d'un aimant : on peut toutefois imaginer qu'on creuse dans l'aimant, autour du point M, une petite cavité, et qu'on mesure le champ à l'intérieur de cette cavité. Nous allons montrer que les résultats obtenus dépendent de la forme de la cavité.

D'après les résultats trouvés au paragraphe 110, on peut calculer le champ dans la cavité en remplaçant l'aimant par des masses magnétiques, réparties avec une densité cubique $\rho = -\operatorname{div}\vec{I}$ à l'intérieur de l'aimant et avec une densité superficielle $\sigma = I_n$ à sa surface. Le champ créé en M par les masses ρdv n'est pas modifié par l'existence de la cavité, à condition que son volume soit suffisamment petit : l'action des masses ρdv qui ont été supprimées lorsqu'on a enlevé la matière qui la remplissait tend en effet vers 0 avec son volume. De même le champ créé par les masses σdS réparties à la surface extérieure de l'aimant n'est pas modifié par le fait qu'on a creusé la cavité. La résultante des deux champs que nous venons de considérer, et du champ créé par les aimants extérieurs s'il y en a, constitue le champ magnétique $\vec{H}$ au point M intérieur à l'aimant; pour avoir le champ au point M de la cavité, il faut y ajouter le champ produit par les masses réparties sur la surface intérieure de l'aimant, c'est-à-dire sur les parois de la cavité, avec la densité superficielle $\sigma = I_n$. C'est ce dernier champ qui dépend de la forme de la cavité.

Supposons d'abord qu'elle ait la forme d'un cylindre très allongé, dont les génératrices sont parallèles au vecteur aimantation $\vec{I}$ (*fig.* 130) et dont les dimensions transversales sont négligeables vis-à-vis de la distance des extrémités au point M. Les masses magnétiques de densité superficielle $\sigma = I_n$ se

trouvent uniquement sur les bases du cylindre, et le champ qu'elles produisent en M est négligeable. *Le champ magnétique en un point d'une cavité allongée dans le sens de l'aimantation est égal au champ magnétique à l'intérieur de l'aimant.*

Supposons maintenant que la cavité ait la forme d'un cylindre aplati, dont les bases sont perpendiculaires au vecteur aimantation $\vec{I}$ (*fig.* 131) et dont la hauteur est négligeable vis-à-vis des dimensions transversales. Les masses magnétiques réparties sur les parois de la cavité sont alors placées sur les bases du cylindre, avec des distributions uniformes $\sigma = I$ sur celle des bases où le vecteur $\vec{I}$ est dirigé vers l'extérieur de l'aimant, c'est-à-dire vers l'intérieur de la cavité, $-\sigma = -I$ sur l'autre. Le champ que crée l'une des bases au point M est le champ newtonien créé par un plan indéfini portant une répartition uniforme des masses agissantes (§ 18) : il est égal en unités électromagnétiques

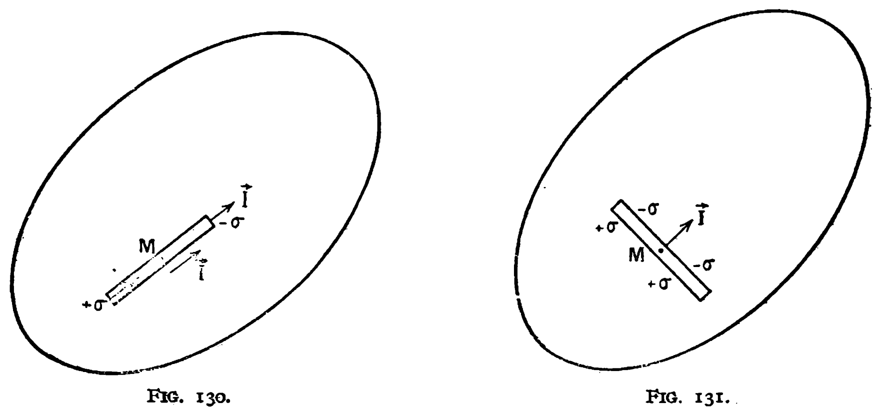


FIG. 130. FIG. 131.

à $2\pi\sigma$, perpendiculaire au plan indéfini, et dirigé dans la direction du vecteur **I**. Le champ créé en M par l'ensemble des masses magnétiques réparties sur les parois de la cavité est un vecteur égal à $4\pi\vec{I}$, et le champ total en M est $\vec{H} + 4\pi\vec{I}$. *Le champ magnétique en un point d'une fissure plane perpendiculaire à l'aimantation est égal, en unités électromagnétiques, à l'induction magnétique en ce point.*

CHAPITRE XII

FEUILLETS MAGNÉTIQUES

116. Définitions. — On appelle **feuillet magnétique** une lame infiniment mince aimantée de telle sorte que l'aimantation en chaque point soit normale à la surface, et que le moment magnétique dM d'un élément de surface du feuillet soit proportionnel à la surface dS de cet élément. Le rapport constant :

$$U = \frac{dM}{dS},$$

s'appelle la **puissance** du feuillet. La courbe qui limite la lame aimantée s'appelle le **contour** du feuillet. Les deux côtés de la lame peuvent être distingués d'après le sens du vecteur moment magnétique d'un élément de surface : nous conviendrons de prendre le sens de ce vecteur comme sens positif de la normale à la surface du feuillet ; il va de la face négative à la face positive de la lame (*fig.* 132).

On sait (§ 5) que, dans la notation vectorielle, on représente l'élément de surface dS par un vecteur $\overrightarrow{dS}$ dirigé suivant la normale à cet élément, dans la direction positive. Le vecteur moment magnétique $\overrightarrow{dM}$ de l'élément $\overrightarrow{dS}$ est précisément dirigé dans cette direction. On peut donc considérer la relation qui définit la puissance d'un feuillet comme une relation vectorielle entre

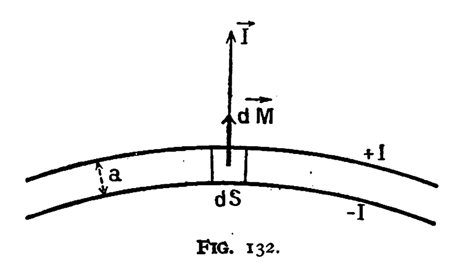


FIG. 132.

les deux vecteurs $\overrightarrow{dM}$ et $\overrightarrow{dS}$ et la grandeur scalaire U :

$$\overrightarrow{dM} = U\overrightarrow{dS}.$$

Si la lame a une épaisseur constante a, le volume de l'élément de surface dS est $dv = a\, dS$ et l'aimantation est un vecteur de grandeur constante $I = \frac{dM}{dv} = \frac{U}{a}$, normal à la lame ; le feuillet magnétique est équivalent (§ 111) à des masses magnétiques réparties sur les deux faces de la lame avec des densités superficielles uniformes $+ I$ et $- I$; la face positive de la lame porte une couche positive, la face négative une couche négative.

Pour simplifier les calculs ***nous supposerons dans tout ce chapitre les différentes grandeurs exprimées en unités électromagnétiques*** et nous nous contenterons d'indiquer à la fin du chapitre (§ 127) ce que deviennent les principales formules dans un système d'unités non électromagnétiques.

Dans le système électromagnétique C. G. S., **l'unité de puissance d'un feuillet** est la puissance d'un feuillet dont le moment magnétique par centimètre carré est égal à l'unité électromagnétique de moment magnétique. Les dimensions du moment magnétique (§ 107) sont $L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$; celles de la surface sont L^2. La puissance d'un feuillet est le rapport d'un moment magnétique à une surface; ses dimensions sont :

$$U = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

I. — *ACTIONS SUBIES PAR UN FEUILLET DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE*

117. Énergie d'un feuillet dans un champ magnétique. — Considérons un feuillet de puissance U, dont la surface Σ est limitée par un contour C, placé dans un champ magnétique $\vec{H}$ créé par un système d'aimants permanents B (*fig.* 133). L'énergie potentielle dW d'un élément du feuillet, de surface dS et de moment magnétique $\vec{dM} = U\,\vec{dS}$ est (§ 95):

$$dW = -\vec{dM}\,.\,\vec{H} = -U\vec{H}\,\vec{dS}.$$

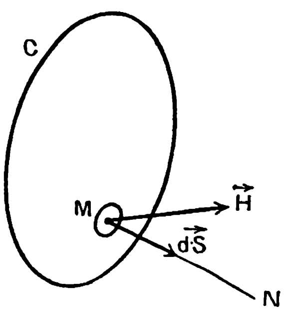


Fig. 133.

Le produit scalaire $\vec{H}\,\vec{dS}$ est, par définition, le flux $d\Phi$ du champ $\vec{H}$ à travers l'élément de surface dS ; on peut écrire, en grandeur et en signe :

$$dW = -U\,d\Phi.$$

L'énergie potentielle W du feuillet dans le champ $\vec{H}$, ou énergie mutuelle du feuillet C et du système B, est égale à la somme des énergies des éléments qui le composent ; d'autre part le flux Φ du champ $\vec{H}$ à travers la surface Σ est égale à la somme des flux à travers les éléments de surface qui la composent. On a :

$$W = \iint dW = -U\iint d\Phi = -U\Phi.$$

Le sens du vecteur $\vec{dS}$ étant défini, le flux Φ est défini sans ambiguïté : c'est le flux qui pénètre dans le feuillet par sa face négative.

Comme la lame aimantée qui constitue le feuillet est nécessairement placée

en dehors de la matière aimantée B qui crée le champ $\vec{H}$, la valeur du vecteur $\vec{H}$ en un point M du feuillet est la même que celle du vecteur induction $\vec{B}$ en ce point, avant que le feuillet n'y ait été placé : le flux Φ peut être considéré comme le flux d'induction produit à travers la surface Σ par les aimants qui créent le champ $\vec{H}$. Ce flux d'induction est conservatif : sa valeur ne dépend que du contour C qui limite la surface Σ (§ 7). On peut le calculer en remplaçant la surface Σ par une autre surface Σ', ou même par une surface Σ'' qui coupe la matière aimantée B, pourvu que ces surfaces aient même contour et que leurs faces positives se correspondent. Deux feuillets de même puissance, dont les surfaces sont Σ et Σ', forment avec le système d'aimants B deux systèmes dont l'énergie potentielle est la même (*fig.* 134).

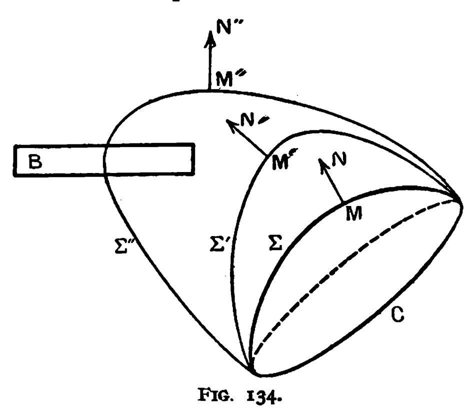


FIG. 134.

En résumé, *l'énergie potentielle d'un feuillet placé dans un champ magnétique créé par des aimants permanents est égale en valeur absolue et de signe contraire au produit de la puissance du feuillet par le flux d'induction qui le traverse, en pénétrant par la face négative. Elle ne dépend de la position du feuillet dans le champ que par la position de son contour, et ne dépend pas de sa surface.*

118. Travail des forces magnétiques dans le déplacement d'un feuillet. — Si les liaisons imposées au feuillet C lui permettent de se déplacer dans le champ créé par le système d'aimants permanents B, il effectuera de lui-même, sous l'action des forces magnétiques, ceux de ses déplacements qui diminuent son énergie potentielle. C'est là un théorème général de mécanique, qui revient simplement à dire qu'un corps soumis à une force tend à se déplacer dans le sens de la force, c'est-à-dire dans le sens où elle accomplit un travail positif. Le feuillet se déplacera de façon que son énergie potentielle $W = -U\Phi$ diminue, c'est-à-dire que le flux Φ augmente. Il sera en équilibre stable quand son énergie potentielle sera minimum, c'est-à-dire quand le flux Φ sera maximum.

Un feuillet placé dans un champ magnétique tend à se déplacer de façon à embrasser le plus grand flux possible par sa face négative ; il est en équilibre stable lorsque ce flux a la valeur maximum compatible avec les liaisons.

Si nous déplaçons le feuillet C, de manière à l'amener d'une position C_1, où il est traversé par le flux Φ_1, à une position C_2, où il est traversé par le flux Φ_2, l'énergie potentielle du système C + B passe d'une valeur $W_1 = -U\Phi_1$ à une valeur $W_2 = -U\Phi_2$. Dans ce déplacement, les forces magnétiques qui agissent sur le feuillet produisent un travail $\mathcal{T}$, qui est égal à la diminution de l'énergie potentielle du système, puisqu'il n'y a pas d'autres échanges d'énergie entre le système et le milieu extérieur. On a :

$$\mathcal{T} = W_1 - W_2 = U(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Le travail accompli par les forces magnétiques qui agissent sur un feuillet dans le déplacement de ce feuillet est égal au produit de la puissance du feuillet par la variation du flux qui le traverse.

Dans le déplacement considéré, le contour C du feuillet décrit une surface Σ, limitée par ses deux positions C_1 et C_2 (*fig.* 135). Elle forme, avec les deux positions Σ_1 et Σ_2 de la surface du feuillet, une surface fermée. Le sens positif $\overrightarrow{M_1N_1}$ de la normale au feuillet Σ_1 et le sens positif $\overrightarrow{M_2N_2}$ de la normale au feuillet Σ_2 sont dirigés, l'un vers l'extérieur, l'autre vers l'intérieur de la surface fermée. Choisissons comme sens positif de la normale à la surface Σ le sens $\overrightarrow{MN}$ qui est le même, par rapport à la surface fermée, que le sens $\overrightarrow{M_1N_1}$: dans la figure 135, ce sens est celui qui est dirigé vers l'extérieur de la surface fermée. Cette convention une fois faite, le flux d'induction à travers la surface Σ est défini sans ambiguïté : soit Φ sa valeur. Ce flux, qui est le flux à travers la surface décrite par le contour du feuillet dans son déplacement, s'appelle le **flux coupé par ce contour.**

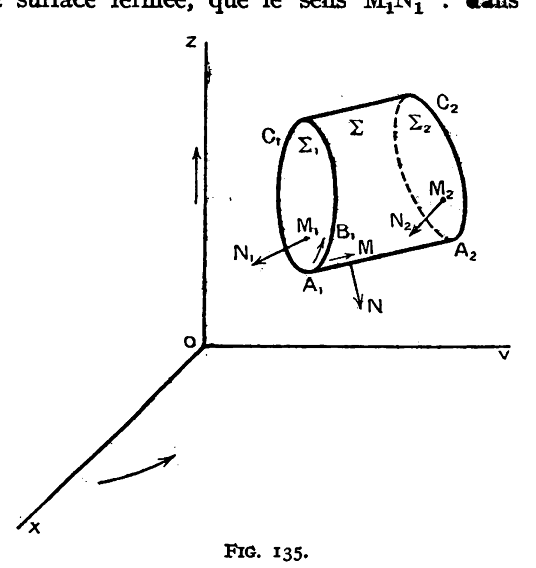


FIG. 135.

Évaluons le flux d'induction total qui traverse la surface fermée, dans le sens défini par la direction de normale $\overrightarrow{M_1N_1}$: d'après les définitions données et les sens choisis pour les normales M_2N_2 et MN, ce flux est $\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi$. Le flux d'induction étant conservatif, ce flux total est nul, et on a $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. L'expression du travail des forces magnétiques se met alors sous la forme :

$$\mathcal{T} = U\Phi.$$

Avec les conventions de signes faites, *le travail accompli par les forces magnétiques qui agissent sur un feuillet dans le déplacement de ce feuillet est égal au produit de la puissance du feuillet par le flux d'induction coupé par son contour.*

Les théorèmes que nous venons d'établir, qui concernent la position d'équilibre et le travail des forces électromagnétiques, ne font intervenir que les valeurs des forces et des champs pour les différentes positions du feuillet. Ils ont par suite une signification plus générale que les théorèmes sur l'énergie, et s'appliquent au déplacement d'un feuillet de puissance constante dans un champ magnétique invariable, quelle que soit la façon dont ce champ est créé, par des aimants permanents ou par des courants constants (§ 96).

Nous allons exprimer autrement la convention de signe faite pour l'évaluation du flux Φ, et la rapporter au sens du déplacement et à un sens de par-

cours choisi sur le contour C du feuillet : cette nouvelle forme nous sera particulièrement utile dans le cas des courants électriques, que nous assimilerons aux feuillets. Il nous faut d'abord choisir le **sens positif de parcours le long du contour** C : nous choisirons celui qui est au sens positif de la normale à la surface du feuillet, ce que le sens positif de rotation dans un des plans de coordonnées (Ox vers Oy) est au sens positif de l'axe (Oz) perpendiculaire à ce plan. Avec le choix que nous avons fait, une fois pour toutes, du sens du trièdre de coordonnées (§ 93), *c'est le sens dans lequel il faut tourner un tire-bouchon pour qu'il progresse dans la direction positive de la normale au feuillet ;* ou encore, *c'est le sens qui traverse des pieds à la tête un observateur placé sur le contour du feuillet de telle sorte que, lorsqu'il regarde vers l'intérieur du feuillet, il ait la normale positive, c'est-à-dire la face positive du feuillet, à sa gauche.*

Si ce dernier observateur, placé sur un élément A_1B_1 du contour C_1, regarde la surface Σ_1 il voit vers sa gauche la normale positive $\overrightarrow{M_1N_1}$ à cette surface ; si maintenant il se tourne de façon à regarder la surface Σ, décrite par l'élément A_1B_1 dans son déplacement, il voit vers sa droite la normale positive $\overrightarrow{MN}$ à cette surface, d'après la définition donnée de cette normale, par continuité à partir de la direction $\overrightarrow{M_1N_1}$.

La convention de signe faite pour l'évaluation du flux coupé est donc que le sens positif $\overrightarrow{MN}$ de la normale à la surface Σ est à droite d'un observateur, placé suivant le sens positif $\overrightarrow{A_1B_1}$ du contour C_1, et regardant dans la direction A_1A_2 du déplacement (*fig.* 135 et 136). Le flux coupé correspondant à la portion de la surface Σ décrite par l'élément A_1B_1 est positif si le champ $\vec{H}$ est du même côté de cette surface que la normale $\overrightarrow{MN}$ (*fig.* 136), c'est-à-dire est aussi à droite de l'observateur considéré ; autrement dit, le flux coupé est positif si le trièdre $A_1B_1A_2H$ est en sens inverse du trièdre fondamental, ou, ce qui est identique, si le trièdre $A_1B_1HA_2$ est de même sens que le trièdre fondamental, c'est-à-dire à gauche. Nous pouvons énoncer cette règle sous la forme suivante :

Fig. 136.

Le flux coupé par un élément du contour du feuillet est positif si le déplacement s'effectue vers la gauche pour un observateur placé sur cet élément dans le sens positif, et regardant dans la direction du champ magnétique. Il est négatif si le déplacement s'effectue vers la droite.

119. Forces agissant sur un feuillet. — L'expression analytique des projections sur trois axes Ox, Oy, Oz de la résultante et du moment résultant du système des forces magnétiques exercées sur un feuillet C par un système d'aimants permanents B peut se déduire de l'expression de l'énergie potentielle $W = -U\Phi$, par des relations que nous avons déjà employées plusieurs fois (déplacements des conducteurs électriques à charge constante, § 65 ;

forces magnétiques agissant sur un petit aimant, § 96). On obtient :

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x} = U\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \qquad L = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = U\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}.$$

La résultante et le moment résultant du système de forces ne dépendent que de la puissance du feuillet et du flux Φ à travers son contour ; on peut alors se proposer d'en chercher une expression qui ne dépende que des données géométriques qui définissent ce contour, et des valeurs du champ magnétique en ses divers points. Nous allons montrer qu'on peut trouver un système, formé de forces appliquées aux éléments du contour, équivalent au système réel des forces magnétiques qui agissent sur le feuillet.

Pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit que le travail accompli par ces deux systèmes, pour un déplacement élémentaire quelconque, soit le même. Le travail — dW accompli par les forces magnétiques dans un déplacement élémentaire, dans lequel le flux coupé par le contour du feuillet est $d\Phi$, est égal à U$d\Phi$. Si l'on désigne par $d\varphi$ le flux coupé dans ce déplacement par un élément $\vec{ds}$ du contour, le flux $d\Phi$ est égal à la somme des flux $d\varphi$, le travail U$d\Phi$ est la somme des termes U$d\varphi$. Appliquons à chaque élément $\vec{ds}$ une force $\vec{f}$ telle que son travail $d\mathfrak{T}$ dans le déplacement élémentaire soit U$d\varphi$: la somme des travaux des forces $\vec{f}$ est égale à U$d\Phi$, le système formé par les forces $\vec{f}$ est équivalent au système des forces magnétiques réelles.

Reste à déterminer la force $\vec{f}$ appliquée à l'élément $\vec{ds}$. Représentons en A_1B_1 (*fig.* 137) l'élément $\vec{ds}$, en A_1D_1 le champ $\vec{H}$ au point A_1 ; soit α l'angle du champ $\vec{H}$ et de l'élément $\vec{ds}$; faisons subir à l'élément $\vec{ds}$ une translation $\vec{dl}$ quelconque, représentée par A_1A_2. La surface décrite par l'élément $\vec{ds}$ dans ce déplacement est le parallélogramme $A_1B_1A_2B_2$; le flux coupé $d\varphi$ est le flux du vecteur $\vec{H}$ à travers cette surface. Il est représenté, en valeur absolue, par le volume du parallélépipède $A_1B_1A_2B_2D_1E_1D_2E_2$, construit sur les trois vecteurs $\vec{ds}$, $\vec{dl}$ et $\vec{H}$ (§ 5). Menons par le point A_1 la normale A_1P à la face $\vec{H}\vec{ds}$ $(A_1B_1D_1E_1)$; soit a_2 le point où elle coupe la face opposée $A_2B_2D_2E_2$, et dn la longueur A_1a_2. La longueur dn est la hauteur du parallélépipède correspondant à la face $A_1D_1B_1E_1$, dont l'aire est Hds sin α ; le volume du parallélépipède est :

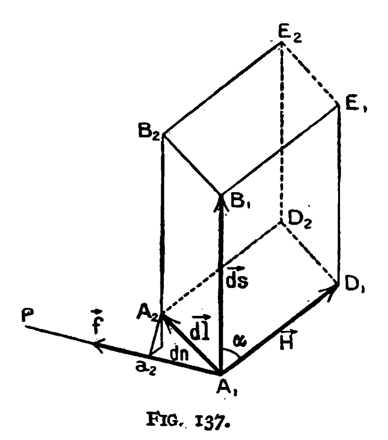


FIG. 137.

$$d\varphi = ds\,\mathrm{H}\sin\alpha\,.\,dn,$$

et le travail élémentaire que nous cherchons à représenter est :

$$d\mathfrak{T} = \mathrm{U}\, d\varphi = \mathrm{U} \,.\, \mathrm{H}\, ds \sin \alpha \,.\, dn.$$

Cette expression est le produit d'une quantité, U.Hds sin α, qui ne dépend pas du déplacement $\vec{dl}$, par une longueur, $dn = \mathrm{A}_1 a_2$, qui est la projection du déplacement $\vec{dl}$ sur une droite fixe $\mathrm{A}_1\mathrm{P}$, perpendiculaire aux deux directions $\vec{\mathrm{H}}$ et $\vec{ds}$. Elle représente, pour un déplacement $\vec{dl}$ quelconque, le travail d'une force $\vec{f}$ dirigée suivant la droite $\mathrm{A}_1\mathrm{P}$, et égale à UHds sin α : c'est la force $\vec{f}$ cherchée.

Précisons le sens de cette force. Rappelons que le sens de l'élément $\vec{ds}$ est défini par un observateur placé sur l'élément $\vec{ds}$, regardant le feuillet, et ayant sa face positive à sa gauche. Le flux coupé $d\varphi$ et par conséquent le travail $d\mathfrak{T} = \mathrm{U}d\varphi$ sont positifs (§ 118) si le déplacement $\vec{dl}$ est dirigé vers la gauche d'un observateur placé sur l'élément $\vec{ds}$ et regardant dans la direction du champ $\vec{\mathrm{H}}$: la force $\vec{f}$ est dirigée dans le sens ainsi défini.

En résumé, *le système des forces électromagnétiques agissant sur un feuillet de puissance* U *placé dans un champ magnétique* $\vec{\mathrm{H}}$ *est équivalent à un système de forces appliqué aux éléments du contour du feuillet. La force* $\vec{f}$ *appliquée à un élément* $\vec{ds}$ *est perpendiculaire au plan défini par l'élément* $\vec{ds}$ *et le champ magnétique* $\vec{\mathrm{H}}$, *dirigée vers la gauche d'un observateur placé suivant l'élément* $\vec{ds}$ *et regardant dans la direction du champ* $\vec{\mathrm{H}}$, *et égale, si* α *est l'angle de l'élément* $\vec{ds}$ *et du champ* $\vec{\mathrm{H}}$, *à* U. H *ds sin* α.

On peut encore dire que la force $\vec{f}$ est dirigée dans un sens tel que le trièdre $\vec{ds}$, $\vec{\mathrm{H}}$, $\vec{f}$ soit direct, et que sa grandeur est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs U $\vec{ds}$ et $\vec{\mathrm{H}}$: on reconnaît la définition du produit vectoriel (§ 93). La force $\vec{f}$ appliquée à un élément $\vec{ds}$ est le produit vectoriel du vecteur U$\vec{ds}$ par le vecteur $\vec{\mathrm{H}}$:

$$\vec{f} = \mathrm{U}\vec{ds} \wedge \vec{\mathrm{H}}.$$

Les forces qui s'exercent sur un feuillet ne dépendent évidemment que des valeurs du champ magnétique aux différents points du feuillet dans sa position actuelle. Le théorème que nous venons de démontrer s'applique, quelle que soit la façon dont ce champ magnétique est produit.

120. Théorème de Stokes et potentiel-vecteur. — Considérons un champ de vecteurs quelconque $\vec{\mathrm{A}}$. On appelle **rotationnel** du vecteur $\vec{\mathrm{A}}$, et

on désigne par rot $\vec{A}$, un vecteur $\vec{B}$, dont les composantes B_x, B_y, B_z sont données, à partir des composantes A_x, A_y, A_z du vecteur $\vec{A}$, par les relations :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Ce sont ces trois relations qui sont résumées par la notation symbolique :

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}.$$

Le **théorème de Stokes** s'énonce en disant que la *circulation d'un vecteur le long d'une courbe fermée* C *est égale au flux de son rotationnel à travers une surface* Σ *quelconque limitée par cette courbe.* Il s'exprime par la relation :

$$\iint_\Sigma \vec{B}\,\vec{dS} = \int_C \vec{A}\,\vec{ds},$$

ou, en définissant analytiquement les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{A}$ par leurs composantes par rapport à trois axes *oxyz* :

$$\iint_\Sigma B_x dydz + B_y dzdx + B_z dxdy = \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Il suppose que le sens de parcours de la courbe fermée C et le sens de la normale à la surface Σ sont liés par la convention définie par le sens du trièdre des axes (*fig.* 138).

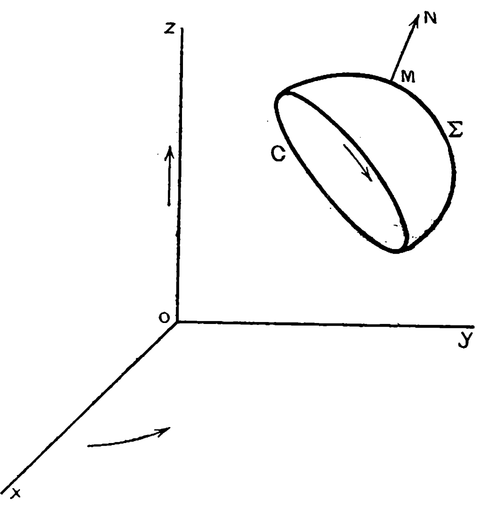


FIG. 138.

Nous nous contenterons d'en rappeler la démonstration dans le cas où la surface Σ est la surface d'un rectangle élémentaire MNPQ dont les côtés dx et dy sont parallèles aux axes *ox* et *oy* (*fig.* 139); le sens positif de la normale est le sens *oz*, le sens de circulation est le sens MNPQ. Nous désignons par A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z les valeurs des composantes des deux vecteurs au centre O du rectangle. Le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers la surface Σ est égal à $B_z dxdy$. Pour évaluer la circulation du vecteur $\vec{A}$ le long du contour C du rectangle, prenons d'abord les deux côtés $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$: la circulation le long d'un de ces côtés est celle de la composante parallèle à *oy*, qui a pour valeur, d'après son développement en série limité au premier

terme, en D': $A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{dx}{2}$, et en D : $A_y - \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{dx}{2}$. La figure montre que le parcours $\overrightarrow{MN}$ est égal à $+ dy$, le parcours $\overrightarrow{PQ}$ à $- dy$. La somme des termes correspondant à ces deux côtés dans la circulation est donc :

$$\left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy - \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy = \frac{\partial A_y}{\partial x}dxdy.$$

De même les deux autres côtés $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{QM}$ fournissent les termes :

$$-\left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx + \left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx = -\frac{\partial A_x}{\partial y}dxdy.$$

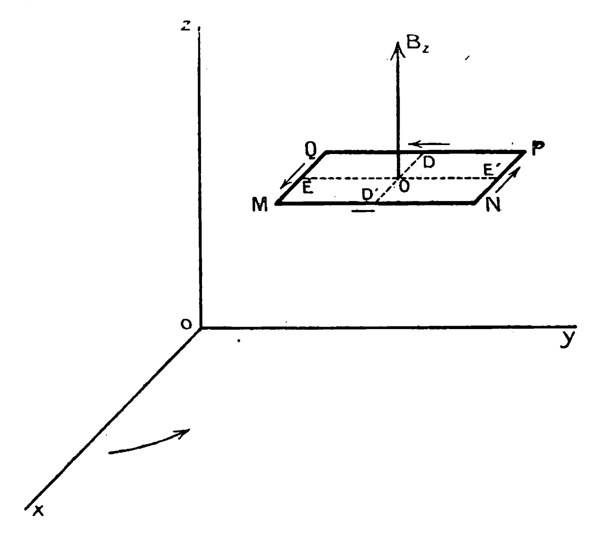


FIG. 139.

En égalant le flux du vecteur $\overrightarrow{B}$ à la circulation du vecteur $\overrightarrow{A}$, on obtient :

$$B_z dxdy = \frac{\partial A_y}{\partial x}dxdy - \frac{\partial A_x}{\partial y}dxdy; \qquad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Il suffit, pour étendre la démonstration à une surface Σ quelconque, de la décomposer en éléments parallèles aux plans de coordonnées.

Il résulte du théorème de Stokes que le flux du vecteur $\overrightarrow{B} = \text{rot}\,\overrightarrow{A}$, qui ne dépend que du contour limitant la surface à travers laquelle on évalue le flux, est conservatif. On a, quel que soit le champ de vecteurs A :

$$\text{div. rot}\,\overrightarrow{A} = 0.$$

On vérifiera aisément cette identité, en formant cette expression à l'aide des dérivées secondes des composantes A_x, A_y, A_z.

On remarquera que, si le vecteur $\vec{A}$ dérive d'un potentiel, son rotationnel est identiquement nul : les trois conditions nécessaires pour qu'un vecteur $\vec{A}$ dérive d'un potentiel (§ 4) expriment en effet que les trois composantes de rot $\vec{A}$ sont nulles.

Inversement, si l'on se donne un champ de vecteurs $\vec{B}$ dont le **flux est** conservatif, c'est-à-dire satisfaisant à la condition div $\vec{B} = 0$, il est possible, en général, de trouver un vecteur $\vec{A}$ dont le vecteur $\vec{B}$ soit le rotationnel. Les composantes A_x, A_y, A_z sont définies par trois équations aux dérivées partielles : il existe une infinité de solutions, c'est-à-dire une infinité de vecteurs $\vec{A}$ satisfaisant à ces équations. Il est évident, en effet, que l'on peut ajouter au vecteur $\vec{A}$ un vecteur $\vec{A}'$ qui dérive d'une fonction potentiel quelconque, sans modifier son rotationnel. On profite de cette indétermination pour lui imposer de satisfaire à la condition div $\vec{A} = 0$: le vecteur $\vec{A}$ ainsi défini à partir du champ de vecteurs $\vec{B}$ s'appelle le **potentiel-vecteur** de ce champ.

Le vecteur induction magnétique $\vec{B}$ satisfait partout à la condition div $\vec{B} = 0$; *il admet un potentiel-vecteur* $\vec{A}$, *et le flux d'induction* Φ *à travers une surface quelconque est égal à la circulation,* $\int \vec{A}\,\vec{ds}$, *du potentiel-vecteur le long de la courbe fermée* C *qui limite cette surface.*

Nous pouvons utiliser cette propriété pour exprimer l'énergie mutuelle d'un feuillet C et d'un système d'aimants B sous une forme qui ne fasse intervenir que le contour du feuillet, et non sa surface. Cette énergie est égale à $-\,\mathrm{U}\Phi$, Φ étant le flux d'induction, créé par le système B; qui traverse une surface Σ, limitée par le contour C, avant que le feuillet n'y ait été placé (§ 117). *L'énergie potentielle d'un feuillet* C *dans un champ magnétique créé par un système d'aimants permanents* B *est égale en valeur absolue et de signe contraire au produit par la puissance du feuillet de la circulation, le long du contour du feuillet, du potentiel-vecteur de l'induction magnétique due au système* B *seul :*

$$\mathrm{W} = -\,\mathrm{U}\int_{\mathrm{C}} \vec{A}\,\vec{ds}.$$

II. — CHAMP CRÉÉ PAR UN FEUILLET

121. Potentiel et champ magnétiques créés par un feuillet. — Considérons un feuillet magnétique, de puissance U et de surface Σ, limité par un contour C, et cherchons à calculer le potentiel créé par ce feuillet en un point P. Par définition, ce potentiel est le travail que peut produire la force magnétique qui agit sur une masse magnétique $+1$, lorsqu'on la déplace du point P jusqu'en un point indéfiniment éloigné ; il est égal au travail qu'on peut recueillir en écartant indéfiniment le feuillet de la masse magnétique $+1$

placée en P, c'est-à-dire à l'énergie mutuelle du feuillet et de cette masse (cf. §§ 97 et 110). On a (§ 117) :

$$V = - U\Phi,$$

le flux Φ étant le flux à travers la surface Σ du feuillet du champ magnétique produit par la masse + 1 placée en P ; ce flux est défini sans ambiguïté, le sens positif de la normale à cette surface étant défini.

On sait (§ 15) que ce flux est égal à l'angle solide Ω du cône sous lequel on voit du point P la face négative du feuillet. On a :

$$V = - U\Omega.$$

Le potentiel magnétique créé en un point P *par un feuillet magnétique est égal en valeur absolue et de signe contraire au produit par la puissance du feuillet de l'angle solide du cône sous lequel on voit du point* P *la face négative du feuillet.*

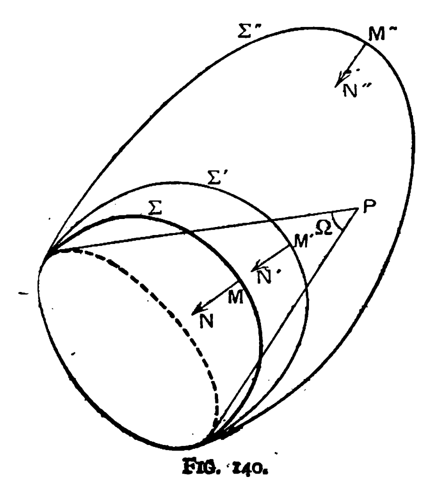


FIG. 140.

Ce potentiel ne dépend pas de la surface du feuillet ; il ne dépend que de son contour. Il est le même pour deux feuillets Σ et Σ' ayant même puissance U et même contour C (*fig.* 140), à condition que le point P soit d'un même côté par rapport aux deux feuillets. Il sera différent pour un feuillet Σ'', vu du point P par la face opposée (cf. § 15).

Supposons que le point P vienne en un point A infiniment voisin de la face négative du feuillet, et soit Ω la valeur de l'angle solide sous lequel on voit du point A la face négative du feuillet (*fig.* 141) ; le potentiel en A est :

$$V_A = - U\Omega.$$

Prenons un point B, infiniment voisin du point A et de l'autre côté du

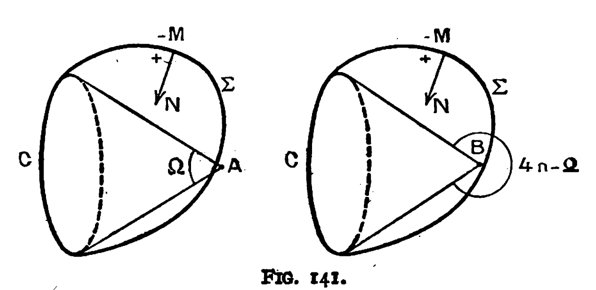


FIG. 141.

feuillet : la figure montre immédiatement que l'angle solide sous lequel est vue du point B la face *positive* du feuillet est $4\pi - \Omega$. Le potentiel en B est :

$$V_B = U(4\pi - \Omega)$$

et l'on a :

$$V_B - V_A = 4\pi U.$$

Entre deux points infiniment voisins, situés de part et d'autre de la surface du feuillet, il existe une différence de potentiel magnétique égale à $4\pi U$, *le potentiel étant plus grand du côté de la face positive.*

Le champ magnétique créé par le feuillet peut se calculer à partir de la fonction potentiel V ; on a :

$$\vec{H} = -\vec{\text{grad}}\,V = U\,\vec{\text{grad}}\,\Omega.$$

Le calcul que nous avons fait de la fonction potentiel ne s'applique qu'à des points situés en dehors de la matière aimantée qui constitue le feuillet. Mais nous savons (§ 112) qu'on peut étendre la définition de la fonction potentiel aux points intérieurs à l'aimant, et définir en ces points un vecteur $\vec{H}$, champ magnétique, qui dérive toujours d'un potentiel. Considérons (§ 116) le feuillet comme formé de deux surfaces parallèles, séparées par une distance a, et portant des couches uniformes de magnétisme, de densités $+ I$ et $- I$ (*fig.* 142) ; la puissance du feuillet est $U = Ia$, et le champ $\vec{H}$ est le champ newtonien créé par ces deux couches. L'épaisseur a doit être regardée comme infiniment petite; pour calculer le champ $\vec{H}$ en un point P intérieur au feuillet, considérons autour du point P un élément du feuillet de surface dS, dont les dimensions, quoique infiniment petites, soient grandes par rapport à a (cf. § 30). Le champ $\vec{H}$ est la somme du champ $\vec{h}$ créé par la partie du feuillet extérieure à l'élément dS, et du champ $\vec{h'}$, créé par les deux plans chargés uniformément auxquels on peut assimiler les deux faces de l'élément dS; ce dernier champ est normal à la surface du feuillet, dirigé de la face positive à la face négative, et égal à $4\pi I$. Lorsqu'on passe, par le trajet BA situé à l'intérieur de la matière aimantée, du point B de la face positive au point A de la face négative, la circulation du champ $\vec{h'}$ est égale à $4\pi I \times a = 4\pi U$, tandis que celle du champ $\vec{h}$ est négligeable, parce que sa grandeur h reste finie, tandis que la longueur a est infiniment petite. La circulation du champ $\vec{H} = \vec{h} + \vec{h'}$ est donc égale à $4\pi U$, à un infiniment petit près, et la différence de potentiel :

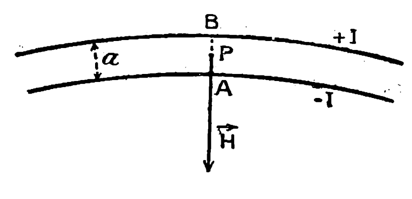


FIG. 142.

$$V_B - V_A = 4\pi U.$$

a bien la même valeur, qu'on la calcule pour un trajet qui ne coupe pas la matière aimantée ou pour un trajet qui la traverse.

En résumé, le champ magnétique créé par un feuillet est un vecteur, défini en tous les points de l'espace, dérivant d'un potentiel parfaitement déterminé. Il présente une discontinuité à la traversée des surfaces qui limitent le feuillet :

l'épaisseur a du feuillet étant infiniment petite, le champ intérieur $-4\pi\vec{I}$ doit être considéré comme infiniment grand. La fonction potentiel est une fonction continue et uniforme : sa variation est infiniment rapide dans l'épaisseur du feuillet, et a pour grandeur $4\pi U$ lorsqu'on passe de la face négative à la face positive. Pour calculer sa valeur en un point P, il est nécessaire de savoir de quel côté du feuillet se trouve le point P : suivant le côté où se trouve le point P, le potentiel y a l'une ou l'autre des deux valeurs, $-U\Omega$ ou $U(4\pi-\Omega)$, qui diffèrent entre elles de $4\pi U$, et ne dépendent que du contour du feuillet. Le champ magnétique en P a la valeur $U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Omega$, qui ne dépend que du contour du feuillet. Mais ces formules ne sont valables qu'autant qu'on est assuré que le point P est en dehors de la matière aimantée.

122. Induction magnétique. — L'étude du vecteur $\vec{B}$, induction magnétique, ne présente pas les mêmes difficultés : l'aimantation étant normale à la surface qui limite la matière aimantée, il reste continu à la traversée de cette surface (§ 114). A l'extérieur du feuillet, il est égal au champ magnétique; il est continu à travers l'épaisseur, infiniment petite, du feuillet : il peut être calculé en un point quelconque de l'espace, à partir de l'angle solide Ω sous lequel on voit de ce point le contour du feuillet, par la formule :

$$\vec{B} = U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Omega,$$

que ce point soit situé à l'intérieur ou à l'extérieur de la matière aimantée. *La valeur du vecteur induction en un point* P *ne dépend que du contour du feuillet ; elle est indépendante, sans aucune restriction, de la position de sa surface.*

Le champ de vecteurs $\vec{B}$ peut être représenté par les *lignes d'induction*, tangentes en chaque point au vecteur $\vec{B}$ en ce point. En dehors de la matière aimantée, ces lignes se confondent avec les lignes de force du champ magnétique, et sont normales aux surfaces équipotentielles $\Omega = C^{te}$. Elles se prolongent à l'intérieur du feuillet sans aucune discontinuité. Ce sont des courbes fermées, embrassant le contour du feuillet (*fig.* 143).

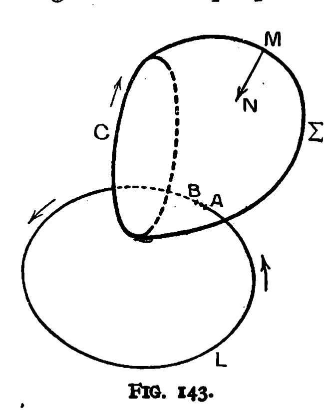


FIG. 143.

Les lignes de force du champ magnétique sont dirigées dans le sens des potentiels décroissants : elles vont d'un point B de la face positive à un point A de la face négative. Les lignes d'induction sont identiques aux lignes de force à l'extérieur du feuillet : la ligne d'induction L va, à l'extérieur du feuillet, du point B au point A, et *traverse le feuillet*, du point A au point B, de la face négative à la face positive, *dans le sens positif de la normale au feuillet.* On peut encore dire, en reprenant nos conventions habituelles sur la définition du sens de parcours du contour C et sur le sens du trièdre des axes, que *le vecteur induction, à l'intérieur du contour C, est dirigé vers la gauche d'un observateur placé sur le contour dans le sens positif et regardant vers l'intérieur.*

Enfin rappelons que les théorèmes généraux (§ 113) nous apprennent que le

flux du vecteur $\vec{B}$ est conservatif : le flux est le même à travers toutes les sections d'un même tube d'induction, quelle que soit leur position et leur orientation.

123. Potentiel d'induction. — Évaluons la circulation $\mathfrak{C}$ du vecteur induction $\vec{B}$ d'un point M_1 à un point M_2, le long d'une courbe Γ (*fig.* 144). Si la courbe Γ ne coupe pas la surface du feuillet, le vecteur $\vec{B}$ est égal en tous ses points au vecteur $\vec{H}$, et la circulation $\mathfrak{C}$ est égale à la différence de potentiel magnétique entre les deux points M_1 et M_2 :

$$\mathfrak{C} = \int_{\Gamma} \vec{B}\vec{ds} = V_1 - V_2.$$

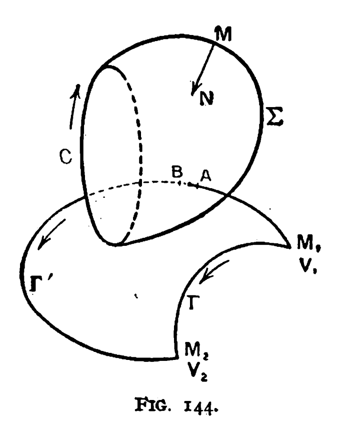


FIG. 144.

Supposons maintenant que nous prenions une courbe Γ' traversant le feuillet, par exemple de la face négative à la face positive, et prenons sur cette courbe deux points A et B infiniment voisins du feuillet, de part et d'autre de la surface du feuillet. Par suite de la continuité du vecteur induction, sa circulation le long du trajet AB est infiniment petite, et peut être négligée ; sa circulation le long des trajets M_1A et BM_2 peut être évaluée, comme tout à l'heure, à l'aide de la différence de potentiel magnétique ; on a :

$$\mathfrak{C} = \int_{\Gamma'} \vec{B}\vec{ds} = \int_{M_1A} \vec{H}\vec{ds} + \int_{BM_2} \vec{H}\vec{ds} = V_1 - V_A + V_B - V_2.$$

Nous savons que $V_B - V_A$ est égal à $4\pi U$; on a :

$$\mathfrak{C} = \int_{\Gamma'} \vec{B}\vec{ds} = V_1 - V_2 + 4\pi U.$$

D'une façon générale, si l'on évaluait la circulation le long d'une courbe traversant un nombre quelconque de fois, dans un sens ou dans l'autre, la surface du feuillet, on trouverait :

$$\mathfrak{C} = \int_{M_1M_2} \vec{B}\vec{ds} = V_1 - V_2 + k \cdot 4\pi U,$$

k étant un nombre entier, positif ou négatif. La circulation $\mathfrak{C}$ du vecteur $\vec{B}$ dépend du chemin suivi, *le vecteur induction magnétique du champ créé par un feuillet ne dérive pas d'un potentiel.*

Il existe bien une fonction V dont la variation est égale à la circulation du vecteur $\vec{B}$, mais cette fonction est susceptible de plusieurs détermina-

tions, elle n'est pas uniforme. Si l'on cherche à fixer cette fonction en lui attribuant au point M_2 la valeur V_2, on trouvera pour sa valeur au point M_1 l'expression $V_1 + k \, . \, 4\pi U$, le nombre entier k étant indéterminé ; elle présente le même genre d'indétermination que la fonction $y = \text{arc tg } x$, à laquelle on peut attribuer une quelconque des valeurs $y + k\pi$.

Nous appellerons encore potentiel la fonction non uniforme V, *susceptible au point* M_1 *de l'infinité de déterminations* $V_1 + k \, . \, 4\pi U$, *et nous dirons que le vecteur induction* $\vec{B}$ *du champ magnétique créé par un feuillet dérive d'un potentiel, que nous appellerons potentiel d'induction. Il est essentiel de ne pas oublier qu'il s'agit là d'une nouvelle définition, qui n'est en accord avec la définition usuelle du potentiel que si l'on s'interdit de traverser la surface du feuillet.*

Lorsqu'on calcule les dérivées du potentiel, la constante $k \, . \, 4\pi U$ n'intervient pas. La relation entre l'induction et son potentiel conserve donc, dans le cas d'un potentiel non uniforme, la forme habituelle représentée symboliquement par la relation :

$$\vec{B} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, V.$$

Le vecteur $\vec{B}$ satisfait encore aux conditions qui expriment qu'un vecteur dérive d'un potentiel :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y};$$

ou, en notation vectorielle :

$$\text{rot}\, \vec{B} = 0.$$

On voit pourquoi nous avions dit, au paragraphe 4, que ces conditions, nécessaires pour qu'un vecteur dérive d'un potentiel, n'étaient suffisantes que sous certaines restrictions : le vecteur qui satisfait à ces conditions peut dériver d'un potentiel non uniforme, qui n'est pas un potentiel au sens strict du mot.

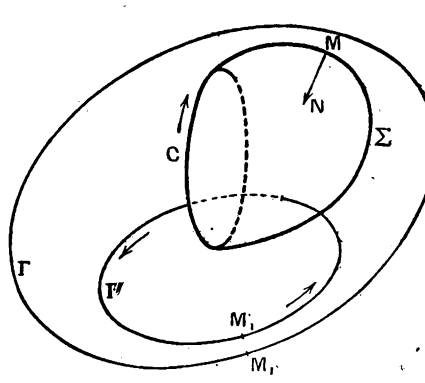


FIG. 145.

Les résultats trouvés peuvent encore être exprimés autrement, en considérant la circulation le long de courbes fermées. Il suffit dans le raisonnement de prendre un point M_2 confondu avec le point M_1. L'avantage est qu'on peut alors les exprimer à l'aide du contour C du feuillet, sans faire intervenir sa surface Σ, qui ne joue aucun rôle pour la définition et le calcul du vecteur induction. On obtient les théorèmes suivants (*fig.* 145) :

La circulation du vecteur induction du champ magnétique créé par un feuillet le long d'une courbe fermée Γ *ne passant pas à l'intérieur du contour* C *du feuillet est nulle. Le potentiel d'induction reprend la même valeur lorsqu'on revient au point de départ après avoir parcouru la courbe* Γ.

La circulation du vecteur induction du champ magnétique créé par un feuillet le long d'une courbe fermée Γ′ passant une fois à l'intérieur du contour C du feuillet, et y passant de droite à gauche pour un observateur placé sur ce contour dans le sens positif, est égale au produit par 4π de la puissance U du feuillet. Le potentiel d'induction a diminué de 4πU lorsqu'on revient au point de départ après avoir parcouru une fois la courbe Γ′.

Ce dernier théorème est particulièrement important : son application aux courants électriques donne la théorie des circuits magnétiques, d'un usage constant en électrotechnique, et fournit l'une des équations fondamentales de la théorie de Maxwell.

124. Calcul de l'induction et du potentiel-vecteur. — En un point P situé en dehors de la matière aimantée, le vecteur induction $\vec{B}$ est identique au vecteur champ magnétique, et par conséquent à la force qu'exerce le feuillet sur une masse magnétique + 1 placée en ce point. Cette force est la résultante des forces élémentaires exercées par chacune des masses magnétiques σdS dont l'ensemble constitue le feuillet : l'application du principe de l'action et de la réaction aux forces élémentaires (§ 89) montre qu'elle est égale en grandeur et directement opposée à la résultante des forces exercées par la masse magnétique + 1 placée en P sur les masses magnétiques σdS. Or nous savons (§ 119) que ce dernier système de forces est équivalent à un système de forces $\vec{f}$ appliquées aux éléments du contour du feuillet : le vecteur induction $\vec{B}$ est égal à la résultante d'un système de forces $-\vec{f}$ appliquées au point P.

Le champ magnétique créé en un point M du contour du feuillet à une distance r du point P (*fig.* 146) par la masse magnétique + 1 placée en P dérive du potentiel $\frac{1}{r}$ et a pour expression (§ 97) $\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}$, les dérivations exprimées par le symbole $\overrightarrow{\text{grad}}$ étant effectuées par rapport aux coordonnées du point M. La force $\vec{f}$ qui s'exerce sur l'élément $\vec{ds}$ du contour est donnée (§ 119) par la relation $\vec{f} = U\vec{ds} \wedge \vec{H}$ et a pour expression :

$$f = -U\vec{ds} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}.$$

Pour le calcul de l'induction en P, nous conviendrons d'effectuer les dérivations par rapport aux coordonnées du point P, ce qui revient à changer le sens du vecteur gradient; nous écrirons donc :

$$-\vec{f} = -U\,\vec{ds} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r} = U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r} \wedge \vec{ds}.$$

L'induction $\vec{B}$ est la somme des vecteurs $-\vec{f}$ relatifs à tous les éléments du contour du feuillet :

$$\vec{B} = U\int_C \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r} \wedge \vec{ds}.$$

On peut la considérer comme la somme de vecteurs $\vec{dB} = -\vec{f}$ correspondant

aux différents éléments du contour. Le champ $\vec{H}$ créé en M par la masse + 1 placée en P est dirigé suivant $\vec{PM}$ et a pour grandeur $\frac{1}{r^2}$: d'après la règle donnée au paragraphe 119, la force $\vec{f}$ appliquée en M a pour grandeur $\frac{U\, ds \sin\alpha}{r^2}$; elle est perpendiculaire au plan défini par l'élément ds et la droite PM, et dirigée vers la gauche d'un observateur placé sur l'élément $\vec{ds}$ dans le sens positif et regardant dans le sens du champ $\vec{H}$. On en déduit immédiatement la règle qui donne la direction, le sens et la grandeur du vecteur $\vec{dB} = -\vec{f}$ (*fig.* 146), et qui n'est d'ailleurs que la traduction des formules précédentes :

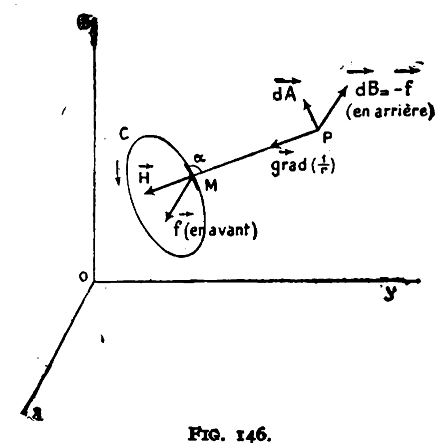


Fig. 146.

Le vecteur-induction magnétique créé par un feuillet peut être considéré comme la résultante des inductions élémentaires créées par les éléments du contour du feuillet. L'induction élémentaire créée par un élément ds en un point P, *situé à une distance r de l'élément, dans une direction faisant l'angle α avec cet élément, est perpendiculaire au plan défini par l'élément et le point* P, *et est dirigée vers la gauche d'un observateur placé dans le sens positif sur l'élément ds et regardant le point* P; *sa grandeur est* $\frac{U\, ds \sin\alpha}{r^2}$.

Il est évident que cette loi ne peut être considérée que comme l'expression d'une équivalence mathématique, et que le champ magnétique est créé par la matière aimantée répartie sur la surface du feuillet et non pas par son contour.

Désignons par dx, dy, dz les composantes du vecteur $\vec{ds}$ suivant les trois axes Oxyz, et par ξ, η, ζ, les coordonnées du point P. Posons :

$$p = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

Les trois composantes du vecteur $\vec{dB} = U\, \vec{\text{grad}}\, p \wedge \vec{ds}$ sont :

$$U\left(\frac{\partial p}{\partial \eta} dz - \frac{\partial p}{\partial \zeta} dy\right), \qquad U\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} dx - \frac{\partial p}{\partial \xi} dz\right), \qquad U\left(\frac{\partial p}{\partial \xi} dy - \frac{\partial p}{\partial \eta} dx\right).$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que l'induction élémentaire dérive d'un potentiel-vecteur $\vec{dA}$ dont les trois composantes, définies par les relations (§ 120) :

$$dB_\xi = \frac{\partial dA_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial dA_\eta}{\partial \zeta}, \qquad dB_\eta = \frac{\partial dA_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial dA_\zeta}{\partial \xi}, \qquad dB_\zeta = \frac{\partial dA_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial dA_\xi}{\partial \eta},$$

ont pour expressions $\mathrm{U}p\,dx$, $\mathrm{U}p\,dy$, $\mathrm{U}p\,dz$, c'est-à-dire, en rétablissant la valeur $\frac{1}{r}$ de la fonction p :

$$dA_\xi = \mathrm{U}\,\frac{dx}{r}, \qquad dA_\eta = \mathrm{U}\,\frac{dy}{r}, \qquad dA_\zeta = \mathrm{U}\,\frac{dz}{r}.$$

Ces équations représentent un vecteur :

$$\overrightarrow{dA} = \mathrm{U}\,\frac{\overrightarrow{ds}}{r},$$

parallèle au vecteur $\overrightarrow{ds}$.

Le vecteur induction $\overrightarrow{B}$, somme de tous les vecteurs $\overrightarrow{dB}$, dérive d'un potentiel-vecteur $\overrightarrow{A}$, somme des potentiels-vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dA}$ relatifs à tous les éléments du contour du feuillet; ses composantes sont :

$$A_\xi = \mathrm{U}\int_c \frac{dx}{r}, \qquad A_\eta = \mathrm{U}\int_c \frac{dy}{r}, \qquad A_\zeta = \mathrm{U}\int_c \frac{dz}{r},$$

et l'on peut l'écrire symboliquement :

$$\overrightarrow{A} = \mathrm{U}\int_c \frac{\overrightarrow{ds}}{r}.$$

Le potentiel-vecteur du champ magnétique produit par un feuillet de puissance U *peut être considéré comme la résultante de potentiels-vecteurs élémentaires produits par les éléments du contour du feuillet. Le potentiel-vecteur élémentaire produit par l'élément ds, placé au point* M, *en un point* P, *situé à une distance r de l'élément, est un vecteur parallèle à l'élément ds et de même sens, dont la grandeur est* : $\mathrm{U}\,\frac{ds}{r}$ (*fig.* 146).

On remarquera l'analogie de l'expression de ce potentiel-vecteur avec l'expression $\frac{dq}{r}$ du potentiel newtonien scalaire produit par une masse agissante dq. Comme la fonction $\frac{1}{r}$ satisfait à la relation $\Delta\frac{1}{r} = 0$, chacune des composantes dA_ξ satisfait à la relation correspondante $\Delta A_\xi = 0$, et le potentiel-vecteur satisfait à la relation vectorielle $\Delta\overrightarrow{A} = 0$, comme le potentiel newtonien satisfait à la relation de Laplace $\Delta V = 0$. On peut en effet écrire, en désignant toujours par p la fonction $\frac{1}{r}$:

$$\Delta A_\xi = \frac{\partial^2 A_\xi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 A_\xi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 A_\xi}{\partial\zeta^2} = \mathrm{U}\int_c \left(\frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial\zeta^2}\right) dx = 0.$$

On remarquera de plus que le vecteur $\vec{A}$ satisfait à la condition div $\vec{A} = 0$. En effet, la fonction $p = \frac{1}{r}$ n'est fonction que des différences $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, de sorte qu'on a :

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

et qu'on peut écrire :

$$\text{div}\,\vec{A} = \text{U}\int_{\text{C}} \frac{\partial p}{\partial \xi}\,dx + \frac{\partial p}{\partial \eta}\,dy + \frac{\partial p}{\partial \zeta}\,dz = -\text{U}\int_{\text{C}} \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = 0.$$

III. — *ACTIONS MUTUELLES DE DEUX FEUILLETS*

125. Énergie mutuelle de deux feuillets. — Considérons deux feuillets en présence : soient U et U′ leurs puissances, C et C′ leurs contours. Le vecteur induction du champ magnétique créé par le feuillet C est donné par la relation $\vec{B} = \text{U}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Omega$; il est proportionnel à la puissance U, avec un coefficient qui ne dépend que des paramètres géométriques qui définissent la position du contour C du premier feuillet et la position du point où l'on calcule l'induction. Le flux d'induction Φ envoyé par le feuillet C à travers le contour C′ du second feuillet est aussi proportionnel à U :

$$\Phi = \text{MU},$$

le coefficient M ne dépendant que des paramètres géométriques qui définissent les contours C et C′ des deux feuillets.

Le travail qu'on peut recueillir en déplaçant le feuillet C′ et en l'éloignant indéfiniment du feuillet C est (§ 117) :

$$\text{W} = -\text{U}'\Phi = -\text{MUU}'.$$

De même, le flux d'induction Φ' envoyé par le feuillet C′ à travers le contour du feuillet C′ est :

$$\Phi' = \text{M}'\text{U}',$$

et le travail qu'on peut recueillir en déplaçant le feuillet C et en l'éloignant indéfiniment du feuillet C′ est :

$$\text{W}' = -\text{U}\Phi' = -\text{M}'\text{UU}'.$$

Il est évident que le travail recueilli en écartant indéfiniment les deux feuillets l'un de l'autre est le même, qu'on déplace l'un ou l'autre des feuillets ; on a :

$$\text{W}' = \text{W}, \qquad \text{M}' = \text{M}.$$

Le coefficient M *s'appelle l'inductance mutuelle des deux feuillets ; il est égal au rapport à la puissance de l'un des feuillets du flux d'induction qu'il envoie à travers la surface de l'autre :*

$$M = \frac{\Phi}{U} = \frac{\Phi'}{U'}.$$

L'énergie W = — MUU' *s'appelle l'énergie mutuelle des deux feuillets ; elle est égale en valeur absolue et de signe contraire au produit de l'inductance mutuelle par la puissance des deux feuillets.*

Il faut bien remarquer que le flux Φ ne représente pas le flux du vecteur induction qui existe lorsque les deux feuillets sont en présence : c'est le flux du vecteur induction créé par le feuillet C supposé seul (cf. §§ 109 et 117). De même, l'énergie W ne représente pas l'énergie potentielle totale du système des deux feuillets, mais uniquement leur énergie mutuelle (cf. § 95) : ses variations représentent le travail qu'on peut recueillir lorsqu'on déplace l'un par rapport à l'autre les deux feuillets, dont l'aimantation est supposée rigide.

Le calcul de la résultante et du moment résultant du système des forces qui agissent sur l'un des feuillets se fera comme d'habitude à partir de l'énergie (§§ 65, 96, 119). On obtient pour leurs composantes :

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x} = UU'\frac{\partial M}{\partial x}, \qquad L = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = UU'\frac{\partial M}{\partial \alpha}.$$

Comme d'habitude, ces formules ont une application plus générale que celles qui donnent l'énergie : nous aurons plus tard l'occasion de revenir sur cette remarque (§ 241).

126. Calcul de l'inductance mutuelle. — Nous avons montré au paragraphe précédent que l'*inductance mutuelle de deux feuillets est une grandeur qui ne dépend que du choix des unités et des paramètres géométriques qui définissent les contours des deux feuillets.* Bien entendu, les sens de parcours des contours doivent être définis; si l'on change l'un d'entre eux, c'est-à-dire si l'on renverse le sens de l'aimantation du feuillet correspondant, l'inductance mutuelle change de signe.

Dans le *système électromagnétique* C. G. S., l'unité d'inductance mutuelle est l'inductance mutuelle de deux feuillets dont les contours sont tels que, si l'un d'eux a une puissance égale à l'unité électromagnétique de puissance, il envoie à travers l'autre un flux d'induction d'un maxwell.

Nous définirons plus tard (§ 232), l'*unité pratique* d'inductance mutuelle; c'est le **henry,** qui vaut 10^9 unités électromagnétiques C. G. S.

Les dimensions d'une inductance mutuelle $\mathfrak{M}$ s'obtiennent en divisant les dimensions du flux d'induction, $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ (§ 107), par celles de la puissance d'un feuillet, $L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ (§ 116), on trouve :

$$\mathfrak{M} = L.$$

Dans le système électromagnétique, une inductance mutuelle a les dimensions d'une longueur. Cela tient bien entendu au choix des conventions qui défi-

nissent ce système d'unités, et il serait absurde de dire qu'une inductance mutuelle est une grandeur de même espèce qu'une longueur.

Le flux d'induction Φ qui traverse le contour C′ peut s'exprimer à l'aide du potentiel-vecteur A du champ créé par le feuillet U ; on a (§ 120) :

$$\Phi = \int_{C'} \vec{A}\,\vec{ds'}.$$

Le potentiel-vecteur A peut s'exprimer par une intégrale étendue au contour C du feuillet U (§ 124) :

$$\vec{A} = U \int_{C} \frac{\vec{ds}}{r}.$$

On a donc :

$$M = \frac{\Phi}{U} = \iint_{C,\,C'} \frac{\vec{ds}\,\vec{ds'}}{r}.$$

Cette formule, dite **formule de Neumann,** permet de calculer l'inductance mutuelle de deux feuillets par une intégrale double, étendue aux deux contours des feuillets. L'élément différentiel qui y figure est le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{ds}$ et $\vec{ds'}$; on peut encore l'écrire, en désignant par ε l'angle que font entre eux les deux éléments de contour, pris bien entendu avec leurs sens :

$$M = \iint_{C,\,C'} \frac{ds\,ds' \cos \varepsilon}{r}.$$

Comme le résultat obtenu dans le calcul d'une intégrale double est indépendant de l'ordre dans lequel on effectue les intégrations, la formule de Neumann met en évidence le fait que les deux contours jouent des rôles identiques. Comme l'élément différentiel $\frac{ds\,ds'}{r} \cos \varepsilon$ est homogène à une longueur, elle met en évidence le fait que les dimensions d'une inductance mutuelle sont celles d'une longueur; elle n'est naturellement applicable, sans coefficient numérique, que dans un système électromagnétique.

127. Formules relatives aux feuillets dans un système non électromagnétique. — Si l'on emploie un système d'unités dans lequel le coefficient μ_0 de la loi de Coulomb n'est pas égal à l'unité, la force qui s'exerce sur une masse magnétique m a toujours pour grandeur mH et l'énergie de l'aimant élémentaire est toujours $\vec{H}\,\vec{dM}$; mais le flux $\vec{H}\,\vec{dS}$ n'est plus le flux d'induction élémentaire $d\Phi$: il est égal à $d\Phi/\mu_0$, puisqu'on a par définition (§ 112) $B = \mu_0 H$. Il en résulte que les formules qui donnent l'énergie W d'un feuillet en fonction du flux d'induction Φ qu'envoie à travers sa surface un système d'aimants permanents (§ 117), ou en fonction du potentiel-vecteur $\vec{A}$ dont dérive

le vecteur induction de ce système (§ 120), et celle qui donne le travail correspondant au flux coupé $\Delta\Phi$ (§ 118), sont :

$$W = -\frac{U}{\mu_0}\Phi = -\frac{U}{\mu_0}\int \vec{A}\,\vec{ds}, \qquad \mathfrak{T} = \frac{U}{\mu_0}\Delta\Phi,$$

tandis que la force appliquée à l'élément de contour conserve pour expression :

$$\vec{f} = U\,\vec{ds} \wedge \vec{H}.$$

Le flux du vecteur champ H d'une masse magnétique + 1 dans un cône d'angle solide Ω est maintenant Ω/μ_0, et le flux d'induction correspondant est $\Phi = \Omega$. L'énergie mutuelle de cette masse et du feuillet est — $U\Omega/\mu_0$, et l'on en déduit les valeurs du champ (§ 121) et de l'induction (§ 122) créés par le feuillet en un point extérieur, ainsi que le potentiel vecteur d'où dérive l'induction (§ 124) :

$$\vec{H} = \frac{U}{\mu_0}\,\vec{\mathrm{grad}}\,\Omega, \qquad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = U\,\vec{\mathrm{grad}}\,\Omega, \qquad \vec{A} = U\int_\Gamma \frac{\vec{ds}}{r}$$

Il en résulte que la circulation du vecteur champ entre deux points voisins A et B situés de part et d'autre du feuillet (§ 121), et la circulation du vecteur induction le long d'une courbe fermée Γ qui traverse une fois le feuillet (§ 123), sont :

$$\int_B^A \vec{H}\,\vec{ds} = \frac{4\pi U}{\mu_0}, \qquad \int_\Gamma \vec{B}\,\vec{ds} = 4\pi U.$$

Pour conserver dans les systèmes d'unités les plus employés la formule relative aux courants $\Phi = Mi$ (§ 216), nous définirons l'inductance mutuelle de deux feuillets (§ 125) par la relation :

$$M = \mu_0\frac{\Phi}{U} = \frac{\mu_0}{U}\int_{C'} \vec{A}\,\vec{ds'} = \frac{\mu_0}{U}\int_{C'} U\,\vec{ds'}\int_C \frac{\vec{ds}}{r} = \mu_0\int_C\int_{C'} \frac{\vec{ds}\,\vec{ds'}}{r}$$

L'énergie mutuelle de deux feuillets est alors :

$$W = -\frac{U'\Phi}{\mu_0} = -\frac{U\Phi'}{\mu_0} = -\frac{MUU'}{\mu_0^2} = -\frac{UU'}{\mu_0}\iint_{CC'} \frac{\vec{ds}\,\vec{ds'}}{r}.$$

TROISIÈME PARTIE

COURANTS CONTINUS

CHAPITRE XIII

GÉNÉRALITÉS SUR LES COURANTS ÉLECTRIQUES

I. — DÉFINITIONS ET CARACTÈRES GÉNÉRAUX

128. Courant électrique. — Prenons deux conducteurs isolés C_1 et C_2 chargés d'électricité (*fig.* 148) ; ce seront par exemple les deux armatures d'un condensateur. Soient q_1 et q_2 leurs charges, V_1 et V_2 leurs potentiels. Relions-les par un fil métallique AB de capacité négligeable : les deux conducteurs n'en forment plus qu'un seul, et il s'établit un nouvel équilibre électrique, dans lequel ils sont à un même potentiel V et portent respectivement des charges q'_1 et q'_2, telles qu'on ait $q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2$. Supposons par exemple V_1 plus grand que V_2 : le potentiel final est compris entre V_1 et V_2, la charge du conducteur C_1 a diminué d'une quantité $q = q_1 - q'_1$, et la charge du conducteur C_2 a augmenté d'une quantité égale $q = q'_2 - q_2$.

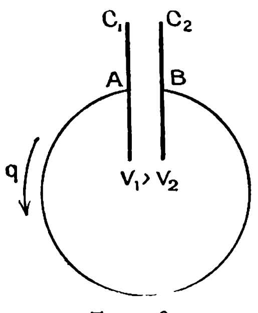


Fig. 148.

Il nous est impossible de savoir s'il y a eu transport d'électricité positive du conducteur C_1 au conducteur C_2, ou transport d'électricité négative du conducteur C_2 au conducteur C_1, ou si ces deux phénomènes se sont produits simultanément. La seule quantité accessible à l'expérience est la somme algébrique des charges électriques transportées, car nous ne connaissons pas les quantités réelles des deux électricités portées par chacun des conducteurs, mais seulement leur somme algébrique. Nous pouvons seulement dire que le phénomène qui s'est produit est équivalent au transport d'une quantité q d'électricité positive du conducteur C_1 au conducteur C_2 : nous raisonnerons toujours comme si ce transport d'électricité positive avait réellement lieu. Nous assimilerons l'électricité positive à un véritable fluide, qui s'écoule dans le fil métallique du conducteur au potentiel le plus élevé au conducteur au potentiel le moins élevé, comme de l'eau s'écoule dans un tuyau reliant deux réservoirs du réservoir le plus élevé au réservoir le moins

élevé. De même qu'on dit que le tuyau est parcouru par un courant d'eau, de même nous dirons que le fil est parcouru par un **courant électrique,** dont *le sens est le sens dans lequel s'écoule l'électricité positive.* Si pendant le temps dt, entre les instants t et $t + dt$, le fil est traversé par une quantité d'électricité dq, nous appellerons **intensité du courant** à l'instant t le rapport $\frac{dq}{dt}$.

129. Courant continu. — Supposons (*fig.* 149) les conducteurs C_1 et C_2 reliés aux deux pôles d'une source d'électricité (§ 80), capable de maintenir entre eux une différence de potentiel constante. Il s'établit un **régime permanent,** dans lequel les charges des deux conducteurs restent également constantes. La source fournit à chaque instant au conducteur C_1 une quantité d'électricité positive égale à celle qui s'écoule par le fil AB, au conducteur C_2 une quantité d'électricité négative égale à la quantité d'électricité positive qui arrive par le fil AB. L'intensité du courant qui traverse le fil AB reste constante : le courant est dit un courant continu. Il résulte des définitions données que *la quantité d'électricité q transportée par un courant continu est égale au produit de l'intensité i du courant par le temps t* et est donnée par la relation :

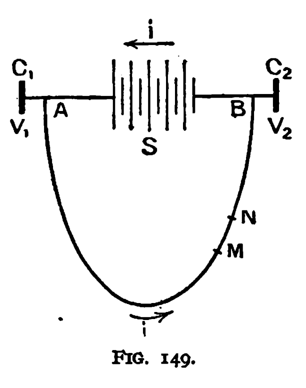


FIG. 149.

$$q = it.$$

On peut encore dire que l'*intensité d'un courant continu est égale à la quantité d'électricité qu'il transporte par unité de temps.*

Le régime permanent que nous venons de définir peut être réalisé avec une source d'électricité quelconque : il suffit de choisir la nature, la section et la longueur du fil conducteur AB — c'est-à-dire sa résistance — de façon que le courant qu'y produit la différence de potentiel donnée par la source n'excède pas celui que cette source peut fournir. Si l'on emploie des piles ou des accumulateurs donnant une différence de potentiel de quelques volts, le fil AB peut être un fil métallique de quelques dixièmes de millimètre de diamètre et de quelques mètres de longueur, et le courant peut transporter quelques coulombs par seconde. Si au contraire la source est une machine électrostatique donnant une différence de potentiel de quelques dizaines de kilovolts, on prendra comme fil conducteur un fil de chanvre humide, et les quantités d'électricité transportées seront de l'ordre d'un dix-millième de coulomb par seconde. De nombreuses expériences ont établi que les phénomènes sont exactement les mêmes dans tous les cas, et ne diffèrent que par l'ordre de grandeur des différences de potentiel et des quantités d'électricité mises en jeu.

Nous avons supposé au début que la capacité du conducteur AB était négligeable, de façon à ne pas avoir à tenir compte des charges électriques qu'il peut porter. Nous pouvons nous affranchir de cette restriction lorsque nous étudions le régime permanent. Le potentiel est alors constant en chaque point du conducteur, et la charge portée par chacune de ses parties est également constante. La quantité d'électricité q qui entre dans un tronçon MN du con-

ducteur pendant le temps t est égale à celle qui en sort, et l'*intensité du courant* $i = q / t$ *est la même pour toutes les sections du conducteur.*

On peut concevoir que la source d'électricité S est aussi traversée, pendant le temps t, par la même quantité d'électricité q. Elle forme, avec le conducteur AB, un **circuit électrique fermé,** parcouru par le courant constant i (*fig.* 149). Le courant va, dans le conducteur AB, du potentiel le plus élevé au potentiel le moins élevé, et à travers la source, du potentiel le moins élevé au potentiel le plus élevé. Nous emploierons désormais exclusivement ce langage ; l'hypothèse qu'il traduit est entièrement équivalente à celle que nous avons employée jusqu'ici, que la source produit des quantités égales d'électricité positive et négative, puisque la seule quantité accessible à l'expérience est la somme algébrique des deux électricités : il a l'avantage de permettre de traiter la source comme un tronçon quelconque du circuit, qui ne diffère des autres que parce qu'il possède la propriété d'élever d'une certaine valeur le potentiel de l'électricité qui le traverse. Si nous reprenons la comparaison faite tout à l'heure entre un courant électrique et un courant d'eau, la source joue le rôle d'une pompe qui élève l'eau d'un certain niveau à un niveau plus élevé, et est parcourue par le même courant que la canalisation extérieure.

130. Propriétés principales du courant électrique. — L'expérience montre qu'**un conducteur parcouru par un courant électrique s'échauffe :** si on décharge une batterie de bouteilles de Leyde à travers un fil métallique long et fin, le courant électrique qui traverse ce fil y dégage une quantité de chaleur équivalente à l'énergie de la batterie (§ 61). La même expérience est répétée, avec des courants fournis par des accumulateurs ou des dynamos, dans tous les appareils de chauffage électrique et dans toutes les lampes à incandescence.

Si l'on fait passer un courant électrique à travers un conducteur liquide, constitué par une dissolution d'un sel dans l'eau, ce sel se décompose : c'est le phénomène d'**électrolyse.** On montre commodément ce phénomène en décomposant de l'eau, acidulée par de l'acide sulfurique, par le courant fourni par une batterie de quelques accumulateurs; on peut aussi le réaliser avec les courants produits par les machines électrostatiques. On imprègne une feuille de papier de tournesol neutre d'une solution saline, par exemple de sulfate de potassium, et on pose sur ses extrémités deux boules métalliques reliées aux deux pôles d'une machine électrostatique par des cordes mouillées ; après quelques minutes de fonctionnement de la machine, on constate qu'il s'est produit une tache rouge autour de la boule positive, une tache bleue autour de la boule négative, c'est-à-dire qu'il s'y est formé respectivement de l'acide sulfurique et de la potasse : on obtiendrait le même résultat en reliant les deux boules aux deux pôles d'une batterie d'accumulateurs (Cf. § 160).

Enfin, **un courant électrique produit dans l'espace qui l'environne un champ magnétique.** Cette propriété a été mise en évidence par Œrsted en 1819 : dans son expérience, une aiguille aimantée ns est placée au-dessous d'un fil horizontal XY parcouru par le courant d'une pile, et on constate que, lors du passage du courant, le pôle nord de l'aiguille est dévié vers la gauche d'un observateur placé sur le conducteur dans le sens du courant (*fig* 150). On peut aussi montrer qu'une aiguille d'acier non aimantée, placée dans une bobine, s'aimante quand on fait passer dans la bobine la décharge d'une bou-

teille de Leyde : le courant de décharge du condensateur a produit un champ magnétique, dont l'action a aimanté l'aiguille d'acier.

Les indications que nous venons de donner suffisent à montrer que les propriétés des courants sont toujours les mêmes, qu'ils soient fournis par des piles, des dynamos, des machines électrostatiques ou la décharge de condensateurs. Il n'y a pas deux sortes de courants électriques, il n'y a que des courants plus ou moins intenses; l'étude du courant électrique est l'étude de l'électricité en mouvement, tandis que l'électrostatique était l'étude de l'électricité en équilibre. Nous verrons d'ailleurs que l'assimilation d'un courant électrique à un déplacement d'électricité est justifiée par des expériences dans lesquelles on réalise un tel déplacement en déplaçant un conducteur chargé (chap. XXXII) : on produit ainsi un véritable courant électrique, qui crée un champ magnétique mesurable au voisinage du conducteur en mouvement.

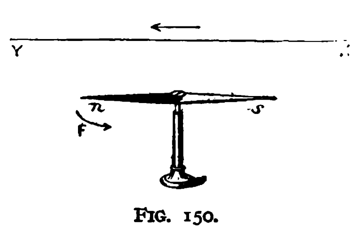


FIG. 150.

Nous étudierons en détail dans les chapitres suivants les trois effets que nous venons de signaler. Remarquons dès maintenant que l'observation de l'un d'eux peut servir à déceler l'existence d'un courant électrique dans un circuit, et que sa mesure peut servir à mesurer l'intensité du courant. La mesure du dégagement de chaleur dans un conducteur est employée dans les appareils thermiques (§ 149). La mesure de la masse d'argent déposée par électrolyse de l'azotate d'argent est la mesure légale de l'intensité d'un courant (§ 134). Les galvanomètres à aimant mobile (§§ 249 à 252) ne sont que des magnétomètres permettant la mesure du champ magnétique d'un courant ; on peut encore dire que ce sont des appareils mesurant les forces exercées sur un aimant par un circuit parcouru par un courant ; inversement, dans les galvanomètres à cadre mobile (§§ 253 à 256), on mesure les forces exercées par un aimant sur un circuit parcouru par un courant, forces dont l'existence peut se déduire de l'existence des précédentes par l'application du principe de l'action et de la réaction.

II. — *UNITÉS D'INTENSITÉ DE COURANT*

131. Lois fondamentales de l'électromagnétisme. — Nous étudierons dans des chapitres spéciaux les actions des courants sur les aimants et des aimants sur les courants; mais, pour pouvoir définir l'unité électromagnétique d'intensité de courant, nous donnerons dès maintenant les lois fondamentales énoncées par Ampère.

La première de ces lois est que *le champ magnétique créé en un point quelconque de l'espace par un circuit parcouru par un courant change de sens avec le courant et est proportionnel à l'intensité du courant.* Il en résulte que les forces qui s'exercent sur un aimant placé dans le champ magnétique du courant sont proportionnelles à l'intensité du courant, et inversement, d'après le principe de l'action et de la réaction, que les forces qui s'exercent sur un circuit parcouru

par un courant électrique, et placé dans le champ d'un aimant, sont proportionnelles à l'intensité du courant.

Nous n'indiquerons pas de vérification expérimentale de cette loi. C'est une loi fondamentale vérifiée par la vérification de l'ensemble de ses conséquences, en particulier par toutes les mesures de courant faites avec des galvanomètres à aimant mobile ou à cadre mobile, dans lesquelles les quantités effectivement mesurées sont les forces qui s'exercent entre un courant et un aimant. Si l'on veut choisir, parmi la multitude des mesures électriques que nous rencontrerons, celles dont la réalisation entraîne une vérification directe de la loi fondamentale, on peut citer les mesures d'intensité de courant faites sur des circuits bifurqués (§ 141), ou les mesures de la charge d'un condensateur faites au galvanomètre balistique (§ 258). Dans le premier cas, l'intensité du courant dans le circuit principal est, d'après la définition même de l'intensité, égale à la somme des intensités dans les circuits dérivés : on vérifiera la loi fondamentale en vérifiant que l'indication d'un galvanomètre placé dans le circuit principal est égale à la somme des indications des galvanomètres placés dans les circuits dérivés. Dans le second cas, on vérifiera la loi fondamentale en vérifiant que la déviation du galvanomètre balistique est proportionnelle à la quantité d'électricité qui l'a traversé, c'est-à-dire à la charge du condensateur. Il est à peine utile d'ajouter que l'une et l'autre de ces expériences ont été faites des milliers de fois.

La seconde loi fondamentale est que, *pour calculer les actions qui s'exercent entre un aimant et un circuit parcouru par un courant, on peut remplacer le courant par un feuillet magnétique « équivalent », dont le contour est le circuit parcouru par le courant, dont le sens est tel que le sens positif sur son contour soit le sens du courant, et dont la puissance ne dépend que de l'intensité du courant.*

Nous considérerons également cette loi comme une loi fondamentale, vérifiée par la vérification de l'ensemble de ses conséquences : le calcul et la construction des appareils de mesure, et même des moteurs industriels, en fournit une vérification permanente.

Le champ magnétique créé par un feuillet en un point de l'espace, et les forces qui s'exercent entre un feuillet et un aimant, sont proportionnels à la puissance du feuillet. *La puissance* U *du feuillet équivalent à un courant est donc proportionnelle à l'intensité i de ce courant :*

$$i = k\text{U}.$$

132. Systèmes d'unités électriques et magnétiques. — La définition que nous avons donnée de l'intensité d'un courant définit l'unité qui sert à la mesurer en fonction de l'unité de temps et de l'unité de quantité d'électricité, c'est-à-dire du coefficient ε_0 de la loi de Coulomb électrostatique (§ 22) ; l'unité de puissance d'un feuillet est elle-même définie (§§ 89 et 106) quand on se donne les unités mécaniques et le coefficient μ_0 de la loi de Coulomb du magnétisme. Le coefficient k de proportionnalité entre les nombres i et U qui mesurent l'intensité d'un courant et la puissance d'un feuillet équivalent est donc entièrement défini lorsqu'on se donne les trois unités fondamentales mécaniques et les deux coefficients ε_0 et μ_0.

Cherchons comment il dépend de ces deux coefficients, c'est-à-dire comment

il varie quand on les modifie sans modifier les unités mécaniques. L'expression de la force qui s'exerce entre deux charges électriques égales, $f = q^2/\varepsilon_0 r^2$, montre que le nombre q qui les mesure varie comme $\sqrt{\varepsilon_0}$: il en est de même du nombre $i = q/t$. L'expression de l'énergie mutuelle de deux feuillets de même puissance, $W = -\dfrac{U^2}{\mu_0}\displaystyle\iint \dfrac{\vec{ds}\,\vec{ds'}}{r}$ (§ 127) montre que le nombre U varie comme $\sqrt{\mu_0}$. Le rapport $k = i/U$ varie donc comme $\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$, et nous pouvons écrire :

$$\frac{i}{U} = c\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \qquad \text{ou} \qquad \mu_0 i = c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,U,$$

la constante c *ne dépendant plus que des unités mécaniques*. Nous reviendrons plus tard (chap. XXVII) sur sa signification et sur sa détermination expérimentale : indiquons pourtant, dès à présent, qu'elle varie, quand on modifie les unités mécaniques, comme le nombre qui mesure une vitesse, et qu'elle est numériquement égale à la vitesse de la lumière dans le vide (300.000 km/sec $= 3.10^{10}$ cm/sec). Si les unités mécaniques choisies sont les unités C. G. S., on a donc :

$$c = 3.10^{10}.$$

133. Unité électrostatique et unité électromagnétique d'intensité de courant. — Dans le paragraphe précédent, nous avons en somme considéré les unités électriques et magnétiques comme formant un système à cinq unités fondamentales, ces unités fondamentales étant les trois unités mécaniques et les deux unités de quantité d'électricité et de masse magnétique. On peut, et c'est ce que l'on fait dans les systèmes le plus souvent employés, réduire à quatre le nombre des unités fondamentales, en convenant de choisir les unités de quantité d'électricité et de masse magnétique de façon que les nombres qui mesurent l'intensité d'un courant et la puissance du feuillet équivalent soient liés par la relation :

$$\mu_0 i = U.$$

D'après ce que nous venons de voir, cela revient à choisir les coefficients numériques ε_0 et μ_0 qui définissent ces unités de façon que l'on ait :

$$c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1.$$

Une fois cette convention faite, on peut réduire à trois le nombre des unités fondamentales, c'est-à-dire définir entièrement les unités électriques et magnétiques à partir des unités mécaniques, en fixant arbitrairement la valeur d'un des coefficients ε_0 et μ_0. Dans **les systèmes électrostatiques** (§ 22), on convient de prendre $\varepsilon_0 = 1$: on a alors $\mu_0 = 1/c^2$. Dans **les systèmes électromagnétiques** (§ 106), on convient de prendre $\mu_0 = 1$: on a alors $\varepsilon_0 = 1/c^2$, et la relation $\mu_0 i = U$ se réduit à $i = U$.

Ces deux conventions font correspondre à des unités mécaniques données deux unités différentes de quantité d'électricité ; nous avons vu que le nombre q qui mesure une charge électrique varie, quand on modifie le coefficient ε_0,

comme la quantité $\sqrt{\varepsilon_0}$: quand on passe du système électrostatique ($\varepsilon_0 = 1$) au système électromagnétique ($\varepsilon_0 = 1/c^2$), il est divisé par **c**. Comme le rapport des nombres qui mesurent une même grandeur avec deux unités différentes est égal à l'inverse du rapport de ces unités, on voit que *la quantité* **c** *représente le rapport de l'unité électromagnétique de quantité d'électricité à l'unité électrostatique*. Comme, dans les deux systèmes, les intensités de courant sont liées aux quantités d'électricité par la relation $q = it$, et que l'unité de temps est la même par hypothèse, **c** *représente aussi le rapport des unités d'intensité de courant.*

Dans les systèmes électrostatiques, les dimensions de l'unité de quantité d'électricité sont $Q = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ (§ 78). Celles de l'unité d'intensité de courant sont donc :

$$I = \frac{Q}{T} = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}.$$

Dans les systèmes électromagnétiques, on peut considérer que la mesure de l'intensité du courant est définie par la relation $i = U$. Si l'on change les unités mécaniques de façon que le nombre U qui mesure la puissance d'un certain feuillet devienne p fois plus grand, le nombre i qui mesure l'intensité du courant équivalent devient aussi p fois plus grand. Une modification quelconque des unités mécaniques modifie dans le même rapport les unités de puissance d'un feuillet et d'intensité d'un courant, *ces deux unités ont les mêmes dimensions*. Comme l'unité électromagnétique de puissance d'un feuillet a pour dimensions $U = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ (§ 116), les dimensions de l'unité électromagnétique d'intensité de courant et celles de l'unité électromagnétique de quantité d'électricité sont :

$$I = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}, \qquad Q = IT = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}.$$

A la différence dans les conventions de définition des deux systèmes correspond une différence dans les dimensions des unités : le rapport des dimensions de l'unité électromagnétique de quantité d'électricité à celles de l'unité électrostatique est $L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}/L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1} = L^{-1}T$, ce qui montre (cf. § 280) que le nombre **c** qui représente le rapport de ces unités varie, quand on change les unités mécaniques, comme le nombre qui mesure une vitesse.

Si les unités mécaniques choisies sont les unités C. G. S., les deux systèmes que nous venons de définir sont **le système électrostatique C. G. S.** et **le système électromagnétique C. G. S.** Reprenant les définitions déjà données, nous pouvons dire :

L'unité électrostatique C. G. S. d'intensité de courant est l'intensité d'un courant continu qui transporte par seconde l'unité électrostatique C. G. S. (§ 22) *de quantité d'électricité.*

L'unité électromagnétique C. G. S. d'intensité de courant est l'intensité d'un courant continu équivalent à un feuillet de même contour dont la puissance est égale à l'unité électromagnétique C. G. S. de puissance.

L'unité électromagnétique C. G. S. de quantité d'électricité est la quantité

d'électricité transportée par seconde par un courant continu dont l'intensité est égale à l'unité électromagnétique C. G. S. d'intensité de courant.

Le rapport de l'unité électromagnétique C. G. S. de quantité d'électricité à l'unité électrostatique C. G. S. a la valeur $\mathbf{c} = 3.10^{10}$.

Dans chacun des deux systèmes, l'un des deux coefficients ε_0 et μ_0 des deux lois de Coulomb est égal à 1, tandis que l'autre est égal à $1/\mathbf{c}^2$, c'est-à-dire à $\frac{1}{9.10^{20}}$. Mais il faut bien remarquer que cette dernière valeur numérique n'est pas une valeur connue *a priori* : elle résulte d'une détermination expérimentale du rapport **c.** Si par exemple on mesure un courant par la méthode de zéro décrite au paragraphe 87, en utilisant un condensateur calculable chargé par une différence de potentiel auxiliaire mesurée par un électromètre absolu, on obtient une mesure absolue du courant en unités électrostatiques ($\varepsilon_0 = 1$) ; mais on n'obtient pas une mesure absolue en unités électromagnétiques, parce que les formules qui donnent les capacités du condensateur et de l'électromètre à partir de leurs dimensions géométriques contiennent le coefficient ε_0, et que la valeur exacte de ce coefficient dans le système électromagnétique ne peut être connue que par d'autres mesures électriques.

134. Unité pratique. — Toutes les fois qu'on aura à calculer le champ magnétique créé par un courant, ou l'action d'un champ magnétique sur un courant, l'emploi des unités électromagnétiques conduira à des formules plus simples que l'emploi des unités électrostatiques. Il permettra également de réaliser, à l'aide de ces phénomènes, des mesures absolues, indépendantes de la détermination de la valeur du coefficient **c.** Les appareils usuels de mesure, les moteurs et générateurs industriels utilisent tous de tels phénomènes : le système d'unités fondamental de l'électricité industrielle sera donc le système électromagnétique C. G. S. Seulement, comme la grandeur de certaines de ses unités rend leur emploi incommode, on les a remplacées par des multiples ou des sous-multiples : le système ainsi défini est le **système pratique.**

*L'unité pratique d'intensité de courant est l'***ampère,** *qui est égal au 1/10 de l'unité électromagnétique C. G. S.*

On définit l'**unité pratique de quantité d'électricité** de façon à conserver, dans le système pratique, la relation $q = it$. Cette unité s'appelle le **coulomb.**

Le coulomb est la quantité d'électricité transportée par seconde par un courant continu dont l'intensité est d'un ampère.

Le coulomb vaut évidemment 1/10 de l'unité électromagnétique C. G. S., il vaut par suite 3.10^9 unités électrostatiques C. G. S. de quantité d'électricité. Ce dernier résultat justifie la définition provisoire que nous avons donnée en électrostatique (§ 23). On comprend pourquoi nous n'avions pu alors donner qu'une définition provisoire : le système pratique dérive du système électromagnétique, et les unités pratiques ne peuvent être définies qu'après les unités électromagnétiques.

On a cru pendant longtemps que les mesures électromagnétiques absolues ne pouvaient pas être faites avec une précision suffisante pour permettre l'emploi effectif de l'unité que nous venons de définir dans les mesures de précision : la Conférence Internationale des Unités Électriques, tenue à Londres

en 1908, avait estimé que l'on aurait une représentation plus accessible de l'ampère par les phénomènes d'électrolyse, et avait **défini l'ampère international** comme étant l'*intensité du courant qui, en passant dans une solution de nitrate d'argent dans l'eau, dépose* $1^{mg},11800$ *d'argent par seconde.* On estime aujourd'hui que les mesures électromagnétiques absolues sont plus précises que les mesures par électrolyse, et la 8e *Conférence générale des Poids et Mesures* (Paris, 1933) a décidé que l'on abandonnerait, à partir de 1935, la définition de Londres pour revenir à la définition de l'ampère à partir de l'unité électromagnétique. La définition légale en France, donnée par la loi du 2 avril 1919, de l'unité d'intensité de courant est d'ailleurs encore la définition de l'ampère international par les phénomènes d'électrolyse : il convient d'ajouter que, si les deux définitions sont théoriquement différentes, l'ampère international de la Conférence de Londres et le dixième de l'unité C. G. S. ne différent (cf. § 267) que d'une quantité inférieure aux erreurs des meilleures mesures électrolytiques (quelques cent-millièmes).

Rappelons que nous avons déjà dit (§ 79) que la seule unité mécanique définie légalement dans le système pratique est l'unité de travail, le *joule*, mais que le système pratique peut être rattaché à un système d'unités mécaniques — système M. K. S. — dans lequel les unités fondamentales sont le mètre, le kilogramme-masse et la seconde. Les unités pratiques électriques ont d'ailleurs été choisies (cf. §§ 274 et 277) de façon que la relation de coordination $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$ soit satisfaite : le système constitué par les unités électriques pratiques et les unités mécaniques M. K. S. peut donc être considéré comme un des systèmes à quatre unités fondamentales que nous avons définis, au début du paragraphe précédent, par la relation $\mu_0 i = U$, les quatre unités fondamentales y étant le mètre, le kilogramme-masse, la seconde et le coulomb.

Cherchons quelles sont, dans ce système, les valeurs de ε_0 et μ_0. Remarquons d'abord que, les dimensions de l'unité électromagnétique de quantité d'électricité étant $L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}$, le mètre valant 10^2 centimètres et le kilogramme 10^3 grammes, l'unité électromagnétique M. K. S. vaut $10 \times 10^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{5}{2}}$ unités électromagnétiques C. G. S., et le coulomb vaut $10^{-\frac{7}{2}}$ unités électromagnétiques M. K. S. Le système que nous considérons n'est donc pas un système électromagnétique, et le coefficient μ_0 y est différent de l'unité. Dans le système électromagnétique M. K. S., on a $\mu_0 = 1$, et le coefficient ε_0 est égal à $1/c^2$; nous avons vu, dans les paragraphes précédents, que lorsqu'on change la valeur numérique du coefficient ε_0 sans changer les unités mécaniques, la grandeur de l'unité de quantité d'électricité varie comme $1/\sqrt{\varepsilon_0}$; nous venons de voir que, que, lorsqu'on passe du système électromagnétique M. K. S. au système pratique M. K. S., cette grandeur est multipliée par $10^{-\frac{7}{2}}$: le coefficient ε_0 est donc multiplié par 10^7, et devient égal à $10^7/c^2$. La relation de coordination $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$ montre alors que *le coefficient μ_0 du système unités mécaniques M. K. S. — unités électriques pratiques est $\mu_0 = 10^{-7}$.* Comme d'autre part on a, en mètres par seconde, $c = 3 \cdot 10^8$, le coefficient ε_0 est $\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9}$, valeur que nous avons déjà indiquée au paragraphe 23.

L'équation de dimensions de l'unité électromagnétique de champ magnétique, $H = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ (§ 107) montre que, dans le système électromagnétique M. K. S., l'unité de champ magnétique ou d'induction magnétique (§ 113) vaut $\sqrt{10}$ gauss. D'autre part, quand on passe de ce système à un système non électromagnétique sans modifier les unités mécaniques, la formule de Coulomb, $mm' = \mu_0 fr^2$, montre que le nombre m qui mesure la masse magnétique est multiplié par $\sqrt{\mu_0}$, la formule de définition du champ, $f = m$ H, montre que le nombre H qui mesure le champ magnétique est divisé par $\sqrt{\mu_0}$, et la formule de définition de l'induction, $B = \mu_0 H$, montre que le nombre B est multiplié par $\sqrt{\mu_0}$: l'unité de champ magnétique devient donc $\sqrt{\mu_0}$ fois plus grande, et l'unité d'induction $\sqrt{\mu_0}$ fois plus petite. Dans le système unités pratiques-unités M. K. S. que nous venons d'envisager ($\mu_0 = 10^{-7}$), l'unité de champ vaut donc $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10^{-7}} = 10^{-3}$ u. é. m. C. G. S. et l'unité d'induction vaut $\sqrt{10} . \sqrt{10^7} = 10^4$ u. é. m. C. G. S. : ce sont le *milliœrsted* et le *myriagauss*. Quant à l'unité de flux d'induction, c'est le flux d'un myriagauss à travers un mètre carré, elle vaut 10^8 maxwells (cf. § 277).

L'unité de force, le millisthène, valant 10^5 dynes, la formule $f = m$H montre que l'unité de masse magnétique du système unités pratiques-unités M. K. S. vaut 10^8 u. é. m. C. G. S. Le mètre valant 10^2 centimètres, l'unité de moment magnétique vaut 10^{10} u. é. m. C. G. S., et l'unité de puissance d'un feuillet 10^6 u. é. m. C. G. S.; d'après la formule $\mu_0 i = U$, le feuillet de puissance $U = 1$ unité pratique est équivalent à un courant de 10^7 ampères, ce qui est bien un courant de 10^6 u. é. m. C. G. S.

III. — *COURANTS DANS UN MILIEU CONDUCTEUR*

135. Vecteur courant. — Nous avons étudié jusqu'ici des courants qui parcourent des fils conducteurs, et nous nous sommes contentés de considérer le courant total qui traverse une section du fil; les définitions données s'appliquent à des **courants linéaires.** On peut, d'une façon plus générale, étudier des courants qui traversent un conducteur dont aucune dimension n'est petite par rapport aux autres. On a par exemple, dans le problème de la construction des étalons de résistance (cf. § 145), à étudier le passage du courant à travers un ballon C plein de mercure auquel le courant est amené en deux points A et B (*fig.* 151).

L'électricité positive, qui arrive dans le conducteur au point A, le traverse de A à B, en suivant des trajectoires qui intéressent toute sa masse, et qu'on appelle des **lignes de courant.** La **direction du courant** en un point M est la direction de la tangente à la ligne de courant qui passe au point M. Le **sens du courant** est le sens dans lequel se déplace l'électricité positive. La **grandeur** i **du courant** est la quantité d'électricité qui traverse par seconde l'unité de surface, prise normalement à la direction du courant. On définit ainsi, par sa

direction, son sens et sa grandeur, un **vecteur** $\vec{i}$, que l'on appelle le **courant électrique** au point M [1].

On comprendra immédiatement la signification physique de ces définitions en comparant le mouvement de l'électricité positive dans le conducteur à l'écoulement de l'eau dans un canal : appliquées à ce dernier mouvement, elles définissent en chaque point un vecteur qui n'est autre que la vitesse de l'eau en ce point.

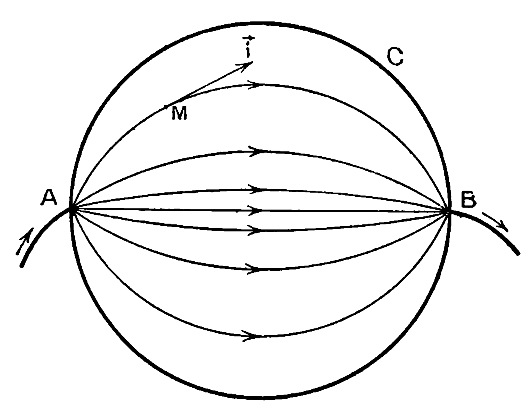


FIG. 151.

Si, en un point M, nous considérons un élément de surface dS_n normal au vecteur courant $\vec{i}$ (*fig.* 152), la quantité d'électricité dq qui traverse par seconde l'élément de surface dS_n est, par définition :

$$dq = i\,dS_n.$$

Les charges électriques se déplacent suivant les lignes de courant, qui sont normales à la surface dS_n : on peut considérer, au voisinage du point M, que la quantité d'électricité dq se déplace dans un tube de courant élémentaire, qui est un cylindre droit ayant pour base l'élément dS_n. Prenons une section quelconque dS de ce tube, et soit θ l'angle de sa normale avec le vecteur $\vec{i}$; sa projection sur un plan normal au courant est $dS_n = dS \cos\theta$. La quantité d'électricité dq qui traverse par seconde l'élément de surface dS est la même que celle qui traverse l'élément dS_n, et on a :

$$dq = i\,dS_n = i\,dS \cos\theta = \vec{i}\,\vec{dS}.$$

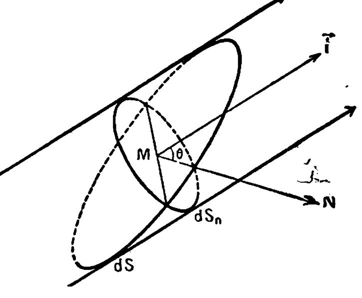


FIG. 152.

La quantité d'électricité qui traverse par seconde un élément de surface quelconque est égale au flux élémentaire du vecteur courant électrique à travers cet élément de surface. La quantité d'électricité qui traverse par seconde une surface quelconque est le flux du vecteur courant électrique à travers cette surface.

Lorsque le régime permanent est établi, chacun des éléments du volume du conducteur porte une charge constante. La quantité d'électricité qui pénètre à chaque instant dans un volume quelconque du conducteur est égale à celle qui en sort pendant le même temps : la quantité totale d'électricité qui traverse, de l'intérieur vers l'extérieur, la surface qui limite ce volume est nulle.

(1) On remarquera que la lettre i désigne maintenant une grandeur toute différente de celle que nous avons considérée dans les paragraphes précédents. Nous emploierons toujours, pour bien les distinguer, les mots *intensité du courant*, et *grandeur du vecteur courant*.

Le flux du vecteur courant électrique à travers une surface fermée quelconque est nul; autrement dit, *ce flux est conservatif*, et le vecteur $\vec{i}$ satisfait en tous les points du conducteur à la condition :

$$\operatorname{div}\vec{i} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0.$$

Considérons en particulier un conducteur cylindrique, dont les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur, parcouru par un courant électrique : les lignes de courant sont parallèles aux génératrices (*fig.* 153). Nous avons défini deux grandeurs distinctes, qu'il faut se garder de confondre. La première est la quantité totale d'électricité qui traverse le fil par unité de temps : c'est l'*intensité* I *du courant* dans le fil. La seconde est le *vecteur courant électrique* $\vec{i}$ en chaque point du fil ; il est parallèle en chaque point aux génératrices du cylindre, et sa grandeur i est égale à la quantité d'électricité qui traverse par unité de temps l'unité de surface prise dans la section du fil. Si S est cette section, on a :

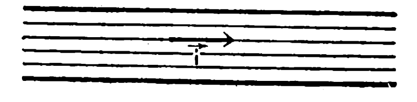


FIG. 153.

$$I = iS.$$

La quantité i est quelquefois appelée par les techniciens la densité de courant, et est exprimée en ampères par centimètre carré ou par millimètre carré. Ni l'une ni l'autre de ces unités ne peuvent être introduites dans une formule, l'ampère et le centimètre étant des unités qui n'appartiennent pas au même système. Lorsque nous considérerons la quantité i, grandeur du vecteur courant, nous l'exprimerons toujours en unités C. G. S., électrostatiques ou électromagnétiques : la surface S doit alors être exprimée en centimètres carrés.

CHAPITRE XIV

LOI D'OHM

I. — *CONDUCTEURS LINÉAIRES*

136. Loi d'Ohm : résistance. — Nous avons vu au paragraphe 129 que, si nous réunissons par un fil métallique homogène AB deux conducteurs C_1 et C_2 (*fig.* 154) maintenus par une source S à des potentiels constants V_A et V_B, il s'établit un régime permanent, dans lequel le fil AB est parcouru par un courant continu, d'intensité i, allant du potentiel le plus élevé au potentiel le moins élevé. L'intensité i dépend de la différence de potentiel $V_A - V_B$ suivant la **loi d'Ohm :**

L'intensité du courant qui parcourt un conducteur linéaire est proportionnelle à la différence de potentiel établie entre ses extrémités : on a :

$$\frac{V_A - V_B}{i} = C^{te}$$

La valeur de cette constante ne dépend que de la nature, de l'état physique et des dimensions du conducteur AB, et, bien entendu, des unités choisies : on l'appelle la *résistance électrique*, ou simplement la **résistance** du conducteur AB. Si on la désigne par r, la formule qui traduit la loi d'Ohm peut se mettre sous la forme :

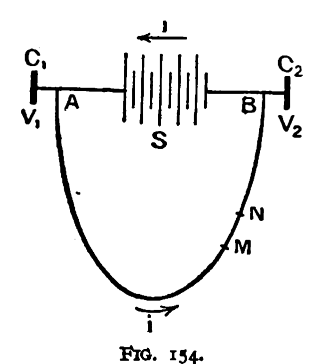


FIG. 154.

$$V_A - V_B = ri.$$

Si nous considérons une portion MN du conducteur linéaire, nous pouvons évidemment lui appliquer la même loi : le courant i qui la traverse est proportionnel à la différence de potentiel $V_M - V_N$ établie entre ses extrémités. Nous pouvons énoncer la loi d'Ohm sous la forme suivante :

Entre deux points M *et* N *d'un conducteur linéaire parcouru par un courant, il existe une différence de potentiel* $V_M - V_N$ *proportionnelle à l'intensité i de ce courant;* on a :

$$\frac{V_M - V_N}{i} = C^{te}.$$

La valeur de cette constante est, par définition, la résistance de la portion de conducteur MN.

Si un conducteur AB se compose de divers tronçons tels que AM, MN, NB (*fig.* 154), il est évident que la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre les extrémités du conducteur AB est égale à la somme des différences de potentiel $V_A - V_M$, $V_M - V_N$, $V_N - V_B$ entre les extrémités des divers tronçons. Il résulte de la définition même de la résistance que la résistance d'un conducteur linéaire formé de plusieurs conducteurs placés bout à bout, ou, comme l'on dit généralement, disposés *en série*, est la somme des résistances des diverses portions.

Nous n'indiquerons aucune vérification expérimentale de la loi d'Ohm : c'est la loi fondamentale qui est à la base de toutes les mesures électriques, et le fait de pouvoir effectuer ces mesures sans aboutir à des contradictions en fournit une vérification permanente, qu'on peut regarder comme extrêmement précise, étant donnée la précision des mesures électriques. Citons, parmi les mesures les plus précises, celle d'une résistance par le pont de Wheatstone (§ 142) et celle d'une force électromotrice par la méthode d'opposition (§ 156) : le fait qu'elles donnent des résultats indépendants de l'intensité du courant qui traverse la résistance à mesurer ou la résistance qui constitue le potentiomètre est une vérification expérimentale de la loi d'Ohm.

La loi d'Ohm permet de ramener la mesure d'une différence de potentiel à celle de l'intensité d'un courant. Si on intercale dans le conducteur AB un appareil permettant de mesurer cette intensité — un *ampèremètre* — ses indications sont proportionnelles à la différence de potentiel $V_A - V_B$, et la mesurent en valeur relative. L'appareil constitué par l'ampèremètre et la résistance AB s'appelle un *voltmètre :* ce sont des appareils de ce type qui sont presque exclusivement employés dans la pratique pour la mesure des différences de potentiel. Ici encore, le fait que leur emploi ne conduit à aucune contradiction peut être considéré comme une vérification permanente de la loi d'Ohm.

Tous les résultats que nous avons indiqués supposent essentiellement que l'intensité du courant est la même à travers toutes les sections du conducteur AB. *Ils supposent* qu'aucune charge électrique ne traverse la surface latérale de ce conducteur, c'est-à-dire *qu'il est parfaitement isolé. Ils supposent* que les charges électriques portées par les différentes parties du conducteur sont constantes, c'est-à-dire *qu'on a atteint le régime permanent.* Lorsque le fil conducteur AB n'est parcouru par aucun courant, tous ses points sont au même potentiel ; lorsqu'il est parcouru par un courant, ils sont à des potentiels différents : il résulte des lois de l'électrostatique que les charges portées par la surface de ce conducteur sont différentes dans les deux cas. Si, par exemple, la charge portée par le tronçon MN augmente pendant la période d'établissement du courant, c'est que, pendant cette période, le courant qui pénètre dans ce tronçon en M est supérieur à celui qui en sort en N. Le courant varie d'un point à l'autre du conducteur AB, et la loi d'Ohm n'est plus applicable à l'ensemble de ce conducteur.

Nous n'étudierons pas cette période de régime variable ; elle est en général extrêmement courte, et son étude n'a d'importance pratique que lorsque la capacité du conducteur AB est considérable, en particulier dans le cas des câbles sous-marins.

137. Résistivité. — Considérons un fil conducteur cylindrique AB, de longueur l, de section s et de résistance r, parcouru par un courant d'intensité i; nous supposons les dimensions transversales du fil négligeables par rapport à sa longueur.

Supposons ce fil partagé en n segments égaux (trois dans la figure 155, AM, MN, NB) : ces n segments ont des longueurs égales, $l' = \frac{l}{n}$, et des résistances égales r'. Nous avons déjà remarqué que la résistance totale du fil est égale à la somme des résistances des différents segments : chacune de ces résistances est $r' = \frac{r}{n}$. La loi d'Ohm, et la définition de la résistance qui en résulte, entraînent donc les deux lois suivantes :

A M N B

FIG. 155.

La résistance d'un fil conducteur cylindrique est proportionnelle à sa longueur :

$$\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'}.$$

La différence de potentiel $V' = r'i$ *entre deux points d'un fil cylindrique parcouru par un courant électrique est proportionnelle à la longueur* l' *qui sépare ces deux points :*

$$\frac{V'}{V} = \frac{r'i}{ri} = \frac{l'}{l}.$$

Cette propriété peut être utilisée pour obtenir des différences de potentiel variables à volonté et connues en valeur relative, au moyen d'un appareil appelé **potentiomètre** (*fig.* 156). Le courant constant fourni par une source S (un accumulateur par exemple) traverse un fil tendu AB ; un curseur mobile peut se déplacer le long du fil AB, et permet d'établir entre deux conducteurs C_1C_2 la différence de potentiel V' qui existe entre les deux points A et C. En déplaçant le curseur, on peut faire varier la différence de potentiel V' entre la valeur o et la valeur $V = V_A - V_B$; elle est mesurée en valeur relative par la longueur l' du segment AC. Ce dernier résultat n'est exact qu'à la condition qu'il ne passe aucun courant entre les conducteurs C_1 et C_2 ; si la dérivation AC_1C_2C est parcourue par un courant i', il reste approximativement exact à la condition que ce courant i' soit négligeable par rapport au courant i qui parcourt le fil AB : on s'en rendra compte aisément par l'application des lois de Kirchhoff, que nous établirons dans la deuxième partie de ce chapitre.

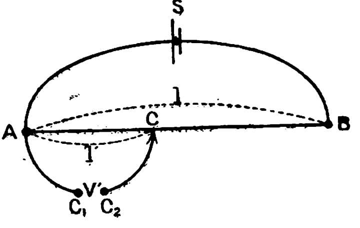


FIG. 156.

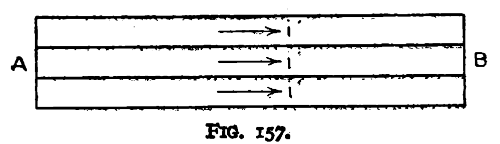


FIG. 157.

Nous avons déjà indiqué (§ 135) que, lorsque le fil cylindrique AB est par-

couru par un courant, les lignes de courant dans le fil sont parallèles aux génératrices du cylindre, et que chacun des éléments de la section du fil est traversé par un courant proportionnel à sa surface. Si nous considérons le fil AB comme formé par la juxtaposition de n fils de longueur l et de section $s' = \frac{s}{n}$ (*fig.* 157), chacun de ces fils est parcouru par un courant $i' = \frac{i}{n}$. La résistance est $r' = \frac{V_A - V_B}{i'} = n\frac{V_A - V_B}{i} = nr$. Nous voyons donc que :

La résistance d'un fil cylindrique conducteur est inversement proportionnelle à sa section :

$$\frac{r'}{r} = \frac{s}{s'}.$$

Les deux lois qui donnent la variation de la résistance avec la longueur et avec la section peuvent être réunies dans la formule :

$$r = \rho \frac{l}{s}.$$

Cette formule définit une nouvelle grandeur, mesurée par le nombre ρ. Ce coefficient, qui ne dépend plus des dimensions du fil, ne dépend que de sa nature et de son état, et caractérise le métal dont il est formé. On l'appelle la **résistivité** de ce métal. On considère aussi souvent l'inverse de la résistivité, $\sigma = \frac{1}{\rho}$, que l'on appelle la **conductivité** du métal.

Nous avons supposé les conducteurs rectilignes, mais il est évident que les formules obtenues s'appliquent encore à des fils contournés de façon quelconque : elles supposent simplement que la section soit constante et les dimensions transversales petites par rapport à la longueur. En fait, les résistances qu'on a le plus souvent à considérer sont formées de fils enroulés sur des bobines.

Si une portion d'un circuit électrique se compose de fils de sections différentes ajoutés bout à bout, sa résistance est égale à la somme des résistances des parties qui la composent :

$$r = \sum \rho \frac{l}{s}.$$

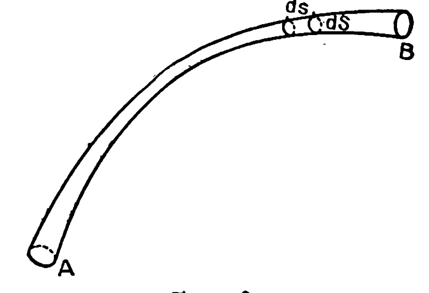


FIG. 158.

En réalité, la loi d'Ohm et les conséquences que nous en avons déduites ne s'appliquent que si tous les conducteurs mis bout à bout sont formés d'un même métal à la même température. Nous verrons plus tard comment il faut compléter la loi d'Ohm pour tenir compte de la différence de potentiel qui existe au contact de deux métaux différents (§ 80) ; *mais dans tous les cas, nous conserverons comme définition de la résistance d'une série de conducteurs celle que nous venons de donner : elle est égale à la somme des résistances des différents conducteurs en série.*

Dans le cas où la section du fil varie d'une façon continue (*fig.* 158), nous prendrons comme résistance la somme des résistances des différents éléments de longueur : si dS est la section de l'élément ds, et σ sa conductivité, la résistance du fil entre les deux points A et B sera :

$$r = \int_A^B \frac{ds}{\sigma dS}.$$

138. Unités de résistance. — La définition que nous avons donnée de la résistance d'un conducteur définit complètement sa mesure. Le nombre r qui mesure la résistance d'un conducteur est le quotient du nombre V qui mesure la différence de potentiel établie entre ses extrémités par le nombre i qui mesure l'intensité du courant qui le traverse ; on a :

$$r = \frac{V}{i}.$$

L'unité de résistance est la résistance d'un conducteur qui est parcouru par un courant égal à l'unité de courant lorsqu'on établit entre ses bornes une différence de potentiel égale à l'unité de différence de potentiel.

Cette définition est valable dans tous les systèmes d'unités.

Nous pouvons l'appliquer dans le système électrostatique, dans lequel nous avons défini l'unité d'intensité de courant (§ 133) et l'unité de différence de potentiel (§ 22). Les dimensions de la différence de potentiel sont $V = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ (§ 78) ; celles de l'intensité de courant sont $I = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}$ (§ 133) ; les dimensions de l'unité électrostatique de résistance sont :

$$R = \frac{V}{I} = L^{-1}T$$

Les définitions des unités de résistivité et de conductivité se déduiront des formules :

$$r = \rho\frac{l}{s}, \qquad \text{ou} \qquad \sigma = \frac{1}{r}\frac{l}{s}.$$

Les dimensions de l'unité électrostatique de conductivité seront :

$$\sigma = \frac{1}{R}\cdot\frac{L}{L^2} = T^{-1}.$$

Dans un changement d'unités, l'unité électrostatique de conductivité varie en raison inverse de l'unité de temps ; le produit du nombre qui mesure une conductivité par le nombre qui mesure un temps est indépendant de la grandeur des unités fondamentales.

Nous n'avons pas encore donné la définition de l'unité électromagnétique de différence de potentiel, mais cette définition résulte immédiatement de la définition générale donnée au paragraphe 22, à partir de la formule $W = qV$:

l'unité électromagnétique C. G. S. de différence de potentiel est la chute de potentiel que doit subir l'unité électromagnétique C. G. S. de quantité d'électricité pour que le travail des forces électriques qui agissent sur elle soit égal à un erg. Comme l'unité électromagnétique C. G. S. de quantité d'électricité vaut $c = 3 \cdot 10^{10}$ unités électrostatiques C. G. S., l'unité électromagnétique C. G. S. de différence de potentiel vaut $1/c = 1/3 \cdot 10^{10}$ unités électrostatiques C. G. S. (cf. § 151).

L'unité électromagnétique C. G. S. de résistance est, d'après notre définition générale, la résistance d'un conducteur qui est parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité électromagnétique C. G. S. d'intensité de courant ($i = c = 3 \cdot 10^{10}$ u. é. s.) *lorsque la différence de potentiel entre ses bornes est égale à l'unité électromagnétique C. G. S. de différence de potentiel* ($V = 1/c = 1/3 \cdot 10^{10}$ u. é. s.). Elle est égale à $r = V/i = 1/c^2 = 1/9 \cdot 10^{20}$ unités électrostatiques C. G. S. (cf. § 151).

L'unité pratique de différence de potentiel est le **volt**; le volt est, par définition, égal à 10^8 unités électromagnétiques, de sorte que l'unité pratique de travail, définie par la formule $W = qV$ à partir du coulomb (10^{-1} u. é. m.) et du volt est le *joule*, qui vaut 10^7 ergs. Le volt vaut $10^8/c = 1/300$ d'unité électrostatique C. G. S. : c'est la définition provisoire que nous avons donnée au paragraphe 23.

L'unité pratique de résistance est la résistance d'un conducteur qui est parcouru par un courant d'un ampère lorsqu'on établit entre ses extrémités une différence de potentiel d'un volt : elle a reçu le nom d'**ohm**. On emploie naturellement aussi les multiples et sous-multiples décimaux de l'ohm, en particulier le *mégohm*, qui vaut un million d'ohms, et le *microhm*, qui vaut un millionième d'ohm.

La différence de potentiel d'un volt valant $V = 10^8$ u. é. m., et l'intensité d'un ampère valant $i = 10^{-1}$ u. é. m., le conducteur de résistance égale à l'ohm a une résistance $r = V/i = 10^9$ u. é. m. *L'ohm vaut* 10^9 *unités électromagnétiques* C. G. S.; il vaut donc $10^9/9 \cdot 10^{20} = 1/9 \cdot 10^{11}$ unités électrostatiques C. G. S.

Pendant longtemps, on n'a pas su réaliser les mesures absolues électromagnétiques des résistances, nécessaires pour matérialiser l'ohm par un étalon, avec une précision suffisante pour les besoins de la métrologie. La Conférence de Londres de 1908 (cf. § 134) avait décidé de prendre comme définition de l'ohm la définition de l'étalon qui le représente : l'unité ainsi définie est l'**ohm international**, et cette unité a été rendue légale en France par la loi du 2 avril 1919. C'est, par définition, la résistance à 0° C. d'une colonne de mercure d'une masse de $14^g,4521$, d'une section constante [1], et d'une longueur de $106^{cm},300$. On pense aujourd'hui que la mesure absolue d'une résistance est plus précise que le calibrage et le jaugeage du tube d'un étalon mercuriel : aussi la 8e Conférence Générale des Poids et Mesures a-t-elle décidé, comme pour l'ampère (§ 134) que l'on reviendrait à partir de 1935 à la définition de l'ohm comme une résistance égale à 10^9 u. é. m. C. G. S.

Dans la pratique, on calcule généralement les résistivités par la formule $r = \rho l / s$, en exprimant la résistance r en ohms ou en microhms, la longueur l en centimètres et la section s en centimètres carrés. On exprime alors les résistivités en ohms-centimètres ou en microhms-centimètres. Il faut

(1) La section de cette colonne de mercure est d'ailleurs de 1 millimètre carré; mais la définition est donnée à partir de la masse, qu'il est plus facile de mesurer avec précision.

prendre garde qu'il s'agit là d'unités qui n'appartiennent à aucun système régulier, et, dans les formules générales où intervient la résistivité, il faudra transformer les nombres usuels de façon à l'exprimer, par exemple, dans le système électrostatique. Il suffit de se rappeler que l'unité électrostatique C.G.S. de résistance vaut 9.10^{11} ohms, et par conséquent que l'unité électrostatique de résistivité vaut 9.11^{11} ohms-centimètres.

139. Données numériques et résistances usuelles. — La résistivité des métaux est en général de l'ordre de quelques microhms-cm. Les métaux les plus conducteurs sont l'argent et le cuivre : aussi emploie-t-on le cuivre pour les câbles électriques, les enroulements de dynamos, etc. On fabrique également des câbles en aluminium : à résistance égale, ils ont une section 1,67 fois plus grande, mais une masse deux fois plus petite que les câbles en cuivre. Les alliages ont en général des résistances supérieures à celles des métaux purs : on les emploie lorsqu'on veut obtenir de grandes résistances, par exemple pour la construction des rhéostats. Toutefois certains bronzes, phosphoreux ou silliceux, ont une résistance électrique peu supérieure à celle du cuivre, tandis que leur résistance mécanique est très supérieure : ils sont souvent employés pour la construction des lignes aériennes.

La résistivité d'un conducteur varie avec la température : elle augmente avec la température dans la plupart des cas, et on peut en général représenter sa variation par une formule de la forme $\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$.

La précision avec laquelle on peut mesurer la résistance d'un conducteur a permis d'employer cette mesure à la détermination de très faibles élévations de température, comme celles d'un fil de platine recevant un rayonnement lumineux (*bolomètre*). On emploie également dans l'industrie, pour la détermination, par exemple, de la température d'un four, la mesure de la résistance d'un fil de platine placé dans ce four (*thermomètre à résistance*).

Pour la plupart des métaux purs, le coefficient α est voisin du coefficient de dilatation des gaz, $1/273 = 36,6 \cdot 10^{-4}$. Pour les alliages, le coefficient α est nettement plus petit ; il est souvent inférieur à 10^{-3}, et peut dans certains cas être nul ou même légèrement négatif. Les alliages sont donc particulièrement indiqués pour la construction des résistances dont la valeur ne doit pas être modifiée par l'échauffement.

Le tableau suivant donne, pour quelques métaux et alliages, les valeurs de ρ à la température ordinaire, exprimées en microhms-cm, ainsi que les valeurs de α, multipliées par 10^4.

Conducteur	Composition	ρ	$\alpha \cdot 10^4$
Cuivre électrolytique...		1,54	41
Aluminium		2,9	38
Fer..................		11	55
Mercure..............		94,076	8,8745
Ferro-nickel	0,74 Fe ; 0,25 Ni ; 0,008 C	80	9
Maillechort	0,60 Cu ; 0,25 Zn ; 0,15 Ni	30	3,6
Manganine............	0,86 Cu ; 0,12 Mn ; 0,02 Ni	42	0,1
Constantan............	0,60 Cu ; 0,40 Ni	49	— 0,1 à + 0,1

Les résistances employées dans la pratique industrielle sont généralement constituées par des fils de ferro-nickel ou de maillechort. On a souvent besoin de pouvoir introduire dans un circuit une résistance variable : l'appareil qui permet de la réaliser s'appelle un **rhéostat**. Dans le rhéostat représenté par la figure 160, les spires sont intercalées entre des plots sur lesquels s'appuie un contact glissant : le courant arrive par la borne de gauche, qui communique avec le premier plot, traverse les spires comprises entre les différents plots, jusqu'à celui sur lequel repose la manette, et s'écoule par une borne qui communique avec la manette : la résistance augmente à mesure qu'on déplace la manette vers la droite. Dans le rhéostat de la figure 161, la résistance est constituée par un fil isolé enroulé sur un cylindre ; ses extrémités communiquent avec les bornes A et B ; le fil est dénudé suivant une génératrice, et un curseur C communiquant avec une borne D permet de limiter la partie utilisée. Si l'on intercale le rhéostat dans le circuit par les deux bornes A et D, sa résistance est la résistance de la portion de fil comprise entre A et C, elle augmente à mesure qu'on déplace le curseur C vers la droite. Si le rhéostat est intercalé sur un circuit par les deux bornes A et B, on obtient entre les bornes A et D une différence de potentiel qui augmente à mesure qu'on déplace le curseur C vers la droite : le rhéostat ainsi utilisé constitue un potentiomètre.

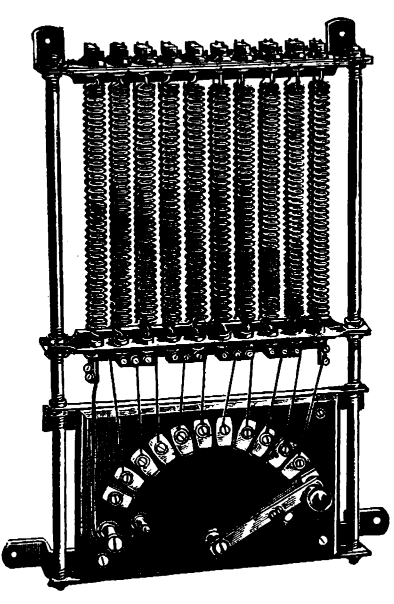


Fig. 160.

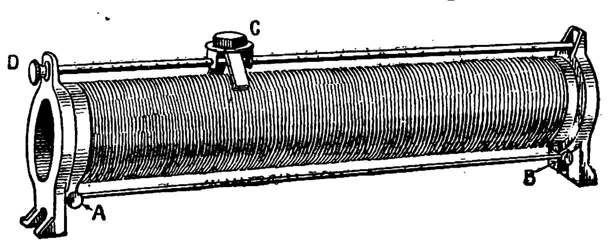


Fig. 161.

On utilise constamment dans les laboratoires de mesure des **résistances étalonnées**, réunies en **boîtes de résistances**. La figure 162 représente un des modèles les plus couramment employés ; les différentes bobines forment des séries analogues à celles des boîtes de poids : leurs résistances sont les multiples 1, 2, 2,5 de l'ohm et de ses multiples décimaux, et la résistance totale est de 11.110 ohms. Leurs extrémités sont réunies à des pièces de cuivre fixées sur une pla-

que d'ébonite : des chevilles de cuivre, qu'on enfonce dans des échancrures ménagées entre elles, permettent de supprimer du circuit les résistances correspondantes, dont la valeur est gravée sur l'ébonite. Il faut prendre soin d'enfoncer ces chevilles avec une forte pression, les résistances de contact n'étant négligeables qu'à cette condition.

Les résistances des boîtes de résistances sont étalonnées en les comparant à l'ohm-étalon par les procédés que nous verrons plus loin. Cet étalonnage n'est valable que pour la température à laquelle il a été fait, le plus souvent

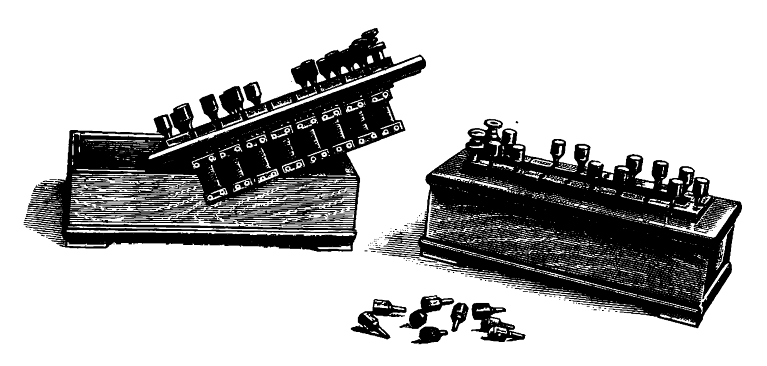


FIG. 162.

15° centigrades. Les corrections de température sont en général faibles, car on choisit pour le fil un alliage pour lequel le coefficient α est faible (le plus souvent de la manganine) ; il faut néanmoins s'en défier, et notamment prendre garde que les bobines peuvent s'échauffer par le fait même du passage du courant. On ne doit d'ailleurs faire passer que des courants très faibles dans les boîtes de résistances, surtout dans les bobines de grande résistance, dont le fil est très fin, et fondrait facilement (cf. § 147).

II. — *RÉSEAUX DE CONDUCTEURS*

140. Lois de Kirchhoff. — Supposons que des conducteurs linéaires soient réunis entre eux par des liaisons quelconques, de façon à former un réseau de conducteurs, analogue, par exemple, à celui que représente la figure 163.

Considérons d'abord un sommet du réseau, tel que le point C : lorsque le régime permanent est atteint, la charge portée par les portions de conducteurs qui l'environnent reste constante. La quantité d'électricité qui arrive à chaque instant au point C est donc égale à celle qui s'en éloigne, *la somme des intensités des courants qui s'approchent d'un sommet du réseau est égale à la somme des intensités des courants qui s'en éloignent.*

Cette loi est ce qu'on appelle la **première loi de Kirchhoff.** Choisissons pour sens positif sur chaque conducteur le sens qui s'éloigne du point C (*fig.* 164), et considérons l'intensité du courant électrique qui le parcourt comme une gran-

deur algébrique, positive quand le courant circule dans le sens positif, négative quand il circule dans le sens négatif : *la somme algébrique des intensités des courants qui s'éloignent d'un sommet du réseau est nulle.* On peut écrire :

$$\Sigma i = 0.$$

On peut d'ailleurs utiliser la notation algébrique quels que soient les sens positifs choisis sur les différents conducteurs ; on aura à écrire que la somme

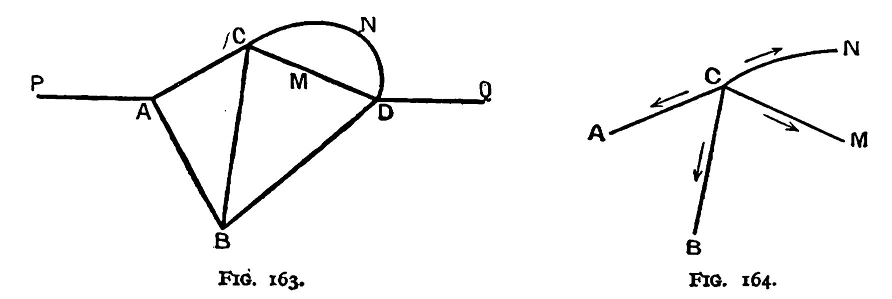


FIG. 163. FIG. 164.

algébrique des intensités des courants correspondant aux conducteurs pour lesquels le sens positif choisi s'éloigne du sommet est égale à la somme algébrique des intensités des courants correspondant aux conducteurs pour lesquels le sens positif s'en rapproche.

Considérons maintenant un circuit fermé formé par un certain nombre de conducteurs du réseau, par exemple le circuit ACB. Supposons que les sens positifs choisis sur chaque conducteur soient ceux qu'on obtient en parcourant le circuit dans le sens ACB (*fig.* 165), et appliquons la loi d'Ohm à chaque conducteur ; on a :

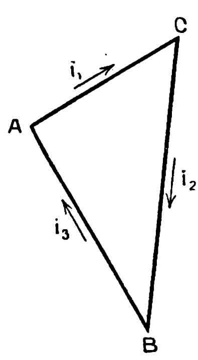


FIG. 165.

$$V_A - V_C = i_1 r_1, \qquad V_C - V_B = i_2 r_2, \qquad V_B - V_A = i_3 r_3.$$

Toutes ces relations sont des relations algébriques, car le sens d'un courant est celui de la différence de potentiel entre les extrémités du conducteur qu'il parcourt. En les ajoutant membre à membre, on obtient la relation qui exprime la **seconde loi de Kirchhoff :**

$$\Sigma ri = 0.$$

Lorsque plusieurs conducteurs forment un circuit fermé, la somme algébrique des produits de la résistance de chaque conducteur par l'intensité du courant qui le parcourt est nulle.

Si le sens positif choisi sur certains conducteurs est le sens inverse de celui dans lequel on parcourt le circuit, il est évident qu'ils devront figurer dans la relation par le terme $-ri$ au lieu de $+ri$.

Pour trouver la distribution des intensités dans un réseau de conducteurs, on prendra des sens positifs arbitraires sur chacun des conducteurs, et on

écrira les relations de Kirchhoff pour les différents sommets et pour les différents circuits fermés que l'on peut constituer. On aura un système d'équations linéaires, qui contient exactement autant d'équations indépendantes qu'il en faut pour déterminer les intensités inconnues. Ces équations admettent un seul système de solutions, et fournissent les valeurs algébriques des intensités.

Si on considère par exemple le réseau de conducteurs de la figure 163, et si l'on prend comme données l'intensité du courant qui y est amené par le conducteur PA et s'écoule par le conducteur DQ, on vérifiera aisément qu'on obtient six équations indépendantes pour déterminer les intensités dans les six conducteurs du réseau en appliquant la première loi de Kirchhoff aux trois sommets A, B, C, et la seconde aux trois circuits ABC, BCMD et CMDN. L'équation qu'on obtiendrait en appliquant la première loi de Kirchhoff au sommet D est une conséquence des trois premières, celle qu'on obtiendrait en appliquant la seconde loi au circuit BCND, par exemple, est une conséquence des deux dernières.

La démonstration que nous avons donnée de la seconde loi de Kirchhoff suppose implicitement tous les conducteurs de même nature. Nous verrons dans le prochain chapitre comment il faut modifier la formule pour tenir compte des différences de potentiel au contact entre deux métaux différents ; nous verrons également plus loin (§ 173) que la relation $\Sigma ri = 0$ reste valable pour des circuits formés de métaux quelconques, pourvu qu'ils soient tous à la même température.

141. Courants dérivés. — Supposons qu'un circuit parcouru par un courant soit bifurqué entre deux points A et B. Le courant I arrivant par le conducteur PA se partage en A entre différents conducteurs AM_1B, AM_2B, etc., qui se rejoignent au point B, et s'écoule ensuite par le conducteur BQ (*fig.* 166). On dit alors que les conducteurs AM_1B, AM_2B, etc., sont disposés *en dérivation*. Nous allons calculer, connaissant le courant total I et les résistances r_1, r_2, r_3 ... des différents conducteurs, les intensités des courants i_1, i_2, i_3, ... qui les parcourent.

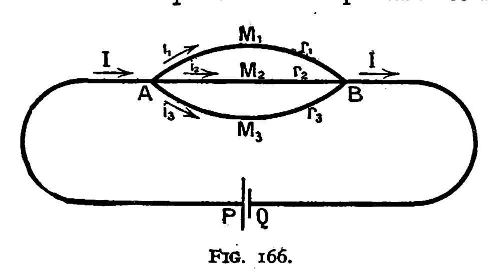


FIG. 166.

Nous pouvons écrire les équations qui expriment les lois de Kirchhoff. Prenons comme sens positifs ceux qu'indiquent les flèches. La première loi, appliquée au point A ou au point B, donne la même équation :

$$i_1 + i_2 + i_3 \ldots = I.$$

La seconde loi devra être appliquée successivement aux différents circuits tels que AM_2BM_1, ... ; on obtiendra plus rapidement les équations qu'elle fournit en appliquant la loi d'Ohm à chacun des conducteurs dérivés. On a :

$$V_A - V_B = r_1 i_1 = r_2 i_2 = r_3 i_3 \ldots$$

Les intensités des courants dans les conducteurs dérivés sont inversement proportionnelles à leurs résistances.

On peut écrire ces relations :

$$V_A - V_B = \frac{i_1}{\frac{1}{r_1}} = \frac{i_2}{\frac{1}{r_2}} = \frac{i_3}{\frac{1}{r_3}} \cdots = \frac{i_1 + i_2 + i_3 \cdots}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \cdots} = \frac{I}{\sum \frac{1}{r}}.$$

Sous cette forme, elles donnent immédiatement les intensités i en fonction de l'intensité I et des résistances r. Cherchons quelle serait la résistance R d'un conducteur unique qui, placé entre les points A et B, équivaudrait au faisceau de conducteurs. Il serait parcouru par un courant d'intensité I, et on aurait, d'après la loi d'Ohm :

$$V_A - V_B = RI = \frac{I}{\frac{1}{R}}.$$

La comparaison de cette relation avec les précédentes donne :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \cdots = \sum \frac{1}{r}$$

L'inverse $\frac{1}{r}$ de la résistance d'un conducteur s'appelle sa *conductance*, et la relation que nous venons d'écrire exprime le **théorème des conductances :** *la conductance d'un faisceau de conducteurs est égale à la somme des conductances des conducteurs qui le constituent.*

Un cas important est celui d'un appareil de mesure des intensités de courant — galvanomètre ou ampèremètre — entre les bornes duquel est placée en dérivation une résistance, qu'on appelle alors un **shunt :** on réalise ce dispositif (*fig.* 167) pour utiliser un appareil à la mesure d'un courant I supérieur à celui qu'il peut supporter. Pour obtenir la valeur de I, il faut multiplier les indications de l'appareil par un nombre m, qui est le rapport I / i du courant total au courant qui traverse le galvanomètre, et qu'on peut calculer si l'on connaît les résistances g et s du galvanomètre et du shunt. On a :

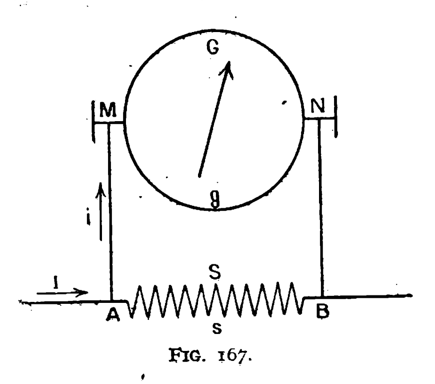


FIG. 167.

$$\frac{i}{\frac{1}{g}} = \frac{I}{\frac{1}{g} + \frac{1}{s}}, \qquad m = \frac{I}{i} = \frac{\frac{1}{g} + \frac{1}{s}}{\frac{1}{g}} = 1 + \frac{g}{s}.$$

Si l'on veut, par exemple, que m soit égal à 100, il suffit de prendre $g / s = 99$ ou $s = g / 99$.

Dans la pratique, il n'y a pour ainsi dire pas une seule mesure de courant dans laquelle il ne soit fait usage d'un shunt, soit que l'opérateur le dispose lui-même, soit que le constructeur l'ait disposé une fois pour toutes à l'intérieur du boîtier de l'appareil. Les ampèremètres à cadre mobile, par exemple, donnent en général une déviation correspondant à toute l'échelle lorsque le cadre est traversé par un courant de quelques milliampères : il faut shunter le cadre pour mesurer des courants supérieurs, et on peut mesurer un courant quelconque, de 1.000 ampères si l'on veut, en choisissant convenablement la résistance du shunt.

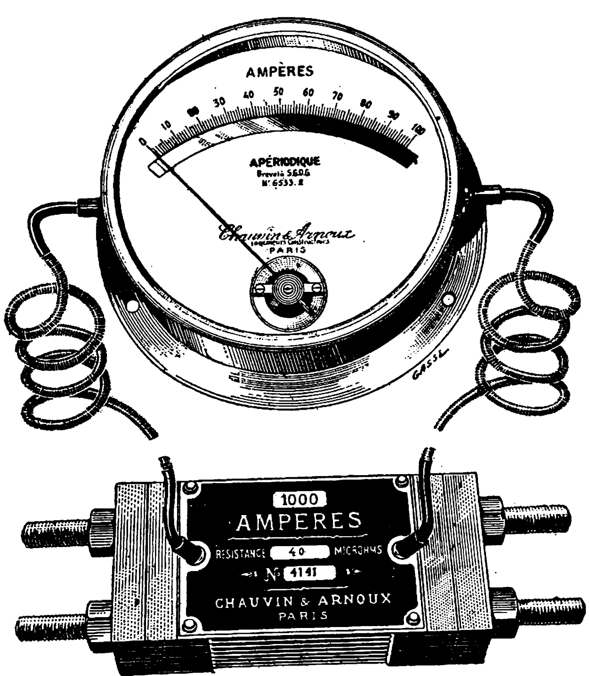


FIG. 168.

Lorsqu'on utilise un shunt extérieur, les connexions sont en général celles que représentent les figures 167 et 168 ; il faut remarquer que les résistances des cordons de shunt AM et NB font partie de la résistance g du galvanomètre, ainsi que les résistances de contact des chevilles qui les relient au shunt et au galvanomètre. La valeur du pouvoir multiplicateur m dépend de la valeur de ces résistances : il faut employer les cordons fournis avec l'appareil, qui ont été utilisés lors de l'étalonnage, et avoir soin d'enfoncer suffisamment les chevilles pour que les résistances de contact soient négligeables.

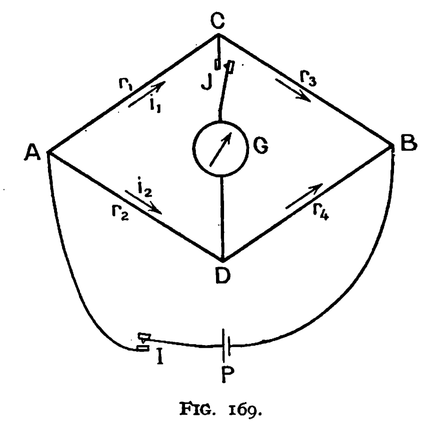


FIG. 169.

142. Pont de Wheatstone.— On utilise, pour la comparaison des résistances, un montage connu sous le nom de **pont de Wheatstone.** Quatre résistances r_1, r_2, r_3, r_4 sont disposées de façon à former un quadrilatère (*fig.* 169) ; au moyen d'une pile P, on établit entre deux sommets opposés A et B une certaine différence de potentiel ; entre les deux autres sommets C et D on dispose un galva-

nomètre G. Lorsque le régime permanent est établi, il passe un certain courant dans la diagonale CD : on dit que *le pont est équilibré* lorsque son intensité est nulle.

L'application de la première loi de Kirchhoff aux points C et D montre que les conducteurs AC et CB sont alors parcourus par un même courant i_1, et les conducteurs AD et DB par un même courant i_2. L'application de la seconde loi aux deux circuits ACD, BCD donne les équations :

$$i_1 r_1 = i_2 r_2, \qquad i_1 r_3 = i_2 r_4.$$

On peut remarquer que ces équations expriment que les potentiels V_C et V_D des points C et D sont égaux, en exprimant que les différences de potentiel $V_A - V_C$ et $V_A - V_D$ d'une part, $V_C - V_B$ et $V_D - V_B$ d'autre part, sont égales. Si on égale les deux valeurs qu'elles fournissent pour le rapport i_1 / i_2, on obtient la condition d'équilibre du pont en régime permanent :

$$\frac{r_4}{r_3} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Pour mesurer une résistance inconnue r_4, on réalise un pont de Wheatstone avec cette résistance et trois résistances étalonnées r_1, r_2, r_3, et on fait varier l'une de ces résistances jusqu'à ce que le pont soit équilibré. On emploie généralement des boîtes de résistances spéciales, dites **boîtes à pont**, contenant les

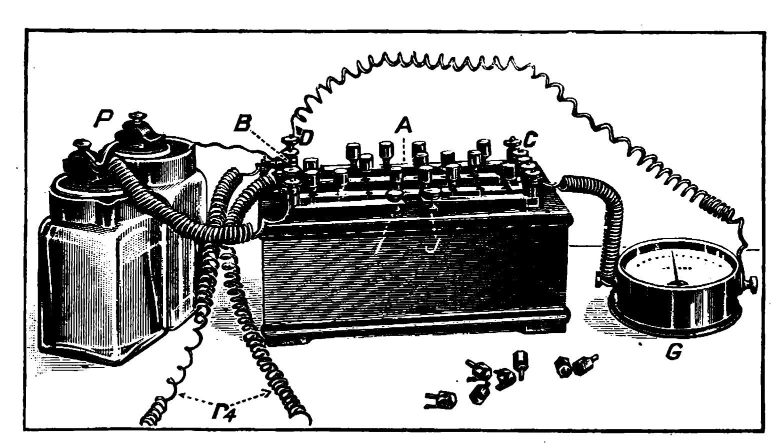


FIG. 170.

trois résistances r_1, r_2, r_3, connectées de telle sorte qu'il suffit de réunir, par des fils conducteurs, la pile, le galvanomètre et la résistance à mesurer aux différentes bornes de la boîte, suivant les indications portées par ces bornes. La figure 170 représente une boîte ainsi disposée ; les lettres qui y figurent correspondent au schéma de la figure 169. Les résistances r_1 et r_2 comprennent des bobines de résistances 10, 100 et 1.000, de sorte qu'on peut donner au rapport r_2 / r_1 les valeurs 0,01, 0,1, 1, 10 et 100 ; la résistance r_3 peut donner toutes les valeurs exprimées en nombres entiers d'ohms de 1 à 11.110 ohms. Deux interrup-

teurs I et J permettent de couper le courant de la pile ou d'isoler le galvanomètre : pour faire une mesure, on ferme d'abord l'interrupteur I, pour laisser le régime permanent s'établir dans les branches du pont, puis l'interrupteur J : l'impulsion du galvanomètre donne immédiatement le sens de la différence de potentiel $V_C - V_D$. Il est important de ne laisser passer le courant que pendant le temps strictement nécessaire à l'observation, pour éviter l'échauffement des fils ; il est également important, pour éviter toute perte de temps, d'essayer les diverses bobines de la résistance r_3 dans l'ordre strictement décroissant, jusqu'à ce qu'on ait trouvé deux valeurs de cette résistance donnant, l'une une déviation à droite, l'autre une déviation à gauche. On peut enfin, lorsqu'on a trouvé deux valeurs de r_3 différant d'un ohm, l'une trop forte et l'autre trop faible, pousser l'approximation plus loin en mesurant les déviations correspondantes, et admettant qu'elles sont proportionnelles à l'erreur de réglage.

Les mesures faites par cette méthode peuvent être extrêmement précises, si l'on dispose d'un galvanomètre sensible. Même avec un galvanomètre de type courant, il est facile, dans la mesure des résistances moyennes, d'obtenir une précision du cent-millième, à condition que les résistances soient définies avec cette précision : il est nécessaire que tous les contacts soient parfaitement assurés, que les résistances des fils de connexion des branches du pont soient négligeables, qu'il n'existe nulle part de force électromotrice d'origine thermoélectrique, et que la température de chaque résistance soit parfaitement définie.

III. — *MILIEU CONDUCTEUR HOMOGÈNE*

143. Énoncé général de la loi d'Ohm. — Nous savons qu'un conducteur est en équilibre lorsque tous ses points sont au même potentiel. S'il existe entre eux des différences de potentiel, elles produisent un déplacement de l'électricité, c'est-à-dire un courant électrique, dirigé des points où le potentiel est le plus élevé vers ceux où il est le plus faible. Le courant électrique résulte de l'existence de différences de potentiel, c'est-à-dire de l'existence d'un champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ (1) : il est naturel d'admettre que sa direction est la même que celle de la cause qui le produit, et qu'il lui est proportionnel. C'est cette hypothèse qui est à la base de la théorie donnée par Ohm ; nous l'énoncerons, en disant :

Le vecteur courant électrique (§ 135) *en un point d'un conducteur est proportionnel au vecteur champ électrique en ce point;* on a, σ étant une constante qui dépend de la nature du milieu conducteur :

$$\vec{i} = \sigma\vec{E}.$$

Nous admettons que, *dans un conducteur homogène, parcouru par un régime*

(1) Nous emploierons désormais la lettre $\vec{E}$ pour désigner le champ électrique, et nous réserverons la lettre $\vec{H}$ pour désigner le champ magnétique.

permanent de courants, le champ $\vec{E}$ est celui qui résulte, d'après la loi de Coulomb, de la répartition, à l'instant considéré, des charges électriques.

Nous prendrons comme point de départ ces hypothèses fondamentales, que nous admettrons sans chercher à les vérifier directement, et nous en développerons les conséquences. Nous montrerons en particulier que, parmi ces conséquences, se trouvent les lois données aux paragraphes précédents pour les conducteurs linéaires, lois dont la vérification résulte de l'ensemble des mesures électriques (§ 136).

Le calcul du vecteur courant $\vec{i}$ résulte du calcul du vecteur champ électrique $\vec{E}$ en chaque point, et ce dernier calcul se ramène au calcul de la fonction potentiel V. Le vecteur courant $\vec{i}$ a en chaque point même direction que le champ électrique $\vec{E}$, il est normal à la surface $V = C^{te}$ qui passe par ce point ; *les lignes de courant sont confondues avec les lignes de force, et sont les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles.* La loi d'Ohm $\vec{i} = \sigma\vec{E}$ peut s'écrire :

$$\vec{i} = -\sigma \,\overrightarrow{\text{grad}}\, V.$$

Nous avons déjà remarqué (§ 135) qu'en régime permanent le vecteur courant $\vec{i}$ satisfait à la condition $\text{div}\,\vec{i} = 0$. Il résulte de la loi d'Ohm que l'on a également $\text{div}\,\vec{E} = 0$, et comme, d'après le théorème de Poisson, on a $\text{div}\,\vec{E} = -\Delta V = 4\pi\rho$, il résulte des hypothèses fondamentales que, *quand un système de conducteurs est arrivé à un régime permanent, la densité cubique électrique est nulle en tous les points des conducteurs ; l'électrisation des conducteurs est purement superficielle.*

Cette loi n'est pas en contradiction avec l'existence du courant électrique dans toute la masse du conducteur : elle signifie simplement que la somme algébrique des quantités d'électricité positive et négative contenues dans un élément de volume est toujours nulle. C'est cette somme algébrique qui est la seule quantité accessible à l'expérience (§ 26) ; de même, l'expérience ne peut rien nous apprendre sur les déplacements réels des charges électriques qui produisent le courant électrique. Rien ne nous empêche de supposer que seule l'une des deux électricités est susceptible de se déplacer ; mais nous devons supposer que, dans chaque élément de volume du conducteur parcouru par un système de courants permanents, l'autre électricité existe en quantité égale et reste immobile.

144. Conducteurs linéaires. — Considérons un fil cylindrique AB, de section s, dont la longueur l est grande par rapport aux dimensions transversales, et que nous supposons parfaitement isolé. Quand l'état de régime permanent est atteint, les lignes de courant sont parallèles aux génératrices du cylindre (*fig.* 171), et les surfaces équipotentielles sont les plans de section droite du cylindre. La grandeur i du vecteur courant $\vec{i}$ en un point M est :

$$i = -\sigma \frac{dV}{dl}.$$

La fonction potentiel V et sa dérivée $\frac{dV}{dl}$ ont la même valeur en tous les points du plan de section droite PQ ; il en est de même de la quantité i, et le courant total I qui traverse la section PQ du fil est :

$$I = is = -\sigma s \frac{dV}{dl}.$$

Le courant I est le même pour les différentes sections du fil : la quantité $\frac{dV}{dl}$ a en tous les points du fil la même valeur :

$$\frac{dV}{dl} = -\frac{I}{\sigma s},$$

et la variation totale de la fonction potentiel d'une extrémité à l'autre du fil est :

$$V_A - V_B = -\int_0^l \frac{dV}{dl}\, dl = \frac{1}{\sigma}\, \frac{l}{s}\, I.$$

L'hypothèse fondamentale prise comme énoncé général de la loi d'Ohm nous donne, entre le courant qui parcourt un conducteur linéaire et la différence de potentiel entre ses extrémités, la relation :

$$V_A - V_B = RI, \qquad \text{avec} \qquad R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{s}.$$

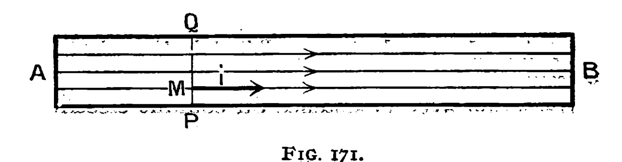


FIG. 171.

Elle conduit bien à la loi particulière énoncée au paragraphe 136, et à la valeur de la résistance donnée au paragraphe 137. On voit de plus que le coefficient σ introduit dans l'énoncé général n'est autre que la **conductivité** σ définie au paragraphe 137 comme l'inverse de la résistivité ρ.

Il faut naturellement, dans l'application des équations, exprimer toutes les grandeurs dans un même système d'unités. On choisira généralement l'un des deux systèmes C. G. S., électrostatique ou électromagnétique, en exprimant les longueurs en centimètres.

On fait quelquefois les calculs en exprimant le courant $\vec{i}$ en ampères par centimètre carré et la résistivité ρ en ohms-cm. : la relation $\vec{E} = \rho\vec{i}$ donne alors le champ électrique en volts par centimètre. Ces unités sont commodes au point de vue pratique, et on se représente peut-être mieux la valeur des grandeurs ainsi mesurées ; mais il convient de ne jamais perdre de vue qu'elles sont formées par des combinaisons d'unités appartenant à des systèmes différents (système pratique et système C. G. S.).

145. Calcul de la résistance d'un conducteur quelconque. — Considérons maintenant un milieu conducteur, homogène et isotrope, que nous sup-

poserons indéfini, et supposons que deux surfaces S_1 et S_2 prises dans ce milieu soient maintenues par une source d'électricité à des potentiels constants V_1 et V_2 ; il va passer dans le milieu un courant allant de l'une à l'autre de ces surfaces, qui sont dites les **électrodes** d'entrée et de sortie du courant. Les lignes de courant vont de l'une à l'autre des électrodes, et elles sont normales aux surfaces équipotentielles (*fig.* 172).

La détermination de la distribution des courants dans le milieu conducteur se ramène à la détermination de la fonction potentiel V. Comme en tout point du milieu conducteur, on a $\Delta V = -\operatorname{div} \vec{E} = 0$, le problème revient à déterminer une fonction V qui satisfasse, en tous les points de l'espace qui environne les électrodes, à la condition $\Delta V = 0$, et sur les électrodes, à la condition $V = C^{te}$. C'est le même problème que celui qui a été étudié en électrostatique pour l'équilibre des conducteurs (chap. IV et V) ; les surfaces équipotentielles sont les mêmes dans les deux cas, les lignes de courant du problème actuel sont les lignes de force du problème électrostatique. La solution trouvée pour le milieu indéfini est évidemment encore valable pour un milieu fini, limité par une surface formée tout entière par des lignes de courant du système indéfini. On sait résoudre le problème dans un certain nombre de cas, et les résultats trouvés ont toujours été en accord avec ceux qu'on obtient expérimentalement en mesurant les potentiels en différents points du conducteur.

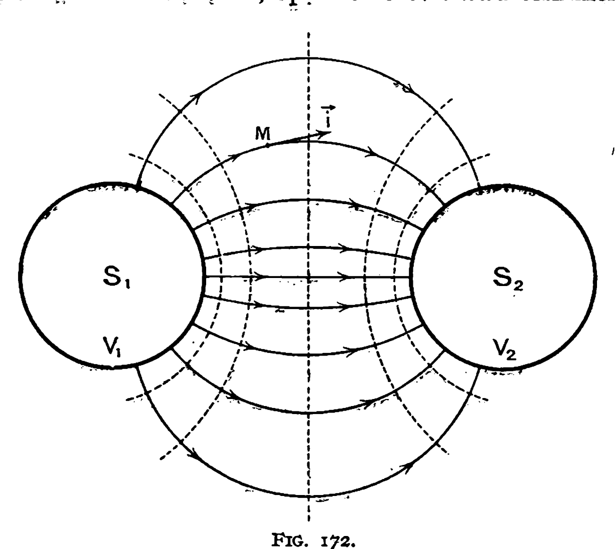


Fig. 172.

Il est facile de montrer, par des raisonnements analogues à ceux que nous avons fait en électrostatique, que le champ électrique $\vec{E}$ en chaque point du milieu, et par conséquent le vecteur courant $\vec{i}$, sont des fonctions linéaires des potentiels V_1 et V_2 ; il en est de même du flux I du vecteur $\vec{i}$ à travers la surface S_1, c'est-à-dire du courant **total** qui traverse le milieu entre les électrodes S_1 et S_2 ; comme I s'annule avec la différence de potentiel $V_1 - V_2$, il lui est nécessairement proportionnel. *Le courant qui traverse un milieu conducteur homogène est proportionnel à la différence de potentiel établie entre les électrodes ; le rapport constant de la différence de potentiel au courant est la résistance du milieu entre les électrodes.*

On peut calculer cette résistance si l'on a pu déterminer la forme des lignes de courant, et si l'on sait décomposer le milieu conducteur en éléments de

volume limités par les tubes de courant (ou de force). Considérons un tube de courant élémentaire T (*fig.* 173), parcouru par un courant d'intensité dI; le vecteur courant $\vec{i}$ en un point M où la section du tube de courant est dS a pour grandeur $i = \frac{dI}{dS}$; le champ électrique $\vec{E}$ en ce point est tangent au tube de courant, et a pour grandeur $E = \frac{i}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\frac{dI}{dS}$; la différence de potentiel entre deux points MM′ voisins sur une même ligne de courant est $V_M - V_{M'} = \frac{dI}{\sigma}\frac{ds}{dS}$. En intégrant cette expression tout le long de la ligne de courant, on obtient :

$$V_1 - V_2 = r\,dI, \qquad \text{avec} \qquad r = \int_A^B \frac{1}{\sigma}\frac{ds}{dS}$$

L'intensité totale I du courant qui traverse le milieu conducteur s'obtient en faisant la somme des intensités dI qui parcourent les différents tubes de force :

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{R} = \iint \frac{1}{r}.$$

Ce calcul est celui de la résistance d'un faisceau de conducteurs : la formule qui donne r est la formule de la résistance d'un conducteur à section variable

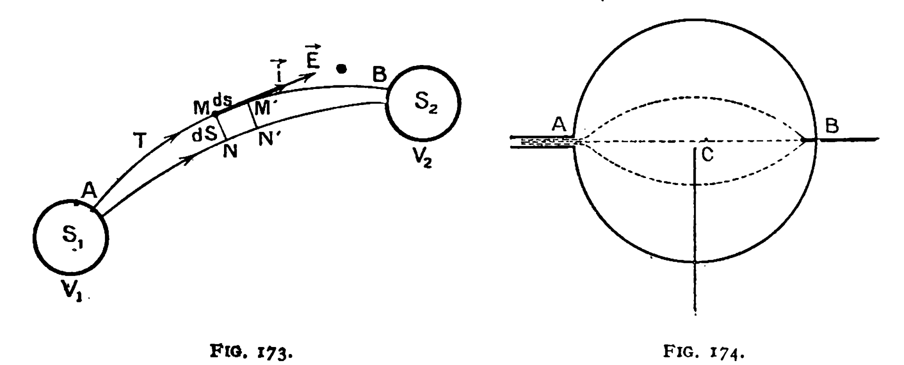


FIG. 173. FIG. 174.

(§ 137) et celle qui donne R est l'expression du théorème des conductances (§ 141). Il peut être fait avec n'importe quel système d'unités; on peut même exprimer la résistivité $\rho = \frac{1}{\sigma}$ en ohms-cm., et les longueurs et les surfaces en centimètres et en centimètres carrés : on obtient alors la résistance R en ohms.

Nous citerons comme application l'exemple de la réalisation de l'ohm international : la colonne de mercure, de 1 millimètre carré de section, se termine en A dans un ballon, d'environ 4 centimètres de diamètre, rempli de mercure (*fig.* 174); le courant y est amené par une électrode B opposée à A, et l'extré-

mité de la résistance-étalon, c'est-à-dire le point dont on mesure le potentiel, est en C, au centre du ballon. La théorie permet de calculer la résistance du mercure qui remplit le ballon entre la sortie A du tube et le plan de l'électrode C ; cette résistance n'est pas négligeable, elle est équivalente à celle d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et d'environ $0^{mm},45$ de longueur. La correction à apporter à la longueur ($106^{cm},3$) de l'ohm pour tenir compte des deux extrémités est donc d'environ $0^{mm},9$, et atteint presque le millième de cette longueur.

CHAPITRE XV

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

I. — *LOI DE JOULE*

146. Loi de Joule. — Reprenons l'expérience qui nous a servi à définir le courant électrique : deux conducteurs C_1 et C_2 (*fig.* 175), portés respectivement à des potentiels V_1 et V_2, sont reliés par un fil métallique AB. Entre l'instant t et l'instant $t + dt$, il s'écoule dans le fil une quantité d'électricité $dq = idt$, qui passe du conducteur au potentiel V_1 le plus élevé sur le conducteur au potentiel le moins élevé V_2. Nous savons, par la définition même du potentiel, que, lorsqu'on transporte une charge électrique dq du potentiel V_1 au potentiel V_2, on peut recueillir un travail $dW = (V_1 - V_2)\, dq$ (§ 21) ; ce travail mesure la diminution de l'énergie électrique du système des conducteurs C_1 et C_2 (§ 60).

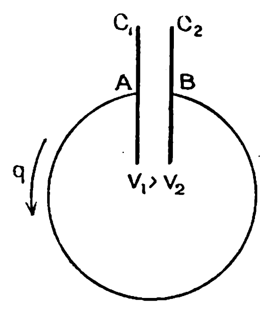


FIG. 175.

Considérons de même, entre deux points A et B (*fig.* 176), un conducteur de résistance r parcouru par un courant constant d'intensité i : pendant le temps t, ce courant transporte, du point A où le potentiel a la valeur constante V_A au point B où sa valeur est V_B, une quantité d'électricité $q = it$. Ce transport doit nous fournir une énergie :

$$W = (V_A - V_B)\,q = (V_A - V_B)\,it.$$

L'expérience montre que cette énergie apparaît dans le conducteur AB sous forme de chaleur : nous avons déjà indiqué l'existence de cet échauffement du fil parmi les propriétés générales du courant électrique (§ 130). La quantité de chaleur dégagée Q est équivalente au travail W, et on a, en désignant par J l'équivalent mécanique de la calorie :

FIG. 176.

$$JQ = W = (V_A - V_B)\,it,$$

Si l'on remplace $V_A - V_B$ par sa valeur donnée par la loi d'Ohm :

$$V_A - V_B = ri,$$

on obtient :

$$JQ = W = ri^2t.$$

Le phénomène de dégagement de chaleur dans un conducteur est souvent appelé **effet Joule,** et la loi que nous venons d'obtenir est la *loi de Joule :*

La quantité de chaleur dégagée par le passage d'un courant continu dans un conducteur est proportionnelle à la résistance du conducteur, au carré de l'intensité du courant, et au temps pendant lequel le courant a passé.

Cette loi a été établie expérimentalement par Joule en 1841 ; nous ne relaterons pas ses expériences, pas plus que nous n'avons indiqué de vérification expérimentale des lois fondamentales dont nous l'avons déduite ; nous considérerons que la loi est vérifiée par l'ensemble des applications qui en ont été faites.

Si la résistance r est mesurée en ohms, l'intensité i en ampères, et le temps t en secondes, la relation $V_A - V_B = ri$ donne la différence de potentiel en volts, et la relation $q = it$ donne la quantité d'électricité en coulombs. La relation $W = (V_A - V_B)\, q$ donne alors l'énergie en joules (§ 23), et il en est de même de la relation $W = ri^2t$. On obtiendra la valeur de Q en petites calories en prenant pour J la valeur 4,186 qui exprime en joules l'équivalent mécanique de la petite calorie.

On peut encore exprimer autrement la loi de Joule, en calculant le travail transformé en chaleur par unité de temps, autrement dit la puissance transformée en chaleur dans le conducteur ; on a :

$$\mathcal{P} = \frac{W}{t} = ri^2.$$

Si le travail W est exprimé en joules, la puissance $\mathcal{P}$ est exprimée en watts : *la puissance dépensée sous forme de chaleur par le passage du courant dans un conducteur est exprimée en watts par le produit de la résistance du conducteur, exprimée en ohms, par le carré de l'intensité du courant, exprimée en ampères.*

147. Applications. — La loi de Joule est constamment appliquée en Électrotechnique pour calculer la chaleur dégagée par le passage du courant dans les conducteurs, enroulements des dynamos et des moteurs, ou câbles des transports d'énergie électrique. Cette chaleur dégagée représente de la puissance perdue, et c'est pour réduire cette puissance perdue, pour améliorer le rendement des machines ou des transmissions, qu'on doit prendre pour constituer les conducteurs du cuivre de faible résistivité et leur donner une section assez grande ; on est d'ailleurs limité dans l'augmentation de la section soit, pour les dynamos, par la nécessité de loger les conducteurs dans un espace restreint, soit, pour les lignes de transport d'énergie, par l'augmentation du prix d'établissement avec la section et le poids du câble.

Le dégagement de chaleur produit par le passage du courant peut avoir pour effet d'élever d'une façon appréciable la température des conducteurs : c'est cette élévation de température qui limite généralement l'intensité du courant qu'on peut faire passer dans un appareil. Elle est extrêmement variable suivant les conditions dans lesquelles s'effectue le refroidissement des conducteurs : pour une même résistance et pour un même courant, l'élévation de tem-

pérature est, par exemple, plus grande pour un fil isolé que pour un fil nu ; elle est d'autant plus faible que la ventilation du fil est mieux assurée. Voici les valeurs de la densité de courant, en ampères par millimètre carré, qu'on admet qu'il est imprudent de dépasser dans la pratique industrielle, pour des fils de cuivre :

Enroulements de dynamos : induit	4
— — inducteur	2
Canalisations électriques : fil nu à l'air libre (sections inférieures à 5 mm²)	6
— — fil sous moulure	4

Les bobines des boîtes de résistances, qui sont noyées dans la paraffine, sont particulièrement mal refroidies : on peut admettre que la puissance dépensée en chaleur dans chaque bobine ne doit pas dépasser 1 /10 de watt. Le courant maximum qu'on peut faire passer sans danger dans une bobine de 1.000 ohms est, d'après cette règle, $i = \sqrt{\frac{0,1}{1000}} = \frac{1}{100}$ d'ampère.

C'est le dégagement de chaleur dû à l'effet Joule qui est utilisé dans la plupart des appareils de chauffage électrique : bouilloires, fers à repasser, fours à résistance. Si le courant est assez fort, le fil qu'il traverse peut être porté à l'incandescence : c'est le principe de l'éclairage électrique par les lampes à incandescence. Dans d'autres cas, l'élévation de température amène la fusion du fil : on protège les installations électriques en intercalant dans chaque circuit un coupe-circuit fusible, formé d'un fil d'un métal à résistivité assez élevée, et à point de fusion assez bas, de section convenablement choisie ; ce fil fond avant que l'intensité du courant ait atteint une valeur dangereuse pour les autres appareils du circuit.

148. Mesures basées sur la loi de Joule. — Si l'on mesure la quantité de chaleur dégagée dans un conducteur parcouru par un courant, en le plaçant dans un calorimètre, la loi de Joule :

$$JQ = ri^2t,$$

permet de calculer la résistance r du conducteur, si l'on mesure l'intensité i du courant. L'équivalent mécanique J de la calorie ayant été déterminé en valeur absolue par des mesures mécaniques, la mesure de i en valeur absolue permet de déterminer r en valeur absolue.

Nous étudierons plus loin les méthodes de mesure absolue des intensités de courant, ainsi que les méthodes directes de mesure absolue des résistances. Les unes et les autres permettent d'atteindre une précision dépassant le dix-millième, que les méthodes calorimétriques sont impuissantes à fournir.

C'est pourquoi les mesures basées sur la loi de Joule ne sont pas considérées aujourd'hui comme des mesures absolues de résistances, mais comme des déterminations de J, équivalent mécanique de la calorie. C'est également parce que l'énergie électrique ri^2t peut être mesurée en valeur absolue avec une précision supérieure à celle des mesures calorimétriques que le Comité International de Thermométrie a proposé en 1939 de définir la calorie comme la quantité de chaleur équivalente à 1 /860 de watt-heure (cf. *Cours de Thermodynamique*, § 62).

La mesure en valeur relative des résistances et des intensités de courant est encore plus précise que leur mesure absolue : la quantité de chaleur apportée dans un calorimètre, où est plongée une résistance, par un courant électrique qui la traverse peut être calculée en valeur relative avec une très haute précision. Aussi toutes les mesures calorimétriques de précision se font-elles à l'heure actuelle par des méthodes électriques.

149. Ampèremètres thermiques. —La mesure de la quantité de chaleur dégagée dans une résistance connue permet de calculer l'intensité du courant qui la traverse. Les méthodes calorimétriques sont d'un emploi trop compliqué pour être pratique, mais on peut estimer la quantité de chaleur dégagée par l'élévation de température du conducteur, mesurée par la dilatation qu'elle produit. Ce principe est celui des **ampèremètres thermiques**. Le courant échauffe un fil fin AB fixé à une de ses extrémités A ; les déplacements de l'autre extrémité sont amplifiés par un levier BOC, mobile autour du point O. L'amplification peut être considérable, si la longueur OB est petite et l'angle en B voisin de π : à une petite variation de la longueur AB correspond alors une grande rotation du levier BC. Le fil de soie CD, qui est maintenu tendu par le ressort R, passe sur une poulie P, et ses déplacements entraînent le déplacement d'une aiguille I sur un cadran divisé. Le déplacement est d'autant plus grand que le courant qui traverse le fil AB est plus intense, et y dégage plus de chaleur ; l'ampèremètre est gradué empiriquement, par comparaison avec un autre appareil.

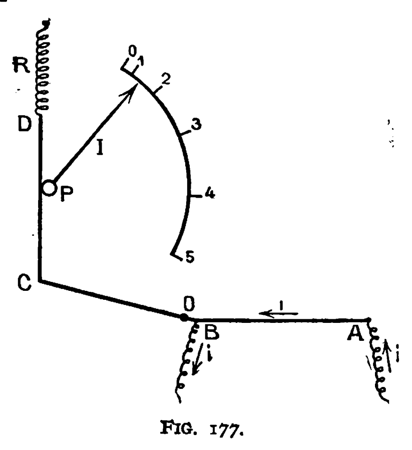


FIG. 177.

Ces appareils présentent l'inconvénient que les résidus de dilatation du fil métallique AB produisent un déplacement du zéro. On les réduit autant que possible en choisissant convenablement l'alliage dont est fait ce fil (généralement un alliage platine-argent) ; il est néanmoins nécessaire de munir la monture du fil d'une vis de réglage, permettant de ramener l'aiguille au zéro en cas d'allongement permanent.

Les appareils usuels de ce type donnent une déviation correspondant à toute l'échelle lorsque la puissance dépensée dans le fil est de l'ordre de 0,5 watt, correspondant par exemple, suivant la grosseur du fil, à 2,5 ampères sous 0,2 volts, ou à 0,2 ampères sous 2,5 volts. Ils sont assez fragiles, en ce sens que le passage d'un courant ne dépassant que relativement peu celui qui correspond à la déviation totale produit la rupture par fusion du fil.

On tend maintenant à employer comme appareils thermiques des appareils dans lesquels le courant à mesurer passe dans une résistance fixe, et dans lesquels l'échauffement de cette résistance échauffe la soudure d'un couple thermoélectrique (§ 176) placé à son contact ; une disposition convenable de la soudure froide par rapport au boîtier assure son maintien à la température

ambiante, et le courant thermoélectrique est mesuré par un instrument à cadre mobile (§ 256). Ces appareils ont une consommation plus faible et une plus grande faculté de surcharge que les appareils à dilatation d'un fil; la consommation devient particulièrement faible si l'élément chauffant et la soudure correspondante sont placés dans une ampoule où l'on a fait le vide, de façon à éviter leur refroidissement par convection et à obtenir pour une même énergie dépensée une élévation de température plus grande : on arrive ainsi à construire des instruments thermiques capables de mesurer des courants de 2 à 3 milliampères.

Dans les ampèremètres thermiques, comme dans tous les appareils où le phénomène à observer dépend du carré de la grandeur à mesurer, les graduations voisines du zéro sont très serrées, et ils ne peuvent pratiquement servir que pour des intensités du courant supérieures au tiers de l'intensité maximum qu'ils peuvent mesurer. Ils ne sont guère employés pour les mesures de courants continus; mais nous verrons que ce sont les appareils de mesure les plus importants pour les courants alternatifs. Ils peuvent naturellement être munis d'un shunt (§ 141) pour servir à la mesure d'une intensité élevée, ou d'une résistance additionnelle (§ 136) pour être employés comme voltmètres.

II. — *UNITÉS DE RÉSISTANCE ET DE DIFFÉRENCE DE POTENTIEL*

150. Relations de définition des unités dérivées électriques; unités électrostatiques C. G. S. — Rappelons d'abord l'ensemble des formules qui permettent, une fois fixées les valeurs de l'unité de temps, de l'unité de travail et de l'unité de quantité d'électricité, de définir les autres unités électriques. L'unité de différence de potentiel est définie par la formule (§ 22) :

$$W = q\,(V_A - V_B).$$

L'unité d'intensité de courant a été définie (§ 129) à l'aide de la formule :

$$q = it,$$

et enfin l'unité de résistance a été définie à l'aide de la loi d'Ohm (§ 138) :

$$V_A - V_B = ri.$$

De ces définitions résulte l'expression de la loi de Joule :

$$W = ri^2t, \qquad \mathcal{P} = ri^2 = (V_A - V_B)\,i.$$

Rappelons également la formule de définition de la capacité d'un condensateur (chap. v) :

$$q = C\,(V_A - V_B).$$

et l'expression de l'énergie d'un condensateur (chap. vi) :

$$W = \frac{1}{2} C (V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Nous savons que ces formules définissent les différentes unités électrostatiques (u. é. s.) C. G. S. lorsqu'on prend pour unité de quantité d'électricité l'unité électrostatique C. G. S., comme unité de temps la seconde et comme unité de travail l'erg. Nous ne reviendrons pas sur les définitions et les dimensions de ces unités, que nous avons déjà données (§§ 22, 46, 78, 133, 138).

151. Unités électromagnétiques C. G. S. — Les différentes unités électromagnétiques (u. é. m.) C. G. S. sont définies à partir de l'une d'entre elles, de la seconde et de l'erg par les formules du paragraphe précédent. Nous ne reproduirons pas ici les définitions des u. é. m. C. G. S. de quantité d'électricité et d'intensité de courant données au paragraphe 133, ni celles des u. é. m. C. G. S. de différence de potentiel et de résistance, que nous avons données au paragraphe 138. Quant à l'*u. é. m. C. G. S. de capacité*, il résulte immédiatement de la formule de définition $q = C(V_A - V_B)$ que c'est la capacité d'un condensateur dont la charge est égale à l'u. é. m. C. G. S., de quantité d'électricité quand la différence de potentiel entre ses armatures est égale à l'u. é. m. C. G. S. de différence de potentiel.

Répétons encore une fois que, dans le système électromagnétique C. G. S. comme dans le système électrostatique C. G. S., l'unité de temps est la seconde, l'unité de travail est l'erg; l'unité de puissance est l'erg/seconde. D'autre part, nous avons déjà vu (§ 133) que les u. é. m. C. G. S. de quantité d'électricité et d'intensité de courant valent $c = 3 . 10^{10}$ fois les u. é. s. C. G. S. correspondantes. Considérons une quantité d'électricité égale à une u. é. m., qui subit une chute de potentiel égale à une u. é. m., et produit par suite un travail d'un erg. Appliquons à cette expérience la formule $W = q(V_A - V_B)$, en exprimant les différentes grandeurs en unités électrostatiques. Nous avons $W = 1$, $q = c = 3.10^{10}$, donc $V_A - V_B = \frac{1}{c}$: l'*u. é. m. C. G. S. de différence de potentiel est* 3.10^{10} *fois plus petite que l'u. é. s. C. G. S.*

Prenons de même un conducteur pour lequel on a, en u. é. m. C. G. S., $V_A - V_B = 1$, $r = 1$, et $i = 1$; on a, en u. é. s. C. G. S. :

$$r = \frac{V_A - V_B}{i} = \frac{\frac{1}{c}}{c} = \frac{1}{c^2};$$

l'u. é. m. C. G. S. de résistance est 9.10^{20} *fois plus petite que l'u. é. s. C. G. S.*

Prenons enfin un condensateur pour lequel on a, en u. é. m. C. G. S., $V_A - V_B = 1$, $C = 1$ et $q = 1$; on a, en u. é. s. C. G. S. :

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{c}{\frac{1}{c}} = c^2;$$

l'u. é. m. C. G. S. de capacité vaut $9 . 10^{20}$ *u. é. s. C. G. S.*

Les formules de définition permettent également de calculer les dimensions

des u. é. m., à partir de celles de l'unité de quantité d'électricité et de l'unité d'intensité de courant (§ 133) :

$$Q = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}, \qquad I = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

On obtient pour l'u. é. m. de différence de potentiel :

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{L^2MT^{-2}}{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}} = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2};$$

pour l'u. é. m. de résistance :

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}}{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}} = LT^{-1},$$

et pour l'u. é. m. de capacité :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}} = L^{-1}T^2.$$

152. Unités pratiques. — Nous avons déjà dit (§ 134) que le système d'unités pratiques est défini à partir du système électromagnétique C. G. S. Les unités pratiques ont été choisies de façon à conserver les différentes formules utilisées dans les deux paragraphes précédents. A l'aide de ces formules, nous avons déduit toutes les unités de deux d'entre elles, l'unité de travail, qui était l'erg pour les deux systèmes, et l'unité de quantité d'électricité. Il nous faut de même, pour définir le système pratique, définir d'abord deux **unités principales ;** nous en déduirons toutes les autres, dites **unités secondaires,** par l'application de nos formules.

Nous choisirons ici comme unités principales, conformément à la loi du 2 avril 1919, les unités d'**intensité de courant** et de **résistance.**

Nous avons déjà (§ 134) défini l'**unité pratique d'intensité de courant,** l'**ampère,** comme égal à 1/10 de l'u. é. m. C. G. S., et nous en avons déduit, par la formule :

$$q = it,$$

la définition de **l'unité pratique de quantité d'électricité,** le **coulomb,** qui vaut 1/10 d'u. é. m. C. G. S., et 3 . 10^9 u. é. s. C. G. S.

L'**unité pratique de résistance** est l'**ohm ;** cette unité principale vaut, par définition, 10^9 u. é. m. C. G. S. ; elle vaut donc $\frac{1}{9 \,.\, 10^{11}}$ u. é. s. C. G. S.

L'**unité pratique de différence de potentiel** est le **volt.** C'est une unité secondaire, définie par la formule :

$$V_A - V_B = ri.$$

Le volt est la différence de potentiel qui existe entre les deux extrémités d'une résistance d'un ohm parcourue par un courant d'un ampère. Si on applique à cette résistance, qui vaut par définition 10^9 u. é. m. et est parcourue par un courant égal à 10^{-1} u. é. m., la loi d'Ohm, on trouve, en unités électromagnétiques, $V_A - V_B = 10^9 \,.\, 10^{-1} = 10^8$. Le volt vaut donc 10^8 u. é. m. C. G. S., et par conséquent $\frac{10^8}{3.10^{10}} = \frac{1}{300}$ u. é. s. C. G. S.

Nous avons déjà défini (§ 23), à partir du coulomb et du volt, l'unité pratique de travail, qui est le joule, par la formule :

$$W = q\,(V_A - V_B).$$

Si l'on a, en unités pratiques, $q = 1$, $V_A - V_B = 1$, on a, en u. é. m., $q = 10^{-1}$, $V_A - V_B = 10^8$, donc $W = 10^7$: le joule vaut 10^7 ergs. De même l'unité pratique de puissance, le watt, vaut 10^7 ergs/secondes.

De même, nous avons déjà donné (§ 46) la définition de l'unité pratique de capacité, le farad, à partir du coulomb et du volt, par la formule :

$$q = C\,(V_A - V_B).$$

Si l'on a, en unités pratiques, $q = 1$, $V_A - V_B = 1$, on a, en u. é. m., $q = 10^{-1}$, $V_A - V_B = 10^8$, donc $C = \frac{10^{-1}}{10^8} = 10^{-9}$. Le farad vaut 10^{-9} u. é. m. C. G. S., et par suite $9 \cdot 10^{11}$ u. é. s. C. G. S.

On vérifiera que les différentes définitions données dans ce paragraphe conduisent bien aux valeurs des unités pratiques en unités électrostatiques que nous avons adoptées, dans l'étude de l'électrostatique, comme définitions provisoires. Nous répétons encore une fois que les unités pratiques sont définies à partir des unités électromagnétiques C. G. S. La quantité c, qui définit les rapports des unités électromagnétiques aux unités électrostatiques, est une grandeur déterminée expérimentalement (chap. XXVII), avec une certaine erreur, de l'ordre du dix-millième ; il en est de même des rapports des unités pratiques aux unités électrostatiques, et les valeurs numériques de ces rapports, qui sont susceptibles de se modifier avec les progrès de la technique, ne sauraient entrer dans des définitions correctes.

Les définitions que nous avons données des unités secondaires, à partir des unités principales, sont les définitions légales (décret du 26 juillet 1919). Mais nous savons déjà que les définitions légales des unités principales, données par la loi du 2 avril 1919 (§§ 134 et 138), ne sont pas celles que nous venons de donner. Conformément aux recommandations de la Conférence de Londres de 1908, les unités principales légales sont définies par leurs représentations; mais nous avons déjà dit aussi que la 8e Conférence générale des Poids et Mesures, tenue à Paris en 1933, a décidé de revenir, à partir de 1935, aux définitions en fonction des u. é. m. C. G. S. Les mesures absolues qui avaient permis de choisir les représentations adoptées en 1908 étaient d'ailleurs déjà assez précises pour que les différences entre les unités de Londres et les multiples décimaux des unités C. G. S. ne dépassent jamais quelques dix-millièmes. Dans la suite de ce Cours, nous ne ferons en général pas de distinction entre les deux systèmes d'unités; dans les cas exceptionnels où cette distinction deviendrait nécessaire, nous appellerons ohm, ampère, etc., les multiples ou sous-multiples décimaux exacts des u. é. m. C. G. S., et nous appellerons ohm international, ampère international, volt international, etc., les unités principales définies par la Conférence de Londres et la loi du 2 avril 1919, et les unités secondaires qui en dérivent.

Les formules de définition, et les formules relatives à l'énergie et à la puis-

sance qui en dérivent immédiatement et que nous avons rappelées au paragraphe 150, constituent un système de relations applicables, sans coefficients numériques, aussi bien dans le système pratique que dans les systèmes électrostatiques et électromagnétiques (§ 133). Parmi les autres formules que nous avons données, la plupart contiennent les coefficients ε_0 ou μ_0, et ne peuvent être appliquées sans coefficient numérique que dans un seul système, électrostatique ($\varepsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1/c^2$) ou électromagnétique ($\mu_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 1/c^2$). La plupart aussi contiennent les expressions de forces et de longueurs, et ne peuvent être appliquées dans le système pratique qu'après avoir défini des unités pratiques de force et de longueur. Nous avons déjà dit (§§ 23, 79, 134) que le système pratique ne peut être rattaché ni au système C. G. S., ni au système M. T. S., mais qu'on peut le rattacher au système M. K. S., dans lequel les unités de longueur, de masse et de force sont le mètre, le kilogramme et le millisthène; le système ainsi constitué n'est pas un système électromagnétique, car le coefficient μ_0 y a la valeur $\mu_0 = 10^{-7}$, tandis que le coefficient ε_0 y est défini par la relation $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$ et est par suite, d'après les déterminations expérimentales de la quantité $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec, égal à $1/9 \cdot 10^9$.

III. — *FORCE ÉLECTROMOTRICE*

153. Force électromotrice d'un générateur. — Considérons une source électrique S et un conducteur PQ placé entre ses pôles (*fig.* 178). Nous avons déjà montré (§ 129) que l'ensemble de la source et du conducteur constituait un **circuit fermé**, parcouru tout entier par le même courant d'intensité i. La source constitue un tronçon du circuit, qui possède, comme tout autre tronçon, une résistance ρ, qu'on appelle généralement sa **résistance intérieure.** La résistance r du conducteur PQ s'appelle alors, par opposition, la **résistance extérieure** du circuit.

Fig. 178.

Nous admettrons que la loi de Joule est encore valable pour la portion du circuit constituée par la source, et que la puissance $\mathcal{P}_2$ dissipée sous forme de chaleur à l'intérieur de la source est donnée par la formule : $\mathcal{P}_2 = \rho i^2$.

La puissance qui apparaît sous forme de chaleur dans la résistance extérieure est $\mathcal{P}_1 = ri^2$, et la puissance totale dissipée sous forme de chaleur dans le circuit est :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = ri^2 + \rho i^2.$$

L'énergie qui apparaît ainsi dans le circuit provient de la source : *une source d'électricité est un générateur d'énergie électrique*. Elle fournit de l'énergie électrique, qui se transforme en chaleur dans l'ensemble du circuit ; la quantité $\mathcal{P}$ est la puissance électrique du générateur. Nous la mettrons sous la forme $\mathcal{P} = ei$, c'est-à-dire que nous introduirons dans les formules une quantité :

$$e = \frac{\mathcal{P}}{i},$$

que nous appellerons la **force électromotrice** du générateur (f. é. m). On a alors :

$$e = (r + \rho)\, i,$$

ou, en désignant par R la résistance totale $r + \rho$ du circuit :

$$e = Ri.$$

En résumé, *on appelle force électromotrice d'un générateur le rapport de la puissance électrique qu'il fournit à l'intensité du courant qui le traverse.*

L'intensité du courant qui parcourt un circuit fermé comprenant un générateur et des résistances est égale au quotient de la force électromotrice du générateur qui produit ce courant par la résistance totale du circuit.

L'analogie de cette loi avec la loi d'Ohm est évidente : nous la désignerons sous le nom de **loi d'Ohm appliquée à un circuit fermé.** Cette analogie montre de plus que la force électromotrice e est une grandeur de même nature qu'une différence de potentiel. Cette identité de nature résulte d'ailleurs immédiatement de l'analogie des définitions des deux grandeurs : la différence de potentiel est le rapport du travail fourni à la quantité d'électricité déplacée, la f. é m. est le rapport de la puissance fournie à l'intensité du courant, c'est-à-dire de l'énergie fournie par seconde à la quantité d'électricité qui traverse, par seconde, le générateur.

L'intérêt de la définition de la f. é. m. vient de ce que, dans la plupart des cas usuels, la f. é. m d'un générateur est, tout au moins en première approximation, indépendante du courant qui le traverse : c'est une grandeur caractéristique de ce générateur, qui reste la même quelles que soient les conditions de son fonctionnement. Il en est ainsi dans le cas des piles, des accumulateurs, de certaines dynamos ; la loi d'Ohm fournit un moyen immédiat de calculer le courant dans le circuit lorsqu'on connaît cette grandeur caractéristique, ainsi que la résistance du circuit.

154. Différence de potentiel aux bornes d'un générateur. — Si l'on veut connaître la différence de potentiel $V_P - V_Q$ qui existe entre les bornes du générateur, il suffit d'appliquer la loi d'Ohm sous sa première forme au conducteur extérieur PQ ; on a, le courant dans ce conducteur allant de P à Q :

$$V_P - V_Q = ri,$$

d'où :

$$V_P - V_Q = e - \rho i.$$

Si la résistance intérieure du générateur est négligeable par rapport à la résistance extérieure, la quantité ρi est négligeable devant ri, c'est-à-dire devant $V_P - V_Q$, et la différence de potentiel aux bornes est égale à la force électromotrice du générateur. Il en est ainsi pour les accumulateurs dans toutes les conditions d'emploi.

Pour la plupart des générateurs, il n'en est ainsi que lorsque la résistance extérieure devient extrêmement grande, et que l'intensité i du courant devient très petite. Si la résistance extérieure devient infinie, c'est-à-dire si le circuit est ouvert, l'intensité i devient nulle, et l'on a :

$$V_P - V_Q = e.$$

La différence de potentiel qui existe entre les bornes d'un générateur en circuit ouvert est égale à sa force électromotrice.

Lorsque le générateur fournit un courant, la différence de potentiel entre ses bornes est inférieure à sa force électromotrice : elle en diffère d'une quantité, égale au produit de la résistance du générateur par l'intensité du courant qui le traverse, qu'on appelle souvent la *chute de potentiel ohmique* à l'intérieur du générateur.

Ces deux lois s'appliquent quelle que soit la façon dont la f. é. m. du générateur varie avec l'intensité du courant qui le traverse ; mais leur application est particulièrement commode lorsqu'elle en est indépendante. La mesure de la différence de potentiel aux bornes du générateur en circuit ouvert donne alors la valeur de sa f. é. m., valeur qu'on peut utiliser pour l'application de la loi d'Ohm ou pour le calcul de la différence de potentiel aux bornes en circuit fermé.

La relation :

$$V_P - V_Q = e - \rho i,$$

est indépendante de la résistance du circuit extérieur, et exprime la différence de potentiel entre les deux extrémités P et Q de la portion PSQ du circuit, en fonction des quantités e et ρ qui la caractérisent, et de l'intensité i du courant qui la traverse dans le sens QP. On peut considérer qu'elle remplace, pour cette partie du circuit, l'expression habituelle de la loi d'Ohm ; mais il faut remarquer que nous avons compté la différence de potentiel $V_P - V_Q$ dans le sens opposé à celui du courant dans le générateur; pour retrouver une expression analogue à celle de la loi d'Ohm, il faut calculer la différence de potentiel $V_Q - V_P$:

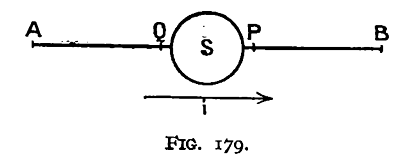


FIG. 179.

$$V_Q - V_P = \rho i - e.$$

Si l'on considère une portion de circuit AB, qui contient un générateur S de f. é. m. e, dont la résistance totale (résistance de S + résistances des conducteurs AQ et PB) est r, et qui est parcourue par un courant d'intensité i, allant de A vers B (*fig.* 179), on a de même :

$$V_A - V_B = ri - e.$$

Cette relation exprime **la loi d'Ohm généralisée à une portion de circuit contenant un générateur** ; on peut la considérer comme une relation algébrique, en comptant positivement l'intensité du courant quand il parcourt cette portion de circuit de A vers B, et la f. é. m. quand elle tend à produire un courant positif.

155. Force électromotrice et différence de potentiel de contact. — La notion de f. é. m., telle que nous l'avons définie dans les paragraphes précédents, s'applique à tous les générateurs, quelle que soit leur nature. On comprendra mieux sa signification en examinant le cas des piles électriques. La pile de Volta, par exemple, peut être représentée par le schéma de la figure 180 ;

elle se compose d'un conducteur en cuivre PM et d'un conducteur en zinc NT séparés par une colonne liquide conductrice MN, constituée par de l'eau acidulée. Les deux pôles de la pile sont l'extrémité P du conducteur PM et l'extrémité Q d'un second conducteur en cuivre TQ soudé au zinc. Si l'on réunit les deux pôles PQ par un fil de cuivre, un courant passe dans le circuit ainsi formé ; il va, à l'extérieur, du pôle positif P au pôle négatif Q.

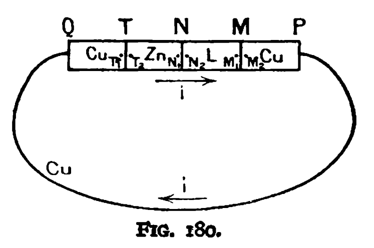


FIG. 180.

Nous avons déjà indiqué qu'à la surface de séparation de deux conducteurs de nature différente, il existe une différence de potentiel de contact (§ 80). Entre deux points M_1M_2, très voisins de la surface de séparation du cuivre et du liquide, par exemple, il existe une certaine différence de potentiel $V_{M_2} - V_{M_1}$, que nous désignerons par la notation Cu/L. Soit i l'intensité du courant qui parcourt le circuit ; étudions les variations du potentiel tout le long du circuit, en appliquant la loi d'Ohm à chaque conducteur homogène, et en tenant compte des différences de potentiel de contact. On a

$$\begin{aligned} V_Q - V_{T_1} &= \rho_1 i \\ V_{T_2} - V_{N_1} &= \rho_2 i \\ V_{N_2} - V_{M_1} &= \rho_3 i \\ V_{M_2} - V_P &= \rho_4 i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V_{T_2} - V_{T_1} &= Zn/Cu \\ V_{N_2} - V_{N_1} &= L/Zn \\ V_{M_2} - V_{M_1} &= Cu/L \end{aligned} \qquad V_P - V_Q = ri.$$

Additionnons toutes ces équations membre à membre, après avoir changé le signe de celles qui figurent dans la seconde colonne. Posons :

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4, \qquad e = Cu/L + L/Zn + Zn/Cu.$$

On obtient :

$$\rho i + ri - e = 0,$$

équation qui est identique à celle du paragraphe 153 : nous pouvons déduire, de l'existence de la différence de potentiel de contact, toutes les propriétés qui ont été établies dans les paragraphes précédents. Nous voyons de plus que, conformément à la définition du paragraphe 137, *la résistance* ρ *de la pile est la somme des résistances des conducteurs en série qu'elle contient*, et que *sa f.é.m. est la somme des différences de potentiel au contact entre ces conducteurs.*

On peut donner une représentation graphique des variations de potentiel le long du circuit (*fig.* 181) : portons en abscisses les distances des différents points, comptées, à partir du pôle négatif Q de la pile, dans le sens du courant, et en ordonnées leurs potentiels. Dans un même conducteur tel que QT, le potentiel décroît régulièrement suivant la loi d'Ohm ; si le conducteur a une section constante, la courbe correspondante est une droite inclinée AT_1, dont la projection aA sur l'axe des V est la chute de potentiel ohmique ρi dans le conducteur ; quand on passe d'un conducteur à l'autre, la courbe présente une discontinuité, telle que M_1M_2, qui est égale à la différence de potentiel de contact correspondante. Quand on a parcouru tout le circuit, on revient à la

valeur initiale du potentiel, et le graphique se termine en un point C, qui a même ordonnée que le point de départ A. Il est évident que la somme *e* des

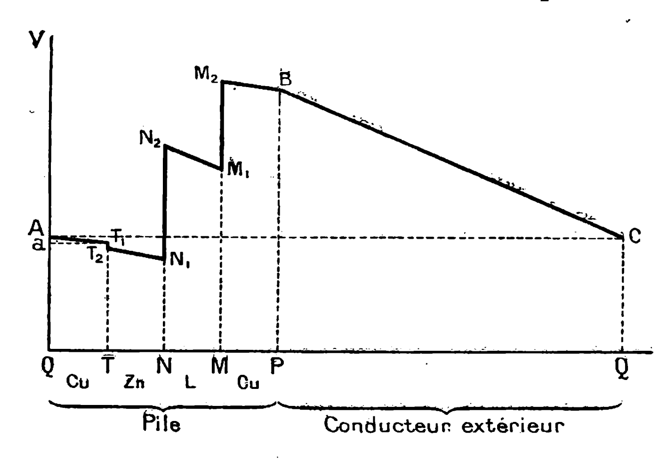


FIG. 181.

différences de potentiel de contact — droites verticales — a même valeur que la somme des chutes de potentiel ohmiques — projection sur l'axe des V des droites inclinées —, et le graphique donne immédiatement l'expression de la loi d'Ohm en circuit fermé : $e = Ri$. De même la différence des ordonnées des points A et B donne immédiatement la valeur de la différence de potentiel entre les bornes de la pile $V_P - V_Q = e - \rho i$.

Supposons maintenant qu'on supprime le conducteur extérieur. La pile n'est plus parcourue par aucun courant, chacun des conducteurs qui la composent est en équilibre électrique, et tous ses points sont au même potentiel. Les courbes inclinées deviennent des droites horizontales (*fig.* 182), et le graphique montre immédiatement que la différence de potentiel aux bornes, représentée par la longueur DB, est égale à la f. é. m. représentée par la somme des segments T_1T_2, N_1N_2 et M_1M_2.

FIG. 182.

156. Mesure des forces électromotrices. — La force électromotrice d'un générateur est égale à la différence de potentiel qui existe entre ses bornes lorsqu'il n'est parcouru par aucun courant : il suffira de mesurer cette différence de potentiel pour avoir la force électromotrice du générateur. En pratique, on effectue généralement cette mesure en plaçant un voltmètre entre les bornes du générateur ; il est alors parcouru par un courant, et son indication ne mesure la f. é. m. qu'à condition que la résistance intérieure du générateur soit négligeable par rapport à celle du voltmètre (§ 154). Si la résistance intérieure du générateur est

trop considérable, on pourra toujours avoir une mesure correcte en employant un voltmètre électrostatique (§ 72).

On peut mesurer avec précision le rapport des f. é. m. de deux piles, ou, d'une manière générale, le rapport de deux différences de potentiel, par une méthode de zéro. Pour vérifier l'égalité de deux piles P_1 et P_2, on oppose ces deux piles, en réunissant par exemple leurs deux pôles négatifs par un conducteur A_1A_2 et en réunissant leurs deux pôles positifs B_1B_2 aux bornes d'un

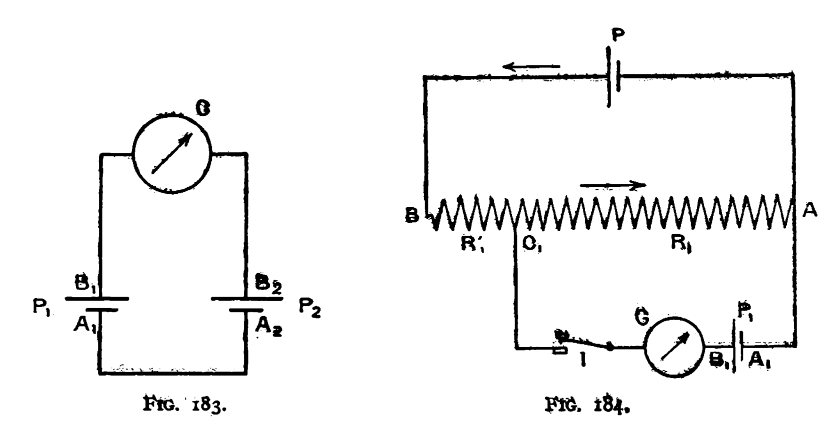


FIG. 183.

FIG. 184.

galvanomètre G. S'il indique qu'il ne passe aucun courant dans le circuit, les potentiels V_{A_1} et V_{A_2} d'une part, V_{B_1} et V_{B_2} d'autre part sont égaux, et il en est de même des différences de potentiel $V_{B_1} - V_{A_1}$ et $V_{B_2} - V_{A_2}$, qui sont égales aux f. é. m. e_1 et e_2 des deux piles.

On emploie la méthode d'opposition à la comparaison des f. é. m. de deux piles quelconques en utilisant un potentiomètre. Le courant d'une pile P traverse une résistance AB (*fig.* 184), et on oppose la pile P_1 à la différence de potentiel qui existe entre deux points A et C de cette résistance : un galvanomètre G permet de constater que, pour une certaine position C_1 du point C, il ne passe aucun courant dans la partie du circuit qui contient la pile P_1, c'est-à-dire que sa f. é. m. e est égale à la différence de potentiel $V_{C_1} - V_A$. L'intensité du courant dans les deux parties AC_1 et C_1B de la résistance AB a alors la même valeur ; si nous désignons par R_1 et R'_1 leurs résistances, par R la résistance totale $R_1 + R'_1$, on a :

$$e_1 = \frac{R_1}{R}(V_B - V_A).$$

La dérivation AP_1C_1 n'étant parcourue par aucun courant, son existence ne modifie en rien le régime établi dans le circuit PBA, et la différence de potentiel $V_B - V_A$ ne dépend que de la pile P et de la résistance AB.

Si l'on remplace la pile P_1 par une pile P_2, on obtiendra l'équilibre du galvanomètre pour une autre position C_2 du point C, correspondant à une valeur R_2 de la résistance AC_2 ; on aura :

$$e_2 = \frac{R_2}{R}(V_B - V_A) \qquad \text{et} \qquad \frac{e_2}{e_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Dans le cas particulier où la résistance intérieure de la pile P est négligeable devant R (cas d'un accumulateur), la différence de potentiel $V_B - V_A$ est égale à la f. é. m. e de la pile P, et la mesure donne directement le rapport des f. é. m. des piles P_1 et P :

$$\frac{e_1}{e} = \frac{R_1}{R}.$$

Dans la pratique, on constitue les résistances R_1 et R'_1 par deux boîtes de résistances identiques ; on enlève d'abord toutes les chevilles de l'une des boîtes, et on maintient constante la somme $R_1 + R'_1$, en ayant soin, chaque fois qu'on enlève une cheville de la seconde boîte, de la remettre à la place correspondante sur la première. Avec un galvanomètre sensible, la méthode peut être extrêmement précise, et on peut atteindre le 1/100.000 si les résistances et les f. é. m. sont définies avec cette précision (Cf. § 142). Il faut en particulier prendre garde que nombre de piles se polarisent, c'est-à-dire que leur f. é. m. diminue quand elles fournissent un courant (§ 172). La pile P doit être impolarisable, et il faut placer sur le circuit de la pile P_1 un interrupteur I, qu'on ne ferme que pendant le temps strictement nécessaire à la constatation du sens de l'impulsion du galvanomètre.

Des mesures relatives faites par les méthodes d'opposition, on déduira des mesures absolues, si l'une des piles étudiées est une pile étalon dont la f. é. m. est connue en valeur absolue. Le décret du 26 juillet 1919 indique comme pile étalon l'élément Weston (§ 180) et donne pour valeur de sa f. é. m. à 20° 1,0183 volt international.

IV. — *ÉNERGIE ÉLECTRIQUE*

157. Énergie fournie par un générateur. — Nous avons établi en Electrostatique que, lorsqu'une quantité d'électricité dq passe d'un conducteur au potentiel V_1 à un conducteur au potentiel V_2, on peut recueillir une énergie, mécanique ou calorifique, égale à la diminution de l'énergie électrique du système de conducteurs :

$$dW = (V_1 - V_2)\, dq.$$

De même, lorsqu'un courant d'intensité i transporte une quantité d'électricité $q = it$ du potentiel V_A au potentiel V_B, on peut recueillir, dans le tronçon de circuit compris entre les points A et B, une énergie :

$$W_{AB} = (V_A - V_B)\, q = (V_A - V_B)\, it;$$

autrement dit, la **puissance électrique** disponible entre les points A et B est :

$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{W}{t} = (V_A - V_B)\, i.$$

Suivant la nature de la portion de circuit AB, cette puissance peut y apparaître sous forme d'énergie calorifique, mécanique ou chimique : la loi de Joule exprime qu'elle est entièrement transformée en chaleur dans le conducteur qui relie les points A et B, lorsque ce conducteur n'est le siège d'aucune f. é. m. (de contact ou d'induction).

Nous avons défini la f. é. m. e d'un générateur à partir de la puissance électrique $\mathcal{P}$ qu'il fournit lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité i :

$$\mathcal{P} = ei.$$

L'énergie électrique fournie par le générateur pendant le temps t est alors :

$$W = \mathcal{P}t = eit,$$

et la loi d'Ohm généralisée exprime que cette énergie est égale à la somme de l'énergie W_{PQ} disponible à l'extérieur et de l'énergie $w = \rho i^2 t$ dissipée par effet Joule à l'intérieur :

$$W = W_{PQ} + w, \qquad eit = (V_P - V_Q)\, it + \rho i^2 t, \qquad e = V_P - V_Q + \rho i$$

L'énergie W_{PQ} disponible à l'extérieur du générateur est inférieure à l'énergie électrique totale, et le **rendement** est :

$$\frac{W_{PQ}}{W} = \frac{V_P - V_Q}{e} = 1 - \frac{\rho i}{e};$$

la fraction de l'énergie perdue par transformation en chaleur dans le générateur est :

$$\frac{w}{W} = \frac{\rho i}{e}.$$

On remarquera que cette fraction tend vers zéro, et que le rendement tend vers l'unité, quand l'intensité i du courant tend vers zéro.

Les différentes relations que nous venons d'établir ne contiennent que les caractéristiques ρ et e du générateur, et l'intensité i du courant qui le traverse ; elles sont indépendantes de la nature du circuit extérieur, des f. é. m. qu'il contient, et des transformations de l'énergie qui s'y produisent.

Lorsque nous réunissons par un conducteur les deux armatures d'un condensateur chargé, l'énergie calorifique recueillie provient de la disparition de l'énergie électrostatique qui était emmagasinée dans le condensateur. Lorsque cette énergie électrostatique a été entièrement transformée en énergie calorifique, le courant cesse. Au contraire, lorsqu'une source entretient dans un circuit un courant permanent, elle crée sans cesse dans ce circuit de l'énergie électrique, qui doit nécessairement provenir de la transformation d'une autre forme d'énergie. Nous avons déjà vu (§ 83) que, si la source est une machine électrostatique, l'énergie électrique provient de la transformation du travail mécanique dépensé pour faire tourner la machine : il en est évidemment de même si la source est une dynamo. Dans le cas où la source est une pile, le passage du courant s'y accompagne de réactions chimiques, et la source de l'énergie est évidemment l'énergie chimique de ces réactions. Nous reviendrons sur ces transformations de l'énergie dans l'étude des piles (chap. XVII) et des dynamos (chap. XXXIX).

158. Récepteurs : force contre-électromotrice. — Il peut se faire que l'énergie électrique disponible dans une partie AB d'un circuit parcouru par

un courant n'y soit pas entièrement transformée en énergie calorifique. Le circuit peut comporter un bac à électrolyse, dans lequel s'effectue une décomposition électrolytique qui fait apparaître de l'énergie chimique, ou un moteur électrique, qui fournit de l'énergie mécanique. **Un tel appareil est un récepteur d'énergie électrique.**

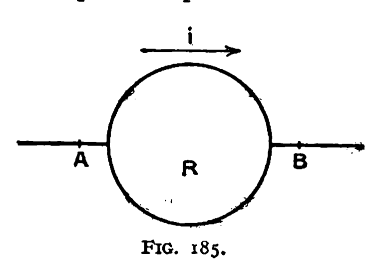


FIG. 185.

On peut développer sur les récepteurs des considérations analogues à celles que nous avons développées à propos des générateurs. L'énergie électrique disponible entre les deux bornes A et B du récepteur R (*fig.* 185), parcouru par un courant d'intensité i, dirigé de A vers B, est :

$$W_{AB} = (V_A - V_B)\, it.$$

Elle peut être décomposée en deux parties, l'une :

$$w = \rho i^2 t,$$

est transformée en chaleur par effet Joule à l'intérieur du récepteur, l'autre :

$$W' = W_{AB} - w,$$

y est transformée en une autre forme d'énergie, suivant des lois que nous étudierons à propos des divers récepteurs. Par analogie avec ce qui a été fait pour les générateurs, nous appellerons **force contre-électromotrice** e' du récepteur la quantité :

$$e' = \frac{W'}{q} \qquad (W' = e'it);$$

et nous appellerons puissance électrique transformée par le récepteur la puissance correspondante :

$$\mathcal{P}_e = \frac{W'}{t} = e'i.$$

La définition même de e' donne alors la **loi d'Ohm généralisée au cas d'un récepteur :**

$$W' = W_{AB} - w, \qquad e'it = (V_A - V_B)\, it - \rho i^2 t, \qquad e' = V_A - V_B - \rho i.$$

Le rendement du récepteur est le rapport entre la puissance électrique transformée et la puissance électrique totale absorbée :

$$\frac{W'}{W_{AB}} = \frac{e'}{V_A - V_B} = 1 - \frac{\rho i}{V_A - V_B},$$

et la fraction de l'énergie perdue est :

$$\frac{w}{W_{AB}} = \frac{\rho i}{V_A - V_B}$$

Elle tend encore vers zéro avec l'intensité i du courant.

Cette dernière remarque est importante au point de vue de l'application des principes de la Thermodynamique aux phénomènes électriques. Ces phénomènes ne sont pas réversibles, en ce sens qu'au cours des transformations de l'énergie, d'énergie mécanique en énergie électrique et inversement, une certaine fraction en est toujours transformée en chaleur par effet Joule. Mais cette fraction tend toujours vers zéro avec l'intensité du courant, et on peut toujours, théoriquement du moins, envisager des transformations qui s'effectuent assez lentement, avec des courants assez peu intenses, pour qu'on soit en droit de les considérer comme réversibles, et d'appliquer les relations que fournit, pour les transformations réversibles, le second principe de la Thermodynamique.

159. Généralisation des lois d'Ohm et de Kirchhoff. — Nous avons montré (§ 154) que, si l'on considère une portion AB de circuit, de résistance r, parcourue de A vers B par un courant d'intensité i, et contenant un générateur de f. é. m. e, on a :

$$V_A - V_B = ri - e.$$

De même, nous venons de montrer que, pour une portion de circuit AB, de résistance r, parcourue de A vers B par un courant d'intensité i, et contenant un récepteur de force contre-électromotrice e', on a :

$$V_A - V_B = ri + e'.$$

Nous réunirons ces deux expressions en une seule, en convenant de considérer les f. é. m. comme des quantités algébriques positives, lorsqu'il s'agit de f. é. m. de générateurs, négatives lorsqu'il s'agit de forces contre-électromotrices de récepteurs. Nous posons $e' = - e$, et nous avons dans tous les cas :

$$V_A - V_B = ri - e$$

Cette relation est l'expression de la loi d'Ohm généralisée. L'expression relative à un conducteur, $V_A - V_B = ri$, s'obtient en faisant $e = 0$; elle n'est valable qu'à la condition que toute l'énergie électrique fournie au conducteur y soit transformée en chaleur, et qu'il n'apparaisse ou ne disparaisse, en aucun point de l'espace, de l'énergie mécanique ou chimique, dont la production ou la disparition soit en relation avec le passage du courant dans le conducteur AB.

Si l'on applique la formule générale aux différentes portions AB, BC... MA d'un circuit fermé, contenant des générateurs et des récepteurs en nombre quelconque, et si l'on additionne toutes les relations obtenues, on obtient :

$$\Sigma ri - \Sigma e = 0, \qquad \text{ou} \qquad i = \frac{\Sigma e}{\Sigma r},$$

formule qui donne l'intensité d'un courant dans un circuit fermé quelconque, quand on connaît les résistances de ses différents tronçons et les f. é. m. des générateurs ou des récepteurs qu'il contient.

De même, si on l'applique à un circuit fermé formé par un certain nombre de générateurs et récepteurs quelconque on obtient l'expression générale de la seconde loi de Kirchhoff :

$$\Sigma ri - \Sigma e = 0.$$

Si l'on connaît les résistances et les f. é. m. placées dans chacune des branches d'un réseau de conducteurs, et si l'on veut chercher les intensités des courants qui les parcourent, on choisira un sens positif arbitraire sur chacun des conducteurs ; on écrira la première relation de Kirchhoff, $\Sigma i = 0$, pour les différents sommets du réseau, et la seconde relation, $\Sigma ri - \Sigma e = 0$, pour les différents circuits fermés qu'on peut constituer avec les conducteurs. On aura, pour déterminer les intensités inconnues, un système d'équations linéaires, qui contient exactement autant d'équations indépendantes qu'il en faut. Il admet un seul système de solutions, et fournit les valeurs algébriques des intensités. Par exemple, dans le cas du pont de Wheatstone (§ 142, *fig.* 169), les données sont les résistances r_1, r_2, r_3, r_4, des quatre branches du pont, la résistance R du galvanomètre, la résistance ρ et la f. é. m. e de la pile, et on a à déterminer les intensités dans ces six conducteurs. On aura trois équations indépendantes en écrivant la première loi de Kirchhoff pour les trois sommets A, C et D, et trois autres équations indépendantes en écrivant la seconde loi pour les trois circuits fermés ACD, CDB et PACB. On pourra ainsi calculer l'intensité i du courant qui traverse le galvanomètre pour une valeur quelconque des résistances ; en particulier, on pourra chercher quelle est la sensibilité de la mesure de la résistance r_4, en cherchant de combien il faut la modifier, à partir de la valeur correspondant à l'équilibre, pour que i passe de la valeur zéro à une valeur mesurable.

Dans ces calculs, il faut prendre garde qu'il n'est pas toujours possible de considérer les forces électromotrices comme des quantités ayant un signe donné à l'avance : lorsqu'on change le sens du courant dans une portion de circuit comprenant un générateur, ce générateur peut, suivant sa nature, continuer à fonctionner comme générateur, ou fonctionner comme récepteur (Cf. §§ 428 à 432). Lorsqu'on aura déterminé la valeur algébrique du courant dans un circuit ou une portion de circuit, il faudra vérifier que le sens obtenu pour le courant est compatible avec l'hypothèse faite sur le sens de la f. é. m.

Pour appliquer les formules, il semble qu'il serait nécessaire de connaître la nature de tous les conducteurs, et de tenir compte des différences de potentiel de contact qui existent entre deux conducteurs formés de métaux différents. Ces différences de potentiel peuvent toujours être négligées dans la pratique industrielle ; nous verrons d'ailleurs (§ 173) que, dans un circuit métallique fermé, maintenu tout entier à la même température, leur somme est nulle, de sorte qu'il n'y a pas lieu d'en tenir compte dans le calcul de Σe.

CHAPITRE XVI

ÉLECTROLYSE

I. — *LOIS DE L'ÉLECTROLYSE*

160. Lois qualitatives. — Si l'on plonge dans certains liquides deux électrodes métalliques reliées aux deux pôles d'une source d'électricité (*fig.* 186), on constate qu'il s'établit un courant électrique à travers le liquide, et qu'en même temps le liquide subit une décomposition chimique. C'est ce phénomène qu'on désigne sous le nom d'**électrolyse.** Le liquide est un **électrolyte;** l'électrode par laquelle le courant arrive dans le liquide est l'**anode,** l'électrode par laquelle il sort est la **cathode.**

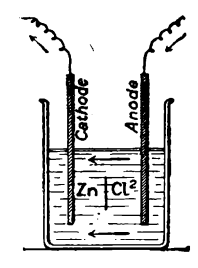


FIG. 186.

Les électrolytes sont les *acides,* les *bases* et les *sels,* dissous dans l'eau, ou dans certains autres liquides tels que l'acétone, ou bien encore amenés à l'état liquide par fusion. *Les produits de la décomposition apparaissent uniquement à la surface des électrodes,* et jamais dans la masse même du liquide. La molécule de l'électrolyte se décompose en deux parties: l'une, toujours constituée par le métal — ou l'hydrogène dans le cas d'un acide — apparaît à la cathode ; l'autre, constituée par le radical qui forme le reste de la molécule — le groupement OH dans le cas d'une base — apparaît à l'anode. C'est ainsi qu'on prépare le sodium en électrolysant le chlorure de sodium fondu NaCl entre une cathode en fer, sur laquelle se dépose le sodium Na, et une anode en charbon, à la surface de laquelle se dégage le chlore Cl.

Il arrive très souvent que les produits de la décomposition électrolytique peuvent réagir, soit sur les électrodes, soit sur le dissolvant. Ces réactions, dites **réactions secondaires,** font qu'on obtient des produits différents de ceux qu'indique la règle qualitative. Nous allons en donner quelques exemples.

Si on électrolyse dans un tube en U, entre deux électrodes de platine (*fig.* 187), une solution de sulfate de sodium SO^4Na^2 colorée en mauve par de la teinture de mauves, le métal Na, qui se porte à la cathode, y réagit sur l'eau pour donner de la soude NaOH ($Na + H^2O = NaOH + H$), dont la présence a pour effet de faire virer au vert la teinture de mauves; le radical SO^4, qui se porte à l'anode, agit sur l'eau pour donner de l'acide sulfurique SO^4H^2 ($SO^4 + H^2O = SO^4H^2 + O$), et le liquide qui avoisine l'anode vire au rouge. C'est une

expérience analogue que nous avons utilisée (§ 130) pour montrer que les courants des machines électrostatiques produisaient l'électrolyse ; ce sont également des électrolyses de ce type qui servent pour reconnaître le signe des pôles d'une source à l'aide des papiers cherche-pôles.

Si l'on électrolyse, entre deux électrodes de fer, une solution étendue de soude NaOH, le métal Na, qui se porte à la cathode, y agit sur l'eau pour redonner de la soude NaOH, avec dégagement d'hydrogène ($Na + H^2O = NaOH + H$) ; le radical OH, qui se porte à l'anode, y redonne de l'eau, avec dégagement d'oxygène ($2OH = H^2O + O$), de sorte que la quantité totale de soude contenue dans la solution reste constante, et que tout se passe comme si l'eau était électrolysée. Cette électrolyse est une des préparations industrielles de l'oxygène et de l'hydrogène.

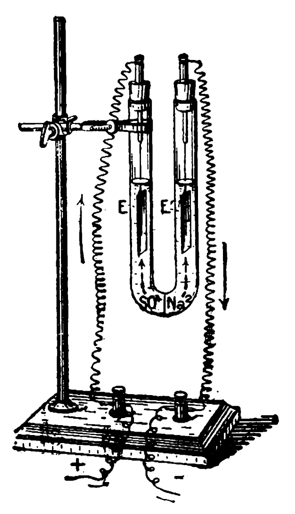


FIG. 187.

Si l'on électrolyse une solution de sulfate de cuivre SO^4Cu entre deux électrodes de cuivre, le métal Cu se dépose sur la cathode ; le radical SO^4 attaque le cuivre de l'anode et régénère le sulfate de cuivre ($SO^4 + Cu = SO^4Cu$). La solution reste inaltérée dans l'ensemble, et le phénomène se réduit à un transport de cuivre de l'anode à la cathode. Cette électrolyse est employée pour le raffinage électrolytique du cuivre : on part d'une anode en cuivre impur, et on recueille à la cathode du cuivre pur.

161. Lois de Faraday. — Les lois quantitatives de l'électrolyse ont été énoncées par Faraday. On constate d'abord que si, dans un même circuit, on dispose en série plusieurs bacs à électrolyse contenant le même électrolyte, la masse m d'électrolyte décomposée est la même dans les différents bacs, quelle que soit la forme des bacs et des électrodes, ou la concentration et la température des solutions : elle ne dépend que de la nature chimique de l'électrolyte, de l'intensité i et de la durée t du courant qui l'a traversé.

On constate ensuite que, si le courant est maintenu constant, la masse m d'électrolyte décomposée dans chaque bac est proportionnelle au temps pendant lequel il a passé, puis, si l'on fait varier le courant, que la masse m / t d'électrolyte décomposée par unité de temps est proportionnelle à son intensité i. On pourra, par exemple, placer des bacs à électrolyse dans les différentes branches d'un circuit dérivé, ainsi que dans le circuit principal ; on sait que l'intensité du courant dans ce dernier circuit est égale à la somme des intensités dans les différentes dérivations ; on vérifiera que la masse d'électrolyte décomposée dans le circuit principal est égale à la somme des masses des électrolytes décomposées dans les différentes dérivations.

Ces lois peuvent se résumer dans l'énoncé suivant (**première loi de Faraday**) :

La masse d'un électrolyte déterminé décomposée par le passage du courant est proportionnelle à la quantité d'électricité qui l'a traversé :

$$m = kq = kit.$$

Le coefficient k ne dépend que de la nature chimique de l'électrolyte.

Il résulte immédiatement des lois fondamentales de la Chimie (loi des proportions définies) que la même loi peut être appliquée aux masses m_1 et m_2 des produits recueillis dans la décomposition. On aura, par exemple, pour la masse de métal déposé :

$$m_1 = k_1 q = k_1 it.$$

Le coefficient k_1 représente la masse de métal déposée par le passage de l'unité de quantité d'électricité, c'est-à-dire, dans le système pratique, d'un coulomb. L'expérience montre qu'il ne dépend que de la nature du métal, et qu'il est le même quel que soit le sel de ce métal qu'on électrolyse, à condition qu'on compare entre eux des sels où le métal ait même valence. On lui donne le nom d'**équivalent électrochimique** du métal ; on a, par exemple, en milligrammes par coulomb, pour l'équivalent électrochimique de l'argent 1,118, pour celui du cuivre dans les sels cuivriques (SO^4Cu) 0,3295, dans les sels cuivreux (Cu^2Cl^2) 0,659.

L'expérience montre que les équivalents électrochimiques des métaux forment un système d'équivalents chimiques ; ils représentent les masses de ces métaux susceptibles de se substituer à une même masse d'hydrogène, et par conséquent sont proportionnels aux quotients de leurs masses atomiques par leur valence. Si nous désignons par M_1 la masse atomique du métal et par p sa valence, on a :

$$k_1 = \frac{1}{q_0}\frac{M_1}{p},$$

q_0 étant une constante qui ne dépend que des unités choisies. La masse m_1 de métal déposé est alors :

$$m_1 = \frac{q}{q_0}\frac{M_1}{p}.$$

Si la masse atomique M_1 est exprimée en grammes, la quantité q_0 représente la quantité d'électricité nécessaire pour déposer une *valence-gramme* de métal, soit, par exemple, 1 gramme d'hydrogène, 108 grammes d'argent, $63 : 2 = 31^{gr},5$ de cuivre cuivrique, $197 : 3 = 65^{gr},7$ d'or.

Le dépôt d'une valence-gramme de métal correspond à la rupture d'une valence-gramme dans la molécule d'électrolyte. Les lois qui relient la masse d'électrolyte décomposé à sa nature chimique peuvent être résumées par l'énoncé suivant **(seconde loi de Faraday) :**

La quantité d'électricité nécessaire pour rompre par électrolyse une valence-gramme est indépendante de la nature de l'électrolyte.

L'ensemble des deux lois de Faraday est représenté par la formule :

$$m = \frac{it}{q_0}\frac{M}{p},$$

où M est la masse moléculaire de l'électrolyte, et p le nombre de valences qui unissent le métal et le radical dans sa molécule.

Les lois de Faraday ont souvent été vérifiées expérimentalement. On mesure les volumes dégagés, quand les produits de la décomposition sont gazeux, ou l'on pèse les quantités de métal déposées. Les courants sont mesurés, soit par des

méthodes électromagnétiques, soit par des méthodes électrostatiques (courants fournis par la décharge des condensateurs). Les résultats obtenus ont toujours été satisfaisants. La principale cause d'erreur est la difficulté de connaître exactement les réactions qui se produisent dans l'électrolyse ; il est assez rare qu'on réussisse à éviter qu'il y ait des réactions secondaires portant sur une partie seulement de la masse de l'électrolyte. Des vérifications extrêmement précises de la première loi ont pourtant été obtenues, en particulier dans les recherches faites en vue de déterminer l'équivalent électrochimique de l'argent.

Ces recherches ont donné une valeur de cet équivalent égale à 0,011180 u. é. m. C. G. S., à quelques cent-millièmes près ; le poids atomique international de l'argent étant Ag = 107,880, la valeur correspondante de q_0 est 9649,3 u. é. m. C. G. S., soit 96493 coulombs. Des déterminations d'une précision comparable faites avec des dépôts d'iode, ont donné $q_0 = 96508$ coulombs : on peut donc admettre pour q_0 la valeur 96500 coulombs avec une erreur certainement très inférieure à 1/10.000.

162. Applications de l'électrolyse. · Nous avons déjà signalé (§ 160) quelques électrolyses utilisées dans la pratique industrielle : préparation du sodium et du chlore par électrolyse du chlorure de sodium fondu, préparation de l'oxygène et de l'hydrogène par électrolyse d'une solution alcaline, raffinage électrolytique du cuivre. On pourrait multiplier ces exemples, et l'ensemble des réactions électrolytiques, constituant l'**électrochimie et l'électrométallurgie,** prend de jour en jour plus d'importance dans l'industrie chimique. Citons encore, entre autres, la préparation des hypochlorites et des chlorates par électrolyse des chlorures alcalins dissous, et l'extraction de l'aluminium par électrolyse d'un bain formé d'alumine Al^2O^3 et de cryolithe ($6NaF.Al^2F^6$) fondues.

On peut encore citer, comme application des phénomènes d'électrolyse, leur emploi pour recouvrir les objets de minces couches métalliques. En employant des solutions convenablement choisies, tant au point de vue de la nature du sel dissous que de la concentration et de la température, et en réglant convenablement l'intensité du courant, on arrive à déposer la plupart des métaux en couches parfaitement adhérentes. On peut ainsi réaliser la *dorure*, l'*argenture*, le *cuivrage*, le *nickelage*, le *chromage*, le *zingage*, le *cadmiage*, ou reproduire des objets par *galvanoplastie*.

Lorsqu'on électrolyse une solution contenant des sels de plusieurs métaux, ces métaux se déposent en général séparément et successivement. Cette propriété est utilisée en Chimie dans l'*analyse électrolytique*.

Enfin, rappelons que les phénomènes d'électrolyse sont à la base de la *définition de l'unité légale d'intensité de courant*, l'**ampère international** (§ 134).

En adoptant en 1908 cette définition, la Conférence de Londres définissait un procédé de mesure de l'intensité plus accessible que les mesures absolues électromagnétiques que nous étudierons au chapitre XXVI ; il suffisait, pour mesurer une intensité de courant en ampères internationaux, de disposer comme instruments de mesures d'une balance et d'une horloge.

En fait, bien que le choix d'un métal précieux comme l'argent évite les difficultés qui pourraient provenir de l'oxydation du dépôt électrolytique, la détermination précise d'une intensité de courant par électrolyse du nitrate

d'argent reste une opération délicate, qui présente toutes les difficultés d'une analyse chimique de précision. Il est nécessaire de prendre certaines précautions, pour éviter que le bain ne devienne acide et pour obtenir un dépôt continu et bien adhérent, qu'on puisse facilement laver et débarrasser, avant séchage, de toute trace de sel dissous ; il convient de se placer dans les conditions précisées par les résolutions de la Conférence de Londres, notamment en ce qui concerne la nature des électrodes (anode en argent et cathode en platine), la concentration de la solution (15 à 20 0/0) et la densité du courant (au plus 1/5 d'ampère par centimètre carré à l'anode, 1/50 d'ampère par centimètre carré à la cathode).

Au total, étant donnés les progrès réalisés depuis 1908 dans les mesures électriques et mécaniques, il semble qu'à l'heure actuelle les déterminations absolues sont au moins aussi précises et aussi commodes que les déterminations électrolytiques, et c'est la raison pour laquelle la 8e Conférence des Poids et Mesures a décidé en principe (§ 134) d'abandonner la définition de Londres.

II. — *THÉORIE DES IONS*

163. Dissociation électrolytique. — Pour expliquer les phénomènes d'électrolyse, nous admettrons l'hypothèse d'Arrhénius : la décomposition n'est pas produite par le passage du courant, elle résulte du seul fait de la dissolution. La molécule de l'électrolyte se trouve, même en l'absence de tout courant, dissociée en des éléments, portant des charges électriques positives et négatives, dont la somme algébrique est nulle. Ces éléments s'appellent des ions. Les uns sont constitués par les atomes du métal et portent une charge positive; ce sont les cathions. Les autres, constitués par les radicaux unis au métal dans la molécule d'électrolyte, portent une charge négative; ce sont les anions. C'est ainsi qu'une solution étendue de chlorure de sodium ne contient pas de molécules NaCl, mais contient uniquement des cathions, formés par des atomes de sodium chargés positivement, que nous représenterons par la notation Na^+, et des anions, formés d'atomes de chlore chargés négativement, que nous représenterons par la notation Cl^-.

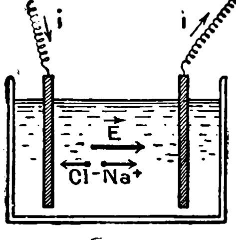


FIG. 188.

Il faut naturellement supposer que les propriétés chimiques des ions sont très différentes de celles des atomes neutres; tandis que les atomes neutres de sodium Na réagissent énergiquement sur les molécules d'eau, les ions Na^+ ne les attaquent pas : la valeur considérable de la charge portée par chaque atome fait de l'ion une individualité chimique nettement différente de l'atome neutre.

Lorsqu'on établit un champ électrique entre deux électrodes métalliques plongeant dans le liquide (*fig.* 188), les ions sont soumis à des forces électrosta

tiques, et se mettent en mouvement, les cathions dans la direction du champ, c'est-à-dire vers la cathode, les anions dans la direction opposée,c'est-à-dire vers l'anode. Lorsqu'ils arrivent au contact des électrodes métalliques, ils perdent leur charge, qui passe dans le métal, et deviennent des atomes neutres, susceptibles d'être décelés par leurs propriétés physiques et chimiques. L'hypothèse d'Arrhénius explique immédiatement la décomposition de la molécule en atomes neutres par le passage du courant, et le fait que les produits de décomposition n'apparaissent qu'aux électrodes. Elle explique en même temps le passage du courant, par un apport d'électricité positive à la cathode et un apport égal d'électricité négative à l'anode, le transport de l'électricité étant produit dans la solution par les déplacements des ions.

La quantité d'électricité positive qui s'écoule par le fil qui relie la cathode au générateur est égale à la charge que portaient les cathions qui s'y sont transformés en atomes métalliques neutres. Comme, dans un même électrolyte, ils sont tous identiques entre eux, c'est-à-dire ont la même masse et portent la même charge, la quantité d'électricité transportée par le courant est nécessairement proportionnelle à la quantité de métal déposée, ou à la quantité d'électrolyte décomposée. C'est la première loi de Faraday.

On sait que les masses atomiques des éléments et les masses moléculaires des composés sont proportionnelles aux masses des atomes et des molécules, autrement dit qu'un atome-gramme d'un corps simple ou une molécule-gramme d'un corps composé contient un nombre N d'atomes ou de molécules qui est le même pour tous les corps. La quantité d'électricité libérée par le dépôt d'un atome-gramme de métal est égale à N fois la charge d'un cathion; d'après la seconde loi de Faraday, elle est égale au produit pq_0 d'une constante universelle q_0 par la valence p du métal. Cette loi expérimentale se traduit, dans la théorie des ions, par l'hypothèse que la charge d'un ion de valence p est égale au produit par p d'une charge élémentaire constante, $e = \frac{q_0}{N}$.

L'étude des propriétés des gaz a permis, par l'application de la théorie cinétique, de déterminer la valeur du nombre N, qui est voisine de $6 \cdot 10^{23}$. D'autre part, nous avons vu que la valeur de la charge q_0 était 9649 u. é. m. On en déduit, pour la valeur de la charge élémentaire, $e = \frac{q_0}{N} = 1,60 \cdot 10^{-20}$ u. é. m. Nous verrons, dans l'étude de l'ionisation des gaz, qu'on trouve la même valeur pour la charge des ions gazeux, et nous serons conduits à admettre que l'électricité possède une structure atomique analogue à celle de la matière. La charge élémentaire e est la plus petite quantité d'électricité qui puisse exister séparément, et toutes les charges qu'on peut rencontrer en sont des multiples entiers. En particulier, dans l'électrolyse, un ion porte autant de charges élémentaires qu'il a de valences, ce que nous rappellerons en le représentant par un symbole tel que Na^+, SO^{4--}, Au^{+++}.

164. Applications diverses de la théorie des ions. — La théorie des ions est extrêmement importante, parce qu'elle permet d'établir un lien entre de nombreux phénomènes, en apparence très éloignés les uns des autres, et d'expliquer les anomalies présentées à divers points de vue par les solutions électrolytiques.

C'est ainsi qu'elle explique pourquoi toutes les solutions étendues des sels

d'un même métal ou d'un même acide présentent les mêmes propriétés chimiques. Si des solutions de chlorure de sodium ou de chlorure mercurique donnent toutes deux un précipité avec l'azotate d'argent, cela ne tient pas à une propriété commune des molécules des deux chlorures, dont on ne concevrait pas très bien la cause, mais à une propriété caractéristique de l'ion Cl^-, que contiennent ces deux dissolutions. De même, les propriétés caractéristiques des solutions acides, par exemple leur action sur les réactifs colorés, sont des propriétés caractéristiques de l'ion H^+.

C'est encore la même théorie qui explique les résultats relatifs à la couleur des solutions; par exemple des solutions de même concentration moléculaire des divers permanganates présentent la même bande d'absorption et absorbent la même proportion de lumière : la couleur de ces solutions est celle de l'ion MnO^{4+}.

Pour faire l'étude complète des propriétés chimiques des solutions, on complète l'hypothèse de la dissociation électrolytique en admettant qu'il peut arriver, si la solution n'est pas très étendue, qu'une fraction seulement du nombre total de molécules soit dissociée : sur n molécules d'électrolyte mises en dissolution dans l'unité de volume de la solution, $n\alpha$ sont dissociées; α est un nombre, plus petit que l'unité, qu'on appelle le **degré de dissociation.** Il dépend de la nature de l'électrolyte (cf. § 167) et il tend dans tous les cas vers l'unité quand la concentration tend vers zéro.

On doit également tenir compte de la dissociation électrolytique dans le calcul de la pression osmotique et dans l'application des lois de Raoult. On sait que la pression osmotique, ainsi que l'abaissement du point de congélation ou l'élévation du point d'ébullition, sont proportionnels au nombre de molécules présentes dans l'unité de volume de la solution. Les ions doivent intervenir dans ce calcul au même titre que les molécules : si l'on a dissous n molécules d'électrolyte dans l'unité de volume de la solution, il y a en réalité $n\alpha$ molécules dissociées et $n(1-\alpha)$ non dissociées. Si chaque molécule dissociée donne naissance à i ions (par exemple SO^4Na^2 donne 3 ions, SO^{4--}, Na^+, Na^+), il y a en tout, dans l'unité de volume de la solution, $n' = n(1-\alpha) + ni\alpha$ centres assimilables à des molécules dissoutes. C'est ce nombre $n' = n + n(i-1)\alpha$ qui doit être introduit dans les formules, et qui pourra être déterminé par les mesures cryoscopiques, ébullioscopiques, tonométriques ou de pression osmotique. On voit que ces mesures permettent, sous certaines réserves sur lesquelles nous reviendrons plus loin (§ 167), de déterminer le degré de dissociation α.

165. Mécanisme du passage du courant dans l'électrolyte. — Nous admettrons que, lorsqu'un ion est soumis à un champ électrique $\vec{E}$, il se déplace avec une vitesse proportionnelle au champ, $\vec{v} = k\vec{E}$; le coefficient k s'appelle la **mobilité de l'ion.** On peut justifier cette hypothèse en remarquant que l'ion est soumis, d'une part à une force électrostatique proportionnelle au champ, d'autre part à une force de résistance liquide dirigée en sens inverse de la vitesse et proportionnelle à la vitesse : il doit atteindre très vite une vitesse limite, pour laquelle ces deux forces s'équilibrent, et qui, par conséquent, doit être proportionnelle au champ.

Pour simplifier les calculs, nous supposerons que l'électrolyse est effectuée

dans un vase, de la forme représentée par la figure 189, présentant une partie cylindrique de section s : on peut considérer que le champ électrique y est uniforme et parallèle aux génératrices du cylindre. Nous nous placerons dans le cas d'ions monovalents, par exemple dans le cas de l'électrolyse du chlorure de sodium NaCl. Les deux ions Na^+ et Cl^- portent alors des charges $+ \mathbf{e}$ et $- \mathbf{e}$; si leurs mobilités respectives sont k_1 et k_2, leurs vitesses, dans la partie cylindrique du conducteur électrolytique, sont $v_1 = k_1$ E et $v_2 = k_2$ E. Les cathions qui traversent pendant une seconde une section MM′ du tube sont ceux qui, au début de cette seconde, étaient compris entre cette section MM′ et une section NN′ distante de $v_1 = k_1$ E, c'est-à-dire dans un volume de dissolution égal à k_1Es ; si la solution placée dans le tube cylindrique contient n molécules de NaCl par centimètre cube, et si le degré de dissociation est α, elle contient $n\alpha$ cathions Na^+ par centimètre cube, et le nombre de ces cathions qui traversent par seconde une section MM′ est $n_1 = n\alpha k_1 Es$. De même, le nombre d'anions Cl^- qui traversent cette section en sens inverse est $n_2 = n\alpha k_2 Es$.

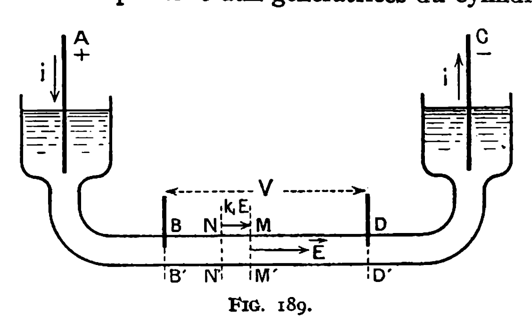


FIG. 189.

Les cathions transportent par seconde, à travers la section MM′ et dans le sens du champ E, une quantité d'électricité positive égale à $n_1\mathbf{e}$; les anions transportent, à travers cette même section et en sens inverse, une quantité d'électricité négative égale à $- n_2\mathbf{e}$. La somme de ces deux quantités représente l'intensité I du courant qui traverse la section MM′ dans le sens du champ E :

$$I = (n_1 + n_2)\,\mathbf{e} = n\alpha\,(k_1 + k_2)\,Es\mathbf{e}.$$

La quantité d'électricité qui traverse par seconde l'unité de surface de la section MM′ est :

$$i = \frac{I}{s} = n\alpha\,(k_1 + k_2)\,E\mathbf{e},$$

et comme la direction de ce courant est la même que celle du champ électrique E, on peut écrire, entre les deux vecteurs courant $\vec{i}$ et champ électrique $\vec{E}$, la relation :

$$\vec{i} = \sigma\vec{E},$$

avec :

$$\sigma = n\alpha\,(k_1 + k_2)\,\mathbf{e}.$$

166. Conductivité des électrolytes. — La relation $\vec{i} = \sigma\vec{E}$, que nous venons d'établir dans un cas particulier, et qu'on peut établir quelle que soit la forme de la cuve électrolytique, n'est autre que la relation qui exprime la loi d'Ohm (§ 143). *La loi d'Ohm est donc applicable aux conducteurs électrolytiques,* et la conductivité σ d'une solution électrolytique est donnée par :

$$\sigma = \alpha\,(k_1 + k_2)\,n\mathbf{e}.$$

Le nombre n est le nombre de molécules de l'électrolyte contenues dans chaque centimètre cube de la solution ; si nous désignons par c sa concentration moléculaire, c'est-à-dire le nombre de molécules-grammes d'électrolyte qu'elle contient par centimètre cube, on a $n = Nc$; comme on a $\mathbf{e} = \frac{q_0}{N}$, on peut écrire :

$$\sigma = \alpha (k_1 + k_2) q_0 c.$$

Nous supposerons que les mobilités k_1 et k_2 ne dépendent pas de la concentration ; on peut alors dire que : *la conductivité d'un électrolyte est proportionnelle à la concentration et au degré de dissociation. Pour les solutions très étendues* ($\alpha = 1$), *elle est proportionnelle à la concentration.*

On peut donner de cette loi un autre énoncé, en introduisant la **conductivité moléculaire** λ, définie comme le quotient de la conductivité par la concentration moléculaire :

$$\lambda = \frac{\sigma}{c} = \alpha (k_1 + k_2) q_0.$$

La conductivité moléculaire a une valeur constante pour les solutions très étendues ; cette valeur s'appelle *la conductivité moléculaire limite :*

$$\lambda_0 = (k_1 + k_2) q_0.$$

Le degré de dissociation est égal au rapport de la conductivité moléculaire à la conductivité moléculaire limite :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_0}.$$

Des raisonnements analogues pourraient être faits dans le cas des électrolytes contenant des ions polyvalents. Comme les quantités qui sont équivalentes sont, non pas les molécules-grammes, mais les valences-grammes, on définit alors, au lieu de la conductivité moléculaire, la **conductivité équivalente,** en divisant la conductivité par le nombre de valences-grammes de l'électrolyte contenues dans l'unité de volume de la solution.

On remarquera que, la constante q_0 étant connue, la mesure de la conductivité moléculaire limite permet de calculer la somme $k_1 + k_2 = \lambda_0/q_0$ des mobilités des ions.

167. Résultats expérimentaux. — Les résistances des électrolytes peuvent être mesurées par les mêmes méthodes que les résistances des conducteurs ordinaires. Pour éviter le phénomène de la polarisation des électrodes (§ 169), on emploie, dans les mesures au pont de Wheatstone, un courant alternatif : les résistances du pont doivent alors être dépourvues de self-induction, et l'appareil de mesure est constitué par un téléphone. Des mesures de résistance, on peut déduire la valeur de la conductivité par la formule habituelle $\sigma = l/Rs$; on peut aussi étalonner le tube à électrolyte en mesurant sa résistance lorsqu'il est rempli avec une solution de conductivité connue, en général

une solution titrée de chlorure de potassium KCl : le rapport des conductivités des deux solutions est évidemment égal à l'inverse du rapport des résistances mesurées.

La conductivité des électrolytes augmente avec la température; la variation relative est assez considérable, et est de l'ordre de 1/40 par degré. On peut remarquer que cette augmentation relative est voisine de la diminution relative du coefficient de frottement intérieur de l'eau; ce fait vient à l'appui de l'interprétation donnée de la relation $v = kE$, qui doit exprimer l'équilibre entre la force électrostatique et la force de frottement qui agissent sur l'ion.

On sépare aujourd'hui les électrolytes en deux classes, les *électrolytes forts* dont le type est le chlorure de potassium KCl, et les *électrolytes faibles*, dont le type est l'acide acétique CH^3-CO^2H. Les deux courbes de la figure 190 représentent, avec des échelles d'ailleurs différentes, les variations pour ces deux corps de la conductivité σ (inverse de la résistivité ρ en ohms-centimètres) en fonction de la concentration moléculaire c (en molécules par litre). Les conductivités moléculaires λ y sont représentées par les coefficients angulaires des droites telles que OM, les conductivités moléculaires limites λ_0 par les coefficients angulaires des tangentes à l'origine telles que OT.

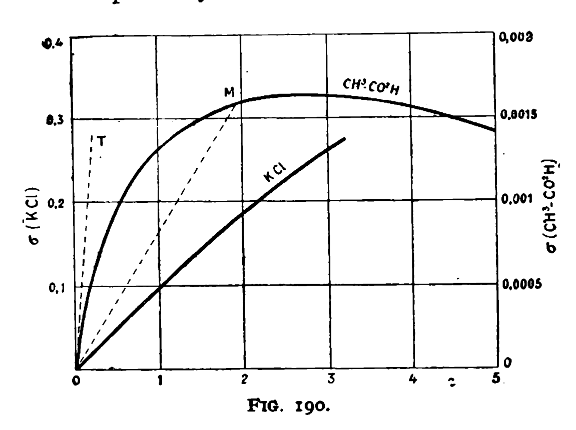


FIG. 190.

Pour les **électrolytes faibles** (CH^3-CO^2H, acides et bases organiques), le degré de dissociation $\alpha = \lambda/\lambda_0$ diminue assez rapidement à mesure que la concentration croît; aux concentrations élevées, la conductivité passe par un maximum, puis décroît quand la concentration continue à croître. Ses variations sont celles que fait prévoir l'étude physico-chimique de l'équilibre qui s'établit dans la solution entre les ions et les molécules non dissociées, et il y a un accord numérique satisfaisant, tant du moins que les solutions ne sont pas trop concentrées, entre les valeurs de α que fournissent les mesures de conductivité et celles que fournit l'application à la dissociation électrolytique de la loi d'action de masses.

Il en est de même pour les valeurs que fournissent les mesures cryoscopiques, ébullioscopiques, tonométriques, ou de pression osmotique : les écarts entre les divers groupes de déterminations n'apparaissent qu'en solution concentrée, et leur cause doit évidemment être cherchée dans le fait que les lois telles que la loi de Van't Hoff, les lois de Raoult, la loi d'action de masses ne sont que des lois grossièrement approchées, qui ne sont pas plus applicables aux solutions concentrées que la loi de Mariotte n'est applicable aux gaz comprimés à haute pression.

Pour les **électrolytes forts** (KCl, acides forts, bases fortes inorganiques, sels en général), au contraire, la conductivité est à peu près proportionnelle à la

concentration, et le calcul du degré de dissociation conduit à des valeurs peu différentes de l'unité; leur loi de variation en solution étendue est d'ailleurs tout à fait incompatible avec la loi d'action de masses. On est ainsi conduit à supposer que *les électrolytes forts sont entièrement dissociés* ($\alpha = 1$) *à toute concentration :* c'est là une hypothèse à rapprocher du fait que, même dans le cristal de sylvine, il n'existe pas de molécule KCl, mais uniquement des ions K^+ et Cl^- (§ 391).

On explique alors les variations de la conductivité moléculaire $\lambda = \alpha (k_1 + k_2) q_0$ par des variations avec la concentration des mobilités k_1 et k_2, dues aux forces électrostatiques qu'exercent sur chacun des ions les autres ions qui l'entourent : la diminution des mobilités quand la concentration augmente a d'ailleurs été mise directement en évidence par les mesures dont nous indiquerons le principe dans le paragraphe suivant.

Il est à noter que les forces électrostatiques entre ions ne peuvent prendre leur valeur normale que si les ions ont le temps, malgré leur mouvement d'ensemble, de prendre à chaque instant la même distribution statistique dans l'espace qu'en l'absence de champ. On explique ainsi, par la diminution des forces électrostatiques qui s'opposent au mouvement, l'augmentation de la conductivité observée expérimentalement pour les courants de haute fréquence (10^6 par seconde) ou pour les déplacements rapides correspondant aux champs très forts (100.000 volts/cm).

Il faut également tenir compte de ces forces dans le calcul de la pression osmotique, et par suite dans l'application des lois de Raoult : pour diluer la solution, il faut éloigner les charges électriques les unes des autres, et fournir un certain travail électrique, de sorte que le travail reçu est moins grand que celui qui correspondrait à la pression osmotique produite par le même nombre de particules non chargées. Le développement de ces calculs semble avoir rétabli, au moins dans le cas des solutions étendues, l'accord entre les différents groupes de mesures, et on ne peut plus guère douter aujourd'hui de la validité de l'hypothèse de la dissociation complète des électrolytes forts.

168. Mobilité des ions. — Reprenons la cuve électrolytique à tube cylindrique considérée au paragraphe 165 (*fig.* 189), et considérons une portion de la partie cylindrique limitée par deux sections BB′ et DD′. Elle reçoit par seconde n_1 cathions Na^+ qui y entrent à travers la section BB′, et elle en perd autant qui en sortent à travers la section DD′; elle reçoit de même n_2 anions Cl^- à travers DD′, et en perd n_2 à travers BB′. Au total, la masse liquide reste à l'état neutre, et la composition du liquide dans le tube reste invariable pendant l'électrolyse.

Considérons maintenant le compartiment cathodique, à droite de DD′. Il perd par seconde, à travers DD′, n_2 anions Cl^-, qui emportent une charge $-n_2 e$, et il reçoit n_1 cathions Na^+, qui apportent une charge $+n_1 e$. Au total, il gagne une charge positive $(n_1 + n_2)e$, qui doit s'écouler par la cathode C: les cathions qui arrivent dans le compartiment cathodique viennent perdre leur charge sur la cathode, et les anions qui le quittent libèrent un nombre égal de cathions, qui viennent également se décharger sur la cathode.

L'intensité du courant qui s'écoule par la cathode est $I = (n_1 + n_2)e$, c'est bien celle que nous avons calculée pour une section du tube. La solution contenue dans le compartiment cathodique a perdu n_2 anions Cl^- qui l'ont quitté

à travers la section DD′, et $n_1 + n_2$ cathions Na^+ qui se sont déposés sur la cathode; par contre elle a reçu, à travers DD′, n_1 cathions Na^+, de sorte qu'elle a perdu finalement n_2 anions Cl^- et n_2 cathions Na^+. Autrement dit, la solution s'appauvrit au voisinage de la cathode, et perd, par seconde, n_2 molécules de chlorure de sodium NaCl.

Répétons les mêmes raisonnements sur le compartiment anodique, à gauche de BB′ : à travers BB′, il reçoit par seconde n_2 anions Cl^-, et perd n_1 cathions Na^+; $n_1 + n_2$ anions Cl^- viennent se décharger sur l'anode, et y sont neutralisés par un courant $I = (n_1 + n_2)e$ amené par le circuit extérieur. Les $n_1 + n_2$ atomes de Cl ainsi produits se dégagent et le compartiment anodique perd finalement n_2 cathions Na^+ et $(n_1 + n_2) - n_2 = n_1$ anions Cl^-. La solution s'appauvrit au voisinage de l'anode, et perd par seconde n_1 molécules de chlorure de sodium NaCl.

Il est possible de réaliser l'électrolyse dans des conditions telles qu'il n'y ait pas de courants liquides mélangeant les différentes parties de la masse de l'électrolyte, ni de diffusion égalisant leurs concentrations : il suffit par exemple de séparer la cuve en deux parties par une cloison poreuse. On peut alors déterminer, par l'analyse des parties de la solution qui remplissent les deux compartiments, les masses m_1 et m_2 d'électrolyte qui ont disparu respectivement du compartiment anodique et du compartiment cathodique. On a :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{n\alpha k_1 \mathrm{E}s}{n\alpha k_2 \mathrm{E}s} = \frac{k_1}{k_2}.$$

L'expérience fournit donc la valeur du rapport des mobilités des ions : pour le chlorure de sodium, par exemple, on trouve que ce rapport est égal à 0,66.

Nous avons vu au paragraphe précédent comment on pouvait obtenir la somme $k_1 + k_2$ des mobilités des ions. Connaissant leur somme et leur rapport, il est facile de calculer leurs valeurs. En faisant les calculs en u. é. m., on trouve en général des nombres de l'ordre de $5 \cdot 10^{-12}$; si le champ correspond à une différence de potentiel de 1 volt par centimètre, ou 10^8 u. é. m., la vitesse des ions est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-4}$ centimètre-seconde, ou 5µ par seconde. On trouve, par exemple, 4,5µ pour l'ion Na^+, 6,8µ pour l'ion Cl^-, 17,6µ pour l'ion OH^-.

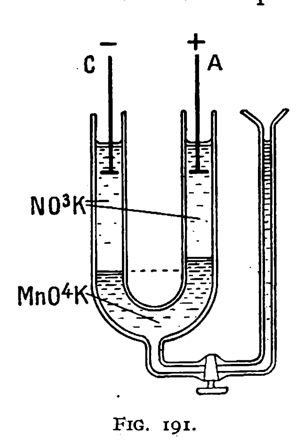


FIG. 191.

Cette vitesse peut, dans certains cas, être mesurée directement, et on peut par exemple montrer le déplacement des ions par l'expérience représentée par la figure 191. L'électrolyte, placé dans un tube en U, comprend une colonne de permanganate de potassium MnO^4K surmontée de deux colonnes d'azotate de potassium NO^3K; si l'on a eu soin de prendre des solutions de densités différentes, et d'introduire la plus lourde avec précautions par un tube latéral muni d'un robinet, les deux solutions ne se mélangent pas. Si l'on produit l'électrolyse, les ions MnO^{4-} se dirigent vers l'anode, et on voit la coloration violette s'élever lentement du côté de l'anode. Les résultats des mesures de mobilités faites par des expériences de ce type sont en bon accord avec ceux que donnent les mesures de $k_1 + k_2$ et k_1 / k_2.

Si l'on admet pour la force de frottement qui s'oppose au mouvement des ions dans l'eau la formule relative à la résistance opposée par l'eau au mouvement d'une sphère de rayon a, on peut déduire, de la valeur de k, une valeur approximative du rayon de l'ion : pour l'ion K^+ par exemple, on trouve une valeur de l'ordre de $1{,}2 \cdot 10^{-8}$ centimètre, en assez bon accord avec celles que fournissent d'autres méthodes.

III. – *POLARISATION DES ÉLECTRODES*

169. Force contre-électromotrice de polarisation. — Si l'on établit, entre deux électrodes de même métal plongeant dans une solution électrolytique, une différence de potentiel V, et si l'on mesure l'intensité i du courant qui traverse l'électrolyte, on constate, en général, qu'elle est inférieure à l'intensité $i = V / r$ qu'on calculerait par la loi d'Ohm, d'après la résistance de la colonne liquide placée entre les deux électrodes. L'interprétation de ce phénomène résulte immédiatement des considérations énergétiques développées au paragraphe 158 : lorsque le régime permanent est établi, le passage d'une quantité d'électricité it décompose une quantité d'électrolyte proportionnelle à it, et fait ainsi apparaître dans la cuve à électrolyse une énergie chimique proportionnelle à it. La réaction s'accompagne, en général, d'un échange de chaleur avec le milieu extérieur (cf. § 172), mais, de toutes façons, la quantité d'énergie développée est proportionnelle à la quantité d'électrolyte décomposée, et peut être représentée par l'expression eit. L'énergie électrique Vit apportée par le passage du courant est égale à la somme de l'énergie eit et de l'énergie ri^2t dégagée par effet Joule ; on a :

$$Vit = eit + ri^2t, \qquad i = \frac{V - e}{r}.$$

La quantité e est une force contre-électromotrice, dite **force contre-électromotrice** de polarisation. La valeur de e dépend de l'ensemble des réactions qui se produisent dans l'électrolyte, y compris les réactions secondaires : elle dépend à la fois de la nature de l'électrolyte et de la nature des électrodes. Dans l'électrolyse d'une solution étendue d'acide sulfurique entre électrodes de platine, elle est voisine de 1,6 volt.

Les réactions chimiques produites par électrolyse se produisent à la surface des électrodes, et on peut y localiser la f. é. m. de polarisation. C'est pourquoi le phénomène est appelé **polarisation des électrodes.** On l'interprète en admettant une modification de cette surface, qui produit une variation de la différence de potentiel de contact entre la solution et le métal de l'électrode.

La modification est produite par le passage même du courant ; dans le cas par exemple de l'électrolyse de l'eau acidulée, on admet qu'elle est due à l'absorption, par le métal des électrodes, des gaz dégagés. On peut tracer, à l'aide d'un oscillographe qui enregistre les variations rapides du courant, la courbe qui représente son intensité en fonction du temps, à partir de l'instant où l'on établit entre les électrodes la différence de potentiel V. On obtient une courbe de la forme représentée par la figure 192 : le courant initial a une va-

leur $i_0 = \frac{V}{r}$, il diminue très rapidement à mesure que les électrodes se polarisent, et atteint en quelques centièmes de seconde la valeur limite $i_l = \frac{V - e}{r}$. Ces courbes montrent que la polarisation n'existe que lorsque le courant a passé pendant un certain temps, et qu'elle est inappréciable tant qu'il n'a pas transporté une quantité d'électricité assez grande — de l'ordre du microcoulomb par centimètre carré d'électrode. C'est cette remarque qui permet la mesure de la résistance des électrolytes par la méthode du pont de Wheatstone en employant un courant alternatif, comme nous l'avons indiqué au début du paragraphe 167; le courant change de sens après un temps extrêmement court, de l'ordre du millième de seconde si la fréquence est une fréquence musicale, et le courant de sens inverse dépolarise l'électrode.

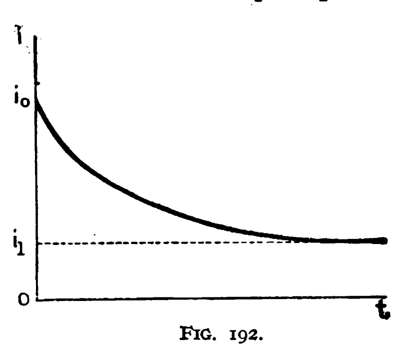


Fig. 192.

Lorsqu'on isole la cuve électrolytique du circuit qui y amenait le courant, la polarisation des électrodes a pour effet de maintenir entre elles une différence de potentiel, égale à la f. é. m. de polarisation ; si on les réunit alors par un conducteur extérieur, le circuit formé par ce conducteur et l'électrolyte est traversé par un courant i', qui est dirigé dans l'électrolyte en sens inverse du courant primitif i. On peut employer par exemple le montage représenté par la figure 193, et utiliser une clef de Morse M pour couper le courant i de la pile P et envoyer le courant i' dans le galvanomètre G. Le courant i' produit sur les surfaces des électrodes des modifications inverses de celles que produit le courant i : c'est un **courant de dépolarisation,** qui diminue rapidement, et cesse quand les électrodes sont entièrement dépolarisées.

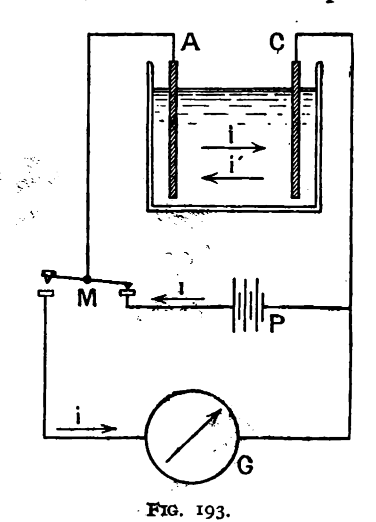


Fig. 193.

Le même montage peut être utilisé pour montrer que les phénomènes de polarisation sont bien localisés sur les électrodes : si, après avoir coupé le courant i, on change l'eau acidulée de la cuve à électrolyse, on peut encore constater l'existence du courant de dépolarisation i'. Il en est encore de même si l'on remplace une des électrodes par une électrode n'ayant pas encore servi, pourvu qu'on conserve l'autre électrode.

Si, après avoir coupé le courant i, on laisse ouvert le circuit de la cuve électrolytique, les surfaces des électrodes reprennent peu à peu leur état primitif ; les gaz absorbés, dans le cas de l'électrolyse de l'eau, se dégagent et se diffusent dans la masse liquide. Il y a **dépolarisation spontanée** des électrodes; il faut

d'ailleurs des heures pour obtenir ainsi une dépolarisation complète.

Si l'électrode est constituée avec le métal même du sel électrolysé, le dépôt de métal sur cette électrode si elle est prise comme cathode, ou sa dissolution dans l'électrolyte si elle est prise comme anode, ne modifient en rien la nature du contact métal-solution : on réalise ainsi une **électrode impolarisable.** Si, par exemple, on électrolyse une solution de sulfate de cuivre entre deux électrodes de cuivre, la réaction se réduit à un transport de cuivre de l'anode à la cathode ; il n'y a pas d'énergie chimique mise en jeu, ni d'énergie mécanique si les électrodes sont au même niveau, et la f. é. m. de polarisation est nulle : l'expérience vérifie bien ces conclusions. Nous verrons dans le prochain chapitre l'application des électrodes impolarisables à la construction des piles ; on peut également les employer dans la mesure de la résistance des électrolytes.

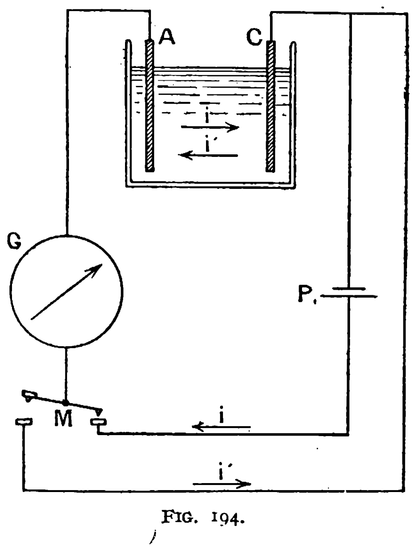


Fig. 194.

170. Électrolyse invisible. — Établissons, entre deux électrodes plongées dans un électrolyte, une différence de potentiel V inférieure à la f. é. m. de polarisation *e*, par exemple une différence de potentiel d'un volt entre deux électrodes de platine placées dans l'eau acidulée : on ne constate aucun dégagement gazeux. Si un galvanomètre G est intercalé dans le circuit (*fig.* 194), on constate qu'il passe un courant au moment de la fermeture, et que ce courant devient rapidement presque nul ; il a pour effet de polariser les électrodes, jusqu'à ce que la f. é. m. de polarisation ait atteint la valeur V. Si l'on supprime la différence de potentiel appliquée, et si l'on décharge les électrodes dans un conducteur extérieur, par exemple en appuyant sur la clef de Morse M du montage représenté schématiquement par la figure 194, le galvanomètre G indique l'existence d'un courant de dépolarisation *i'*, dirigé en sens inverse du courant *i*.

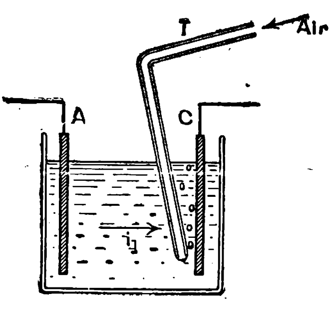


Fig. 195.

En réalité, le courant de polarisation *i* ne cesse jamais complètement : il diminue très rapidement, suivant une loi analogue à celle que représente la courbe de la figure 192, et le galvanomètre G indique l'existence d'un courant permanent d'intensité i_l très faible, mais jamais nulle. L'existence des phénomènes de dépolarisation spontanée exige en effet qu'un courant traverse constamment l'électrolyte, pour maintenir à une valeur constante la f. é. m. de polarisation des électrodes, et empêche cette f. é. m. d'atteindre exactement

la valeur V. L'électrolyse de l'eau acidulée par ce courant permanent amène sur les électrodes une quantité de gaz juste suffisante pour remplacer celle qui disparaît par diffusion, et n'est accompagnée d'aucun dégagement gazeux visible : c'est le phénomène de l'**électrolyse invisible.**

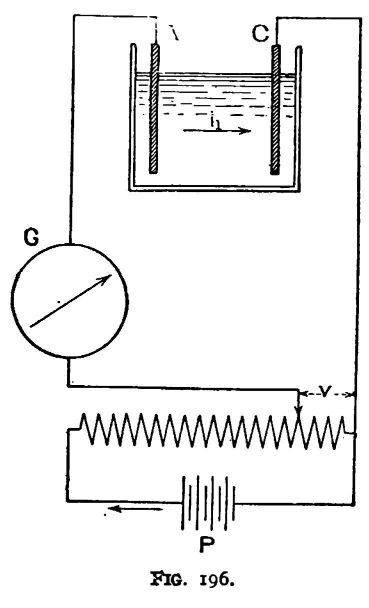


Fig. 196.

Il est presque impossible de représenter ce phénomène par des lois précises, car l'intensité i_l du courant d'électrolyse invisible dépend de toutes les circonstances qui peuvent modifier la dépolarisation spontanée. Si, par exemple, on insuffle de l'air dans la solution au voisinage de la cathode C (*fig.* 195), on facilite l'oxydation de l'hydrogène occlus dans le platine, et par suite la dépolarisation spontanée de la cathode ; on observe immédiatement une augmentation de l'intensité du courant i_l, mesurée par le galvanomètre G.

Si l'on augmente progressivement la différence de potentiel V, ce qui est facile en la prenant sur un potentiomètre (*fig.* 196), on constate que l'intensité i_l augmente constamment. Pour une valeur suffisante de V, on voit apparaître des bulles gazeuses, qui se dégagent sur les électrodes, et on peut ainsi obtenir une valeur de la f. é. m. de polarisation e qui correspond à l'électrolyse visible. Si cette f. é. m. était bien définie, et s'il n'y avait pas de dépolarisation en circuit ouvert, l'intensité i_l serait nulle pour les valeurs de V inférieures à e ; pour les valeurs supérieures, elle serait égale, comme nous l'avons admis au paragraphe précédent, à $\frac{V - e}{r}$; la courbe obtenue en portant V en abscisses et i_l en ordonnées (*fig.* 197) se composerait des deux droites OA et AB. En réalité, la courbe expérimentale est une courbe sans point anguleux, asymptote à la droite AB : la dépolarisation spontanée empêche toujours la f. é. m. de polarisation d'atteindre la valeur e, et la courbe qui représente i_l ne présente aucune particularité pour $V = e$: *Il n'y a pas de discontinuité entre l'électrolyse visible et l'électrolyse invisible.*

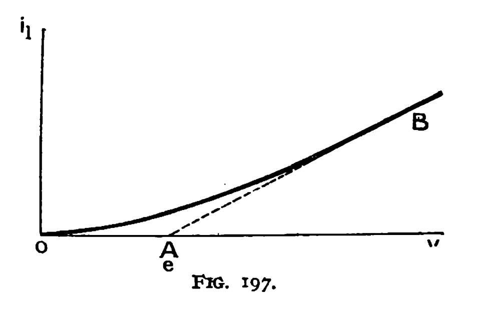
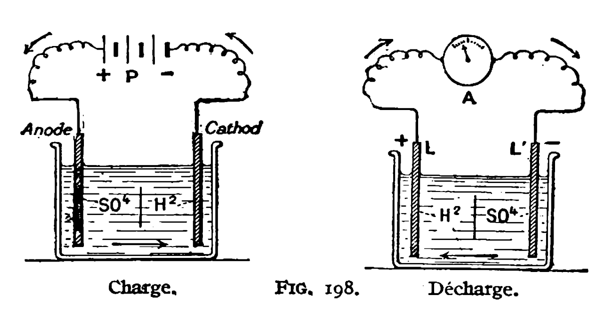


Fig. 197.

171. Accumulateurs. — Si l'on réalise l'électrolyse de l'acide sulfurique étendu entre électrodes de plomb, l'anode s'oxyde profondément, et prend une couleur brun chocolat, caractéristique de la formation d'oxydes de plomb très oxygénés : le phénomène de la polarisation des électrodes se traduit ici par une modification chimique qui porte sur une grande quantité de matière et absorbe pour sa

production une grande quantité d'électricité. Cette quantité d'électricité peut se retrouver dans le courant de dépolarisation, et l'appareil constitue un **accumulateur :** il se comporte comme s'il pouvait emmagasiner de l'électricité et la restituer ensuite (*fig.* 198).

On augmente la capacité en répétant plusieurs fois la charge et la décharge; à chaque fois la transformation atteint des parties plus profondes de l'anode, rendue poreuse par la succession des réactions chimiques qui s'y produisent. On peut continuer la formation en intervertissant le rôle des lames de plomb, de façon que les deux électrodes soient également poreuses et oxydées, et participent toutes deux aux phénomènes de polarisation. C'est par le procédé que nous venons de décrire que les premiers accumulateurs ont été formés (Planté, 1859).



Charge. Fig. 198. Décharge.

Actuellement, on emploie toujours la formation artificielle : les électrodes sont des grilles de plomb, dont on remplit les alvéoles d'oxydes : minium Pb^3O^4 pour l'anode, litharge PbO pour la cathode; l'électrolyte est une solution d'acide sulfurique à 22° Baumé; il suffit d'une seule charge pour former l'accumulateur. Les réactions chimiques qui accompagnent la charge et la décharge sont assez mal connues ; il se produit certainement des composés du plomb autres que ceux qu'on rencontre dans les réactions usuelles. On admet pourtant en général (théorie de la double sulfatation) que les phénomènes principaux correspondent aux réactions suivantes :

DÉCHARGE

Plaque négative.....	$Pb + So^4 = SO^4Pb$
Plaque positive.....	$PbO^2 + H^2 + SO^4H^2 = SO^4Pb + 2H^2O$

CHARGE

Cathode...........	$SO^4Pb + H^2 = SO^4H^2 + Pb$
Anode.............	$SO^4Pb + SO^4 + 2H^2O = 2SO^4H^2 + PbO^2$

Voici quelques indications numériques relatives à l'emploi des accumulateurs.

Pendant la charge, la **f. é. m.** de polarisation de l'accumulateur atteint rapidement 2,1 volts, puis monte lentement de 2,1 à 2,2 volts, et enfin monte rapidement jusqu'à 2,5 volts environ. On est averti que la charge est terminée à la fois par l'élévation de la différence de potentiel aux bornes, et par le dégagement, en un fort bouillonnement, des produits de l'électrolyse (H^2 et O), qui ne sont plus fixés par les électrodes. C'est à ce moment que la solution est la plus concentrée en acide sulfurique ; c'est à ce moment qu'on doit remplir les bacs avec de l'eau distillée pour compenser les pertes par évaporation, et vérifier que la densité du liquide est bien 22° Baumé.

Pendant la décharge, la f. é. m. tombe très vite de 2,5 à 2 volts, puis reste

très longtemps voisine de 2 volts : l'accumulateur constitue alors une source à f. é. m. constante. Vers la fin de la décharge, elle diminue rapidement : on ne doit jamais pousser la décharge au delà de 1,8 volt, et on ne doit pas laisser longtemps une batterie déchargée. Dans l'un et l'autre cas, les plaques se sulfatent : les plaques positives, qui normalement sont rouges, et les plaques négatives, qui normalement sont grises, se recouvrent d'un dépôt blanchâtre de sulfate de plomb SO^4Pb, qu'on ne peut que difficilement faire disparaître par des charges prolongées.

La résistance intérieure des accumulateurs peut presque toujours être considérée comme négligeable, et leur f. é. m. dépend peu de la température : elle varie d'environ 3/10.000 de volt par degré.

Les accumulateurs ordinaires ont une capacité de l'ordre de 11 ampères-heures par kilogramme de plomb. Le courant normal de décharge est celui qui correspond à la décharge totale en 10 heures, soit environ 1 ampère par kilogramme de plomb. La puissance correspondante est 1 ampère $\times$ 2 volts $=$ 2 watts; pour disposer d'un cheval — 736 watts — il faut 368 kilogrammes de plomb. Signalons toutefois qu'on a réalisé, pour les batteries de démarrage des voitures automobiles, des accumulateurs dont la capacité, pour les régimes de décharge lents, peut atteindre 25 ampères-heures par kilogramme de plomb, et qui peuvent supporter, sans détérioration, des régimes de décharge rapides, avec des courants de l'ordre de 40 fois le courant normal.

Le rendement en électricité peut atteindre 90 o/o, c'est-à-dire qu'on peut recueillir à la décharge jusqu'à 90 o/o de la quantité d'électricité employée à la charge; mais, comme la f. é. m. à la décharge est de 2 volts, et qu'il faut pour la charge employer un générateur ayant une f. é. m. d'au moins 2,5 volts, le rendement en énergie atteint rarement 70 o/o.

Les accumulateurs au plomb sont des appareils coûteux, lourds, incommodes et dont l'entretien exige beaucoup de soins. On a essayé de les remplacer par des *accumulateurs alcalins* (Edison), dans lesquels l'électrolyte est une solution de potasse et les électrodes sont des lames de fer et de nickel, ou de cadmium et de nickel, recouvertes d'oxydes de ces mêmes métaux. Les accumulateurs alcalins présentent l'inconvénient que leur f. é. m. reste beaucoup moins constante au cours de la décharge que celle de l'accumulateur au plomb : il en résulte que leur rendement en énergie est notablement inférieur; d'autre part, la valeur moyenne de la f. é. m. n'est que $1^v,25$, au lieu de 2 volts, de sorte que chaque batterie doit comprendre davantage d'éléments, et est plus lourde, plus encombrante et plus coûteuse que la batterie correspondante d'accumulateurs au plomb. Leur avantage est une moins grande fragilité et une plus grande facilité d'entretien ; il est suffisant pour que leur usage ait pris un certain développement, en particulier au point de vue de la traction électrique et de l'éclairage des wagons dans les chemins de fer.

Mais, dans la plupart des cas, c'est toujours aux accumulateurs au plomb que l'on a recours, dans l'industrie, lorsque l'on veut emmagasiner de l'énergie électrique pour parer à des insuffisances momentanées des dynamos génératrices, dans les laboratoires lorsque l'on veut avoir des sources d'électricité capables de débiter des courants sous des différences de potentiel constantes. Ils sont, à ce dernier point de vue, bien supérieurs aux piles, tant à cause de leur faible résistance intérieure que de la possibilité de les recharger.

CHAPITRE XVII

PILES ÉLECTRIQUES

I. — CHAINES DE CONDUCTEURS ENTIÈREMENT MÉTALLIQUES

172. Différence de potentiel de contact et effet Peltier. — Considérons un conducteur formé de deux parties A et B constituées par des métaux différents. Nous avons déjà indiqué (§ 80) qu'il existe entre les deux métaux A et B une différence de potentiel, dite **différence de potentiel de contact :** si le conducteur est en équilibre électrostatique, il existe entre deux points M et N, situés de part et d'autre de la surface de séparation, et infiniment voisins de cette surface (*fig.* 199), une différence de potentiel :

$$V_M - V_N = V.$$

Nous avons déjà utilisé l'hypothèse de l'existence de cette différence de potentiel pour expliquer l'électrisation par frottement (§ 81) et pour interpréter la notion de f. é. m. (§ 155), mais nous n'en avons encore donné aucune justification expérimentale. C'est que la mesure de cette différence de potentiel est extrêmement délicate : nous indiquerons au § 356 comment Millikan a pu la mesurer pour un certain nombre de métaux, et montrer qu'elle est en général de l'ordre de 1 à 2 volts.

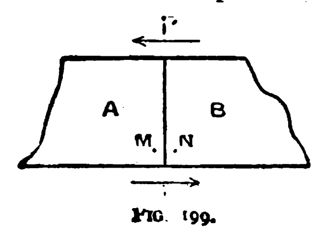


FIG. 199.

D'après la définition même du potentiel, dire qu'entre les deux points M et N existe la différence de potentiel V, c'est dire que, pour faire passer la quantité d'électricité q du point N au point M, il faut fournir un travail $W = Vq$. Comme dans la plupart des transformations physiques, l'échange de travail est accompagné par un échange de chaleur; pour maintenir la soudure à température constante lorsque la quantité d'électricité q passe du métal B au métal A, il faut fournir une quantité de chaleur Q, qui, comme le travail W, est proportionnelle à q : nous poserons $JQ = vq$. Si au contraire une quantité d'électricité it est transportée du métal A au métal B par un courant d'intensité i, il faut, pour maintenir la soudure à température constante, en retirer une quantité de chaleur équivalente à vit : si la soudure est isolée thermiquement, elle s'échauffe.

Ce phénomène porte le nom d'**effet Peltier.** On peut montrer son existence en employant le dispositif représenté par la figure 200 : le conducteur BB′ est une barre de bismuth, les conducteurs AA′ sont deux barres de cuivre. Les soudures sont placées au centre de deux ballons CC′, qui communiquent par un tube horizontal étroit TT′; les masses d'air contenues dans les deux ballons sont séparées par un index liquide I. Lorsqu'on fait passer un courant i dans le sens indiqué par la flèche, l'air du ballon C′ s'échauffe, celui du ballon C se refroidit et l'index I se déplace de droite à gauche. Si l'on renverse le sens du courant i, les phénomènes inverses se produisent, et l'index se déplace en sens inverse.

Dans les expériences de mesure, il faut prendre garde qu'à l'effet Peltier se superpose toujours l'effet Joule. Désignons par r la résistance de la partie

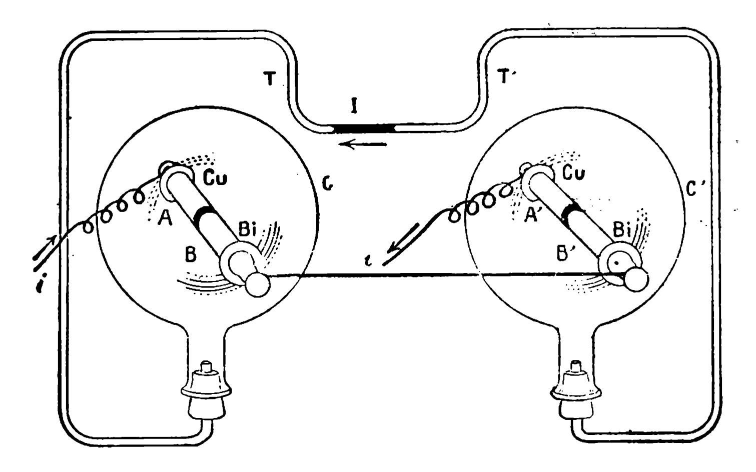


FIG. 200

du circuit qui comprend la soudure et est plongée dans le calorimètre; le passage du courant d'intensité i y produit par seconde un dégagement de chaleur $vi + ri^2$; si l'on renverse le sens du courant, en conservant la même valeur de l'intensité i, l'absorption de chaleur est $vi - ri^2$. Il faut faire la moyenne des deux mesures pour obtenir la valeur de vi, et il est indispensable de se placer dans des conditions telles que le terme ri^2 soit petit devant vi : il faut prendre des conducteurs de faible résistance, c'est-à-dire de grande section.

La quantité v, que nous avons définie comme le rapport de la puissance JQ/t fournie sous forme de chaleur à l'intensité du courant i, est une grandeur de même nature qu'une f. é. m. : nous l'appellerons la **f. é. m. Peltier.** Les mesures réaesées montrent que sa valeur est bien indépendante de l'étendue de la surface de contact et du courant qui le traverse. Tandis que la différence de potentiel de contact V est de l'ordre du volt, la f. é. m. Peltier est, en général, de l'ordre de quelques millivolts : voici quelques nombres donnant, en millivolts, sa valeur à 0° pour quelques couples de métaux; il y a dégagement de

chaleur lorsque le courant passe du métal cité le premier au second métal.

Bismuth/Cuivre	21
Cuivre/Zinc	0,03
Fer/Cuivre	3

On remarquera que l'effet Peltier présente les caractères d'un phénomène réversible : les énergies échangées changent de sens lorsqu'on renverse le sens du courant, et au transport d'une même quantité it d'électricité dans un sens et dans l'autre correspondent un dégagement et une absorption de chaleur $\pm\, vit$ égaux en valeur absolue. En réalité, il s'y superpose toujours le dégagement de chaleur irréversible ri^2t produit par l'effet Joule; mais le rapport de l'énergie calorifique dégagée par le phénomène irréversible à l'énergie mise en jeu par le phénomène réversible, $\frac{ri^2t}{vit} = \frac{ri}{v}$, tend vers o avec l'intensité i du courant. Le phénomène réel est un phénomène irréversible, qui tend vers la réversibilité parfaite lorsque les transformations — ici les mouvements de l'électricité — deviennent extrêmement lentes. On sait que c'est le caractère de tous les phénomènes réels, et qu'on définit en Mécanique et en Thermodynamique un phénomène réversible comme la limite de phénomènes réels dont l'évolution est indéfiniment ralentie; l'effet Joule joue ici le rôle que jouent les frottements en Mécanique.

173. Loi des chaînes métalliques. — Considérons un conducteur formant un circuit fermé, tout entier à la même température, et constitué par deux métaux différents A et B (*fig.* 201). Lorsque ce conducteur est en équi-

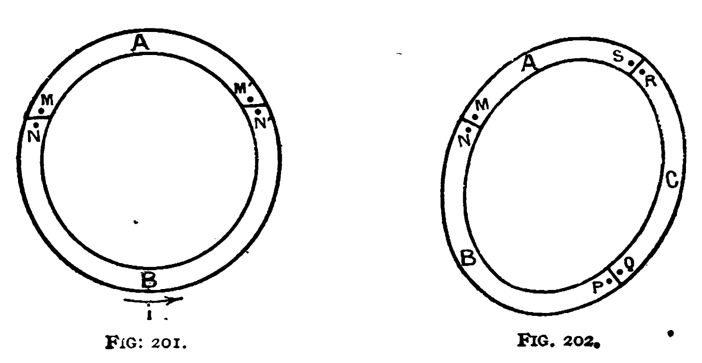


FIG. 201. FIG. 202.

libre électrostatique, tous les points du métal A sont au même potentiel ($V_M = V_M'$), tous les points du métal B sont également au même potentiel ($V_N = V_N'$), mais il existe entre le métal A et le métal B une différence de potentiel V ($V_M - V_N = V_M' - V_N' = V$). Si nous partons du point M pour y revenir après avoir parcouru le circuit, nous avons rencontré successivement les deux différences de potentiel de contact $+ V$ et $- V$, dont la somme est nulle : nous pouvons dire que, dans le circuit bimétallique considéré, maintenu tout entier à la même température, la somme des d. d. p. de contact est nulle.

Considérons maintenant une chaîne de conducteurs formée par un nombre

quelconque de conducteurs métalliques constituant un circuit fermé (*fig.* 202). L'expérience montre qu'un tel circuit n'est parcouru par aucun courant, quels que soient le nombre et la nature des conducteurs, pourvu qu'il soit tout entier maintenu à la même température ; on peut le constater en constatant qu'il ne produit dans son voisinage aucun champ magnétique, et l'expérience peut être très précise, si par exemple l'un des conducteurs du circuit est enroulé de façon à former le cadre d'un galvanomètre sensible.

Prenons comme tout à l'heure des couples de points MN, PQ, RS au voisinage et de part et d'autre de chaque soudure. Entre deux points d'un même couple existe une différence de potentiel de contact, que nous désignerons par une notation telle que A/B ; chacun des conducteurs métalliques homogènes est en équilibre électrostatique, et tous ses points sont au même potentiel. On a :

$$V_M - V_N = A/B, \qquad V_N - V_P = 0,$$
$$V_P - V_Q = B/C, \qquad V_Q - V_R = 0,$$
$$V_R - V_S = C/A, \qquad V_S - V_M = 0.$$

En additionnant membre à membre toutes ces relations, on obtient :

$$A/B + B/C + C/A = 0.$$

Cette relation exprime la **loi des chaînes métalliques,** qui a été énoncée par Volta :

Dans un circuit quelconque, entièrement métallique, et dont tous les points sont à la même température, la somme des d. d. p. de contact est nulle.

C'est cette loi qui permet de ne pas tenir compte des d. d. p. de contact dans l'application à un circuit fermé de la loi d'Ohm ou de la seconde loi de Kirchhoff, $\Sigma e = \Sigma ri$ (cf. § 159) ; on se rendra compte de son importance en remarquant que les circuits employés dans les mesures électriques comprennent, le plus souvent, des galvanomètres dans lesquels le courant est amené par des fils d'argent à un enroulement de fil de cuivre, et des boîtes de résistances dont les bornes sont en laiton et les bobines en fil de manganine. Elle ne s'applique que si tout le circuit est à la même température ; nous verrons tout à l'heure que les différences de température produisent des d. d. p. dont la somme n'est pas nulle ; il faut prendre garde, dans les mesures de précision, d'éviter ces différences de température, et en particulier d'éviter que les conducteurs soient échauffés par le passage du courant.

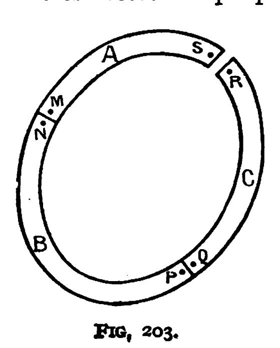


FIG. 203.

Supposons qu'une quantité d'électricité q parcoure le circuit fermé, partant par exemple du point M pour revenir au même point M : le travail $W = q\,\Sigma V$ qu'il a fallu fournir pour franchir toutes les soudures est nul. Mais, l'état final étant identique à l'état initial, la variation d'énergie interne $\Delta U = W + JQ$ est nulle, la quantité de chaleur $JQ = q\Sigma v$ qu'il a fallu fournir est également nulle. Nous pouvons encore dire que :

Dans un circuit quelconque, entièrement métallique, et dont tous les points sont à la même température, la somme des f. é. m. Peltier est nulle.

Supposons la soudure RS supprimée et le circuit ouvert (*fig.* 203) : il est évident que rien n'est changé dans la répartition des potentiels, puisque le circuit était en équilibre électrique. La loi des chaînes métalliques peut être énoncée sous une seconde forme, équivalente à la première :

Lorsque deux métaux A *et* C *sont séparés par un ou plusieurs métaux intermédiaires maintenus tous à la même température, la différence de potentiel entre ces deux métaux est la même que s'ils étaient directement en contact :*

$$A/C = A/B + B/C.$$

De même, *la somme des f. é. m. Peltier qui existent dans une portion d'un circuit métallique maintenue tout entière à la même température ne dépend que de la nature des métaux qui en constituent les extrémités, et est indépendante de la nature des métaux intermédiaires.*

Cette loi permet, par exemple, dans l'observation de l'effet Peltier, de réunir par une soudure, faite avec un alliage fusible quelconque, les deux métaux A et B en expérience : la présence de la soudure entre les deux métaux ne modifie en rien la f. é. m.

174. Force électromotrice de température. — Nous venons de voir qu'il existe une d. d. p. de contact entre deux métaux différents. De même, il existe une d. d. p. de contact entre deux échantillons d'un même métal pris sous des états physiques différents. La différence peut provenir des traitements mécaniques différents auxquels ont été soumis les échantillons; l'écrouissage ou le recuit modifient les d. d. p. de contact. Elle peut également provenir d'une différence de température; deux échantillons d'un même métal à des températures différentes doivent être considérés, au point de vue des d. d. p. de contact, comme des métaux différents.

Considérons une barre métallique homogène AB, dont une extrémité A est maintenue à la température θ_1 et l'autre B à la température θ_2 (*fig.* 204). Lorsque ce conducteur est en équilibre électrostatique, le potentiel n'est pas le même en ses différents points, et le potentiel V_A de l'extrémité A est, par exemple, supérieur d'une quantité V au potentiel V_B de l'extrémité B. Faisons passer dans le conducteur un courant d'intensité i, dirigé de A vers B : on devra recueillir par seconde un travail égal à Vi.

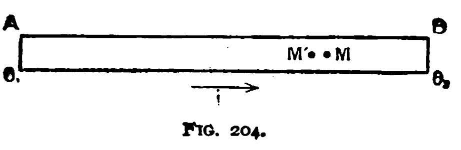


FIG. 204.

Ici encore, l'échange de travail s'accompagne d'un échange de chaleur : on recueillera par seconde une quantité de chaleur proportionnelle à i, dont nous désignerons encore la valeur en unités d'énergie par vi. Renversons le sens du courant : le conducteur devra maintenant absorber de la chaleur. Ce dégagement et cette absorption de chaleur dans un conducteur homogène à température non uniforme parcouru par un courant constituent l'**effet Thomson.** Il est beaucoup plus difficile à mesurer que l'effet Peltier, car le conducteur ne peut pas être placé dans un calorimètre. La barre métallique AB est parcourue par un flux calorifique, allant de la partie chaude à la partie froide, et perd de la chaleur par rayonnement par sa surface : il s'y établit un régime

permanent caractérisé par une certaine valeur de la température en chaque point. Le passage du courant, produisant un nouveau dégagement de chaleur, tant par effet Joule que par effet Thomson, modifie la distribution des températures, et l'effet Thomson se caractérise par le fait que la distribution obtenue dépend du sens du courant. La figure 205 représente schématiquement les courbes de températures qu'on peut obtenir avec le cuivre : la courbe CPD correspond au courant i dirigé dans le sens des températures décroissantes; elle est au-dessus de la courbe CP'D qui correspond au courant — i. La température d'un point M est plus élevée quand le courant est dirigé de A vers B (θ = MP) que lorsqu'il est dirigé de B vers A (θ' = MP'). Comme les causes d'échauffement ou de refroidissement par conductibilité, rayonnement et effet Joule sont les mêmes dans les deux cas, c'est que l'effet Thomson dégage de la chaleur dans le premier cas, et en absorbe dans le second : l'effet est alors dit *positif*.

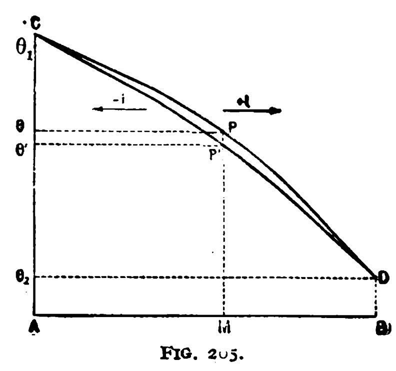


FIG. 205.

Dans le cas d'une barre de fer, on obtient un effet de sens contraire, il y a dégagement de chaleur quand le courant va de l'extrémité froide à l'extrémité chaude, et l'effet est dit *négatif*.

Les quantités v qui correspondent à l'effet Thomson peuvent, comme celles qui correspondent à l'effet Peltier, être considérées comme des f. é. m. : nous les appellerons des f. é. m. de température. L'expérience montre que les différences de température ne produisent aucun courant dans un circuit formé tout entier du même métal, et on peut énoncer la loi suivante :

Dans un circuit constitué par un conducteur métallique homogène dont les différents points sont à des températures différentes, la somme des f. é. m. est nulle.

Il en résulte que *la f. é. m. qui existe entre deux points* A *et* B *d'un tel circuit ne dépend que des températures* θ_1 *et* θ_2 *de ces points, et est indépendante de la distribution des températures dans les parties du conducteur qui les séparent.*

Si nous considérons, dans la partie AB du conducteur, deux points infiniment voisins MM', à des températures θ et $\theta + d\theta$, il existe entre ces deux points une f. é. m. de température qui ne dépend que des quantités θ et $\theta + d\theta$; elle tend vers 0 avec $d\theta$, et peut être représentée par l'expression :

$$e_{MM'} = h d\theta,$$

h étant une fonction de θ. La f. é. m. totale qui existe dans la partie du conducteur compris entre les deux points A et B est alors :

$$e_{BA} = \Sigma e_{MM'} = \int_{\theta_2}^{\theta_1} h d\theta$$

Cette f. é. m. e_{BA} représente la quantité de chaleur qui est dégagée dans le conducteur BA quand l'unité de quantité d'électricité le parcourt de A vers B : la quantité h est positive quand l'effet Thomson est positif; elle représente la

f. é. m. qui existe entre deux points dont la température diffère d'un degré. Elle est, en général, de l'ordre de quelques microvolts par degré : c'est ainsi qu'on admet que sa valeur, à la température ordinaire, en microvolts par degré, est, pour le cuivre + 2,2, pour le fer — 8,4.

175. Couples thermo-électriques. — Nous venons de voir qu'il peut exister dans un circuit métallique des f. é. m. de deux espèces, les f. é. m. Peltier v qui existent au contact de deux métaux différents, et les f. é. m. de température $\int h\, d\theta$ qui existent dans un conducteur homogène dont les différents points sont à des températures différentes. La valeur des f. é. m. Peltier v dépend d'ailleurs de la température des contacts.

Lorsque le circuit ne contient que l'une des deux sortes de f. é. m., la f. é. m. totale est nulle. Dans un circuit formé d'un nombre quelconque de métaux et tout entier à la même température, ou dans un circuit formé tout entier du même métal et dont les différentes parties sont à des températures quelconques, la somme des f. é. m. est nulle. Si le circuit est fermé, il n'est parcouru par aucun courant.

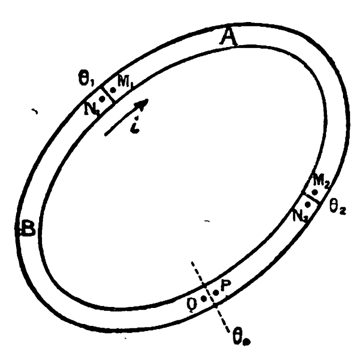


FIG. 206.

Mais si les deux phénomènes coexistent, l'expérience montre que la f. é. m. totale n'est en général pas nulle. Prenons, par exemple, un circuit formé par deux métaux A et B, réunis par deux soudures M_1N_1 et M_2N_2, portées à des températures différentes θ_1 et θ_2 (*fig.* 206) : l'expérience montre que le circuit est parcouru par un courant i. Désignons par v_1 et v_2 les f. é. m. Peltier A/B aux températures θ_1 et θ_2, h et h' les coefficients des f. é. m. de température pour les deux métaux A et B, et calculons les quantités de chaleur dégagées par seconde. Les quantités de chaleur dégagées aux soudures M_2N_2 et M_1N_1 sont $v_2 i$ et $-v_1 i$; celles qui sont dégagées par effet Thomson sont, dans le métal A, $i\int_{\theta_2}^{\theta_1} h d\theta$, et, dans le métal B, $-i\int_{\theta_2}^{\theta_1} h' d\theta$; il y a de plus dégagement par effet Joule de la quantité de chaleur ri^2, en désignant par r la résistance totale du circuit. Comme l'énergie interne du système des deux métaux reste constante, et qu'il n'échange pas de travail avec le milieu extérieur, la somme des quantités de chaleur dégagées est nulle. On a :

$$v_2 i - v_1 i + i\int_{\theta_2}^{\theta_1} h d\theta - i\int_{\theta_2}^{\theta_1} h' d\theta + ri^2 = 0,$$

ou :

$$ri = e, \qquad \text{avec} \qquad e = v_1 - v_2 + \int_{\theta_2}^{\theta_1} (h' - h)\, d\theta.$$

Le système se comporte comme s'il comprenait un générateur de f. é. m. e : il s'appelle un couple thermo-électrique, et e s'appelle la f. é. m thermo-électrique du couple pour les températures θ_1 et θ_2. Cette f. é. m. est toujours petite : c'est ainsi que, pour le couple fer-cuivre (A = Fe, B = Cu), à la température ordinaire, une différence de potentiel d'un degré entre les deux soudures ($\theta_1 = \theta_2 + 1^o$) donne une f. é. m. de + 13 microvolts environ. On remarquera qu'il est nécessaire, pour interpréter les f. é. m. thermo-électriques, de tenir compte à la fois des f. é. m. Peltier et des f. é. m. de température. Dans le cas du couple fer-cuivre, on a $h' = 2{,}2$, $h = -8{,}4$ et $h' - h = +10{,}6$ microvolts (§ 174) ; la f. é. m. de température, dans les conditions indiquées, représente plus des 4/5 de la f. é. m. totale.

Nous savons que la f. é. m. qui existe dans une portion du circuit maintenue tout entière à la même température ne dépend que de la nature des conducteurs qui en constituent les extrémités (§ 173). Cette conséquence de la loi des chaînes métalliques porte ici le nom de **loi des métaux intermédiaires** et s'énonce généralement de la façon suivante :

La f. é. m. d'un couple thermo-électrique n'est pas modifiée, si l'on intercale dans le circuit un ou plusieurs métaux intermédiaires, pourvu que la partie du circuit ainsi constituée soit maintenue à une même température.

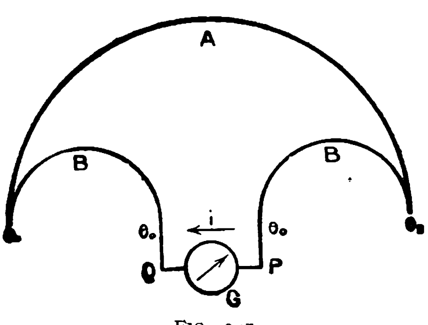


FIG. 207.

Il résulte en particulier de cette loi que la substance employée comme soudure pour réunir les deux métaux et assurer leur contact électrique n'a aucune influence sur la valeur de la f. é. m. thermo-électrique.

Il en résulte aussi qu'on peut fermer le circuit entre les points P et Q en y intercalant un galvanomètre G (*fig.* 207) ; pourvu que la température θ_0 de la portion du circuit ainsi constituée soit uniforme, la f. é. m. totale conserve la valeur e, et l'intensité du courant qui parcourt le circuit est $i = e/r$; ce courant doit être compté positivement quand il va de P à Q à travers le galvanomètre, donc de B à A à travers la soudure chaude θ_1. La mesure de l'intensité i donne la valeur de la f. é. m. e, si l'on connaît la résistance totale r. La mesure des variations de l'intensité i quand on fait varier la température d'une des soudures donne immédiatement les variations en valeur relative de la f. é. m. e, à condition que la résistance r reste constante. Il n'en est jamais rigoureusement ainsi, à cause de la variation de résistance de la partie du circuit soumise à des variations de température ; mais cette variation peut être négligée vis-à-vis de la résistance totale si la résistance du galvanomètre, dont la température reste constante, est assez grande.

Désignons maintenant par r la résistance du couple proprement dit, et par ρ celle du galvanomètre. On a :

$$e = (r + \rho)\, i, \qquad V_P - V_Q = \rho i = e - ri.$$

Si la résistance ρ devient très grande, on a $i = 0$ et $V_P - V_Q = e$. *Dans un*

couple thermo-électrique en circuit ouvert, comme dans tout autre générateur, *la différence de potentiel entre les bornes est égale à la force électromotrice, à la condition que les deux bornes soient formées du même métal et soient à la même température.* Il en résulte que la f. é. m. peut, comme celle d'une pile quelconque, être mesurée par la méthode d'opposition : la seule précaution à prendre est que les extrémités PQ du couple, ainsi que toutes les résistances du potentiomètre de mesure, restent exactement à la même température θ_0.

L'identité entre la d. d. p. aux bornes et la f. é. m. exprime que la somme des f. é. m. Peltier et des f. é. m. de température est égale à la somme des d. d. p. de contact correspondantes; mais cette égalité, valable pour l'ensemble du couple, ne l'est pas pour chacune des f. é. m. Elle tient à ce qu'une quantité d'électricité q qui passe de Q en P se retrouve finalement dans le même métal, à la même température, de sorte que toute l'énergie eq qui lui a été fournie sous forme d'énergie calorifique se retrouve dans l'augmentation $(V_P\text{-}V_Q)q$ de l'énergie électrique; il en est pas de même lorsque l'électricité passe d'un métal à un autre métal, d'une température à une autre température : l'état final n'étant pas identique à l'état initial, il y a une variation, que nous ne savons pas calculer, de l'énergie interne.

176. Variation de la f. é. m. avec la température : applications. — La f. é. m. e dépend des températures θ_1 et θ_2. Si nous appliquons la formule qui donne sa valeur successivement à trois couples de températures, θ_1 θ_2, $\theta_1\theta_0$ et $\theta_2\theta_0$, nous obtenons pour les trois f. é. m. e, e_1 et e_2 les valeurs :

$$e = v_1 - v_2 + \int_{\theta_2}^{\theta_1} (h' - h)\, d\theta,$$

$$e_1 = v_1 - v_0 + \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h' - h)\, d\theta,$$

$$e_2 = v_2 - v_0 + \int_{\theta_0}^{\theta_2} (h' - h)\, d\theta,$$

qui sont liées par la relation :

$$e = e_1 - e_2.$$

FIG. 208.

Cette relation exprime ce qu'on appelle la **loi des températures successives :**

La f. é. m. thermo-électrique d'un couple donné entre deux températures θ_2 *et* θ_1 *est égale à la différence des f. é. m. du même couple entre les températures* θ_0 *et* θ_1 *d'une part,* θ_0 *et* θ_2 *d'autre part.*

Il nous suffira, pour étudier complètement les variations avec la température de la f. é. m. d'un couple, d'étudier ses variations quand une soudure est maintenue à une température fixe arbitraire θ_0 et l'autre portée à une température variable θ.

Lorsqu'on fait croître la température θ à partir de la valeur θ_0, la f. é. m. e part de la valeur zéro; il peut arriver qu'elle croisse constamment lorsque la

température croît; mais, le plus souvent, elle atteint un maximum pour une certaine valeur θ_m de la température, puis décroît. La courbe représentative de cette variation (*fig.* 208) présente un axe de symétrie vertical, et peut être, en général, assimilée à une parabole.

Lorsque la température atteint une valeur θ_i, symétrique de θ_0 par rapport à θ_m, la f. é. m. s'annule, puis change de sens. Ce phénomène est le phénomène de l'**inversion.** Il **est** particulièrement facile à constater avec le couple fer-cuivre : si l'on maintient une soudure à la température ordinaire, et si l'on chauffe l'autre dans la flamme d'un bec Bunsen, le courant va d'abord du cuivre au fer à travers la soudure chaude, et il change de sens lorsque la soudure chaude atteint une température d'environ 500° centigrades.

La courbe représentative de la figure 208 peut servir à déterminer la f. é. m. du couple entre deux températures θ_1 et θ_2 quelconques. Il suffit de prendre sur la courbe les deux points M_1 et M_2 correspondants : la f. é. m. cherchée est la différence N_2N_1 de leurs ordonnées. Inversement, si l'une des soudures est maintenue à une température connue θ_2, et si l'on porte l'autre à une température inconnue θ_1, la mesure de la f. é. m. permettra de déterminer la valeur de cette température.

La mesure des températures constitue la principale application des couples thermo-électriques. Parmi les couples les plus employés dans les laboratoires, on peut citer le couple fer/constantan (alliage contenant 60 o/o de cuivre et 40 o/o de nickel). Le courant va du constantan au fer à travers la soudure chaude, et la f. é. m., lorsque les soudures sont aux températures 0° et $\theta°$, a pour valeur en microvolts :

$$e = 52{,}94\,\theta + 0{,}0204\,\theta^2 \qquad (0 < \theta < 100°).$$

Elle varie de plus de 50 microvolts par degré pour $\theta = 20°$; en employant un galvanomètre très sensible, on arrive à déceler une élévation de température d'un millionième de degré. On peut, en particulier, employer de tels couples à des mesures d'énergie rayonnante.

Dans l'industrie, les couples thermo-électriques sont utilisés pour la mesure de la température des fours : jusqu'à 1.100° on emploie le plus souvent des couples faits d'un alliage nickel-chrome et d'un alliage nickel-aluminium, qui donnent des f. é. m. à variation presque linéaire, de l'ordre de 40 microvolts par degré. On peut atteindre 1.500 ou 1.600° en employant le couple platine/platine rhodié, dont on représente la f. é. m. lorsque la soudure chaude est à une température $\theta°$ par une formule parabolique $e = a + b\theta + c\theta^2$, les constantes a, b, c, étant fournies pour chaque couple par les températures de solidification de l'antimoine, de l'argent et de l'or. Pour un alliage à 10 o/o de rhodium, la f. é. m. croît par degré de 6,4 microvolt entre 0° et 100°, et presque du double entre 1.500 et 1.600°.

Les f. é. m. thermo-électriques varient beaucoup avec la composition des aliages et les impuretés contenues dans les métaux. Les nombres donnés ne peuvent qu'indiquer les ordres de grandeur, et un couple thermo-électrique destiné à la mesure des températures devra toujours être étalonné. Dans la pratique industrielle, un couple est généralement associé à un galvanomètre spécial, dont l'aiguille se déplace sur un cadran divisé donnant directement la température (§ 256).

II. — *CHAINES DE CONDUCTEURS CONTENANT DES ÉLECTROLYTES*

177. Pile de Volta. — En même temps qu'il découvrait la loi des chaînes métalliques, Volta constatait qu'elle n'était plus applicable lorsqu'on intercalait dans le circuit un conducteur électrolytique, et construisait, en 1795, la première pile électrique. On constitue une pile de Volta en plongeant dans une cuve contenant de l'acide sulfurique étendu une lame de cuivre L′ et une lame de zinc L (*fig.* 209); les deux pôles A et B de la pile sont formés par deux fils d'un même métal M. L'expérience montre, si le circuit n'est pas fermé, qu'il existe entre les deux points A et B une différence de potentiel, facilement mesurable à l'aide d'un électromètre ; le pôle A relié au cuivre est le pôle positif, et son potentiel est supérieur à celui du pôle négatif d'environ 0,9 volt. En reprenant la notation du paragraphe 173, et désignant par L le liquide, cette différence de potentiel est :

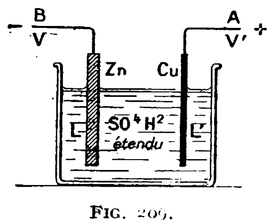


FIG. 209.

$$V' - V = e = M/Cu + Cu/L + L/Zn + Zn/M.$$

Mais, d'après la loi des chaînes métalliques, on a :

$$M/Cu + Cu/Zn + Zn/M = 0.$$

On a donc :

$$e = Cu/L + L/Zn + Zn/Cu.$$

Le métal M ne joue aucun rôle.

Supposons maintenant que nous réunissions les deux pôles PN de la pile par un conducteur métallique (*fig.* 210). Nous constituons un circuit, dans lequel existe une f. é. m. e égale à la différence de potentiel qui existait entre les bornes de la pile en circuit ouvert, et qui est parcouru par un courant. Il va, dans le conducteur métallique PAN, du pôle positif P au pôle négatif N, et à l'intérieur de l'électrolyte, du zinc au cuivre. Son passage à travers l'acide sulfurique s'accompagne des phénomènes habituels de l'électrolyse : il y a dégagement d'hydrogène sur le cuivre, qui fonctionne comme cathode, et dissolution du zinc, qui fonctionne comme anode, et se combine aux radicaux SO^4 fournis par la décharge des ions SO^{4--}.

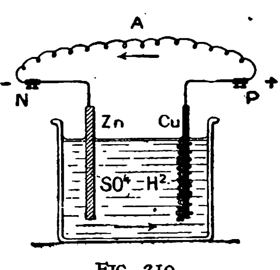


FIG. 210.

Si l'on considère l'ensemble de la pile, les transformations chimiques qui s'y produisent sont représentées par la réaction :

$$SO^4H^2 + Zn = SO^4Zn + H^2 \nearrow.$$

Si la lame négative de la pile était constituée par du zinc du commerce, cette réaction se produirait spontanément, même lorsque le circuit est ouvert.

En réalité, les métaux étrangers, tels que le plomb, qui constituent les impuretés du zinc, forment avec lui et l'électrolyte des piles électriques, dont les circuits sont fermés, puisque les parcelles de plomb sont enrobées dans le zinc ; c'est l'électrolyse qui se produit dans ces piles minuscules qui décompose l'acide sulfurique, et provoque, sur les parcelles de plomb, un dégagement d'hydrogène. On a là un exemple du rôle important que jouent les phénomènes électriques et les différences de potentiel de contact dans la plupart des réactions chimiques. En ce qui concerne la pile de Volta, on voit la nécessité de constituer la lame négative par du zinc pur, qu'on peut d'ailleurs remplacer par du zinc amalgamé. Dans ces conditions, la lame négative n'est pas attaquée par l'acide lorsque le circuit est ouvert, et la réaction de substitution du zinc à l'hydrogène dans l'acide sulfurique peut être considérée comme déterminée par le passage du courant.

On comprend pourquoi les f. é. m. des piles à électrolyte sont beaucoup plus grandes que les f. é. m. des couples thermo-électriques. Ces dernières représentent l'énergie électrique créée, au passage de l'unité de quantité d'électricité, par la transformation de l'énergie calorifique fournie par le milieu par effet Peltier et effet Thomson. L'énergie électrique créée par les premières provient, non seulement de ces phénomènes calorifiques, mais encore de l'énergie chimique libérée par la réaction (cf. § 181). Comme dans les couples thermo-électriques, les calculs d'énergie sont faciles pour l'ensemble de la pile, mais il n'est guère possible de les faire séparément pour chaque contact : il est impossible de déterminer, ou de calculer sans nouvelle hypothèse, la quantité d'énergie libérée lorsque l'électricité portée par un ion passe dans une électrode, l'ion étant ramené à l'état d'atome ou de radical neutre.

On remarquera que les transformations qui s'effectuent dans la pile de Volta sont irréversibles : si, à l'aide d'un générateur de f. é. m. suffisante, on force le courant à traverser la pile en sens inverse, du cuivre au zinc, il y a dégagement d'hydrogène sur le zinc et attaque de l'électrode de cuivre. La réaction :

$$SO^4H^2 + Cu = SO^4Cu + H^2$$

n'est pas la réaction inverse de celle qui accompagne le passage du courant produit par la pile.

178. Polarisation des électrodes : piles à dépolarisant. — L'électrolyse qui se produit dans la pile de Volta s'accompagne, comme d'habitude, du phénomène de polarisation des électrodes (§ 169) : il se développe, à la surface des électrodes, et par le fait même du passage du courant électrique, des f. é. m. de polarisation, qui s'opposent à la f. é. m. de la pile, et diminuent sa valeur apparente. Cette **polarisation de la pile** est extrêmement facile à constater : il suffit d'intercaler un ampèremètre dans le conducteur PN qui ferme son circuit, et on constate que l'intensité du courant diminue progressivement, jusqu'à arriver à une valeur à peu près nulle. Si on ouvre alors le circuit de la pile, et qu'on réunisse ses deux bornes à un électromètre à quadrants, on constate que leur différence de potentiel est à peu près nulle ; si on laisse la pile en circuit ouvert, le phénomène de la dépolarisation spontanée se produit, et on constate que la différence de potentiel remonte peu à peu jusqu'à reprendre sa valeur primitive, au bout d'une heure par exemple.

La facilité avec laquelle la pile de Volta se polarise la rend à peu près inutilisable comme source d'électricité. La modification de la f. é. m. est due principalement à la modification de la surface de la lame positive, qui se recouvre d'hydrogène. On réduira beaucoup la polarisation en entourant la lame positive d'un oxydant, qui fait disparaître cet hydrogène au fur et à mesure de sa formation : c'est le principe des **piles à dépolarisant,** et l'expérience du paragraphe 170 (*fig.* 195) nous fournit une image du rôle de l'oxydant.

Nous ne décrirons pas les nombreux types de piles à dépolarisant qui ont été imaginés, à l'époque où les piles étaient les seuls générateurs d'électricité connus. La seule qui soit encore employée est la pile Leclanché.

Dans la pile Leclanché, le dépolarisant est du bioxyde de manganèse, aggloméré autour de l'électrode positive, constituée par un cylindre de charbon. L'électrode négative est un bâton de zinc, et l'électrolyte une solution de chlorure d'ammonium (sel ammoniac). La f. é. m. est voisine de 1,5 volt. Lors du passage du courant, le chlore se porte sur le zinc, et forme du chlorure de zinc, qui se dissout; l'ion NH^4 se porte à la cathode, et y donne de l'ammoniaque NH^3, qui se dissout, et de l'hydrogène, qui est brûlé par le bioxyde de manganèse. Comme le dépolarisant est solide, il n'agit qu'assez lentement, et la polarisation n'est que partiellement évitée quand la pile débite; mais elle se dépolarise très vite quand le circuit est ouvert. La pile Leclanché est encore couramment employée lorsqu'on n'a besoin que d'un service intermittent, pour les sonneries électriques par exemple; elle est utilisée également, en immobilisant le liquide par une substance gélatineuse, comme pile transportable.

Un perfectionnement notable de la pile Leclanché est constitué par la pile Féry, dans laquelle une disposition judicieuse des électrodes et l'emploi pour l'électrode positive de charbon poreux permettent de supprimer le bioxyde de manganèse et d'obtenir une dépolarisation efficace par la seule action de l'oxygène de l'air.

On remarquera que les piles à dépolarisant, comme la pile de Volta, sont des piles irréversibles.

179. Piles impolarisables. — Nous avons vu (§ 169) qu'on peut constituer une électrode impolarisable en plongeant un métal dans une solution d'un de ses sels. Une pile comprenant deux telles électrodes sera une **pile impolarisable.** Il est évidemment nécesssaire, pour qu'on ait une f. é. m., que la chaîne de conducteurs présente une dissymétrie : si l'on plonge deux lames de cuivre dans une même solution de sulfate de cuivre, elles présentent, par rapport à la solution, la même différence de potentiel de contact, et la f. é. m. totale $Cu/L + L/Cu$ est nulle.

On peut réaliser la dissymétrie en s'arrangeant de façon que la concentration de la solution ne soit pas la même au contact des deux électrodes, et on obtient effectivement une différence de potentiel entre les deux électrodes. De telles piles sont des **piles de concentration ;** leur f. é. m. est faible : c'est ainsi que, pour une pile constituée par la chaîne de conducteurs Ag — NO^3Ag à 1,7 0/0 — NO^3Ag à 0,17 0/0 — Ag, on a trouvé une f. é. m. de $0^v,057$. Aussi leur intérêt est-il purement théorique.

On obtient des piles impolarisables susceptibles d'applications en prenant deux électrodes de métaux différents, plongées chacune dans une solution

d'un de leurs sels. On peut prendre comme type de ces piles la **pile Daniell,** constituée par la chaîne conductrice :

$$Cu — \text{solution de } SO^4Cu — \text{solution de } SO^4Zn — Zn.$$

Le mélange des deux solutions est évité par des procédés qui varient d'un modèle à l'autre, soit qu'elles soient séparées par un vase poreux, soit qu'elles soient simplement superposées, la solution de sulfate de cuivre, plus concentrée et plus dense, étant au fond (pile Callaud, encore employée en télégraphie). Le pôle positif est constitué par le cuivre, et, dans le fonctionnement, le courant va, à l'intérieur de la pile, du zinc au cuivre. L'électrolyse amène sur le zinc des ions SO^{4--}, qui le dissolvent, et sur le cuivre des ions Cu^{++}, qui s'y déposent. Les natures des deux surfaces ne sont pas modifiées, il y a simplement augmentation de la concentration de la solution de sulfate de zinc, et diminution de la concentration de la solution de sulfate de cuivre. Ces variations de concentration sont trop lentes pour produire des modifications appréciables de la f. é. m. ; on maintient d'ailleurs généralement saturée la solution de sulfate de cuivre, en la mettant au contact de cristaux de ce sel. La valeur de la f. é. m. dépend de la concentration de la solution de sulfate de zinc et du degré de pureté des métaux et des sels ; elle est voisine de 1, 1 volt, et reste remarquablement constante lorsque la pile débite des courants de l'ordre du centième d'ampère.

Une pile comme la pile Daniell peut être considérée comme réversible, à condition bien entendu que les courants restent assez peu intenses pour que l'on puisse négliger l'effet Joule. Si l'on force le courant à passer dans la pile du cuivre au zinc, les phénomènes d'électrolyse se réduisent à un dépôt de zinc et à une dissolution du cuivre, avec appauvrissement de la solution de sulfate de zinc et enrichissement de la solution de sulfate de cuivre : ce sont exactement les réactions inverses de celles qui se produisent dans le fonctionnement normal.

180. Étalon de force électromotrice. — Lorsqu'on constitue une pile à deux liquides avec des produits bien purs, dans des conditions bien définies de température et de concentrations, on peut obtenir une f. é. m. définie avec une précision qui dépasse certainement le dix-millième : une telle pile peut être considérée comme un véritable étalon de force électromotrice. Un certain nombre de **piles-étalons** ont été ainsi construites ; la Conférence Internationale des unités électriques de 1908 a recommandé l'emploi de l'**élément Weston,** dont la f. é. m. varie très peu avec la température.

La chaîne conductrice de l'élément Weston, construit suivant les indications de la Conférence de 1908, est :

$$\text{mercure} — \text{solution saturée de } SO^4Hg^2 — \text{solution de } SO^4Cd — \text{amalgame de cadmium à } 12,5\ 0/0.$$

La forme recommandée est celle d'un tube en H, et la pile est disposée comme l'indique la figure 211, les deux pôles étant constitués par des fils de platine soudés dans le verre.

Le pôle négatif est du côté du cadmium ; le courant dans la pile va de

l'amalgame au mercure et dépose, sur cette dernière électrode, le métal du sulfate mercureux. La solution de ce sulfate est maintenue saturée par la dissolution du sel solide placé au-dessus du mercure ; mais, comme il est peu soluble et que sa dissolution est très lente, la pile se polariserait si on lui demandait beaucoup de courant : la pile-étalon ne doit jamais débiter.

On l'emploie pour mesurer des f. é. m. ou des différences de potentiel par la méthode d'opposition ; comme sa f. é. m. est connue en valeur absolue, elle fournit des mesures absolues, qui ont une valeur légale. En effet, quoique le volt soit défini légalement comme une unité secondaire, à partir des deux unités principales, ampère et ohm, le décret du 26 juillet 1919 indique que le volt international est pratiquement égal à $\frac{1}{1,0183}$ de la **f. é. m. de l'élément Weston à la température de 20°.**

La Conférence de 1908 a d'autre part ajouté que la f. é. m. de cet élément, à la température de θ degrés, pouvait être prise égale, en volts internationaux, à :

$$1,01830 - 0,0000406\,(\theta - 20) - 0,00000095\,(\theta - 20)^2 + 0,00000001\,(\theta - 20)^3.$$

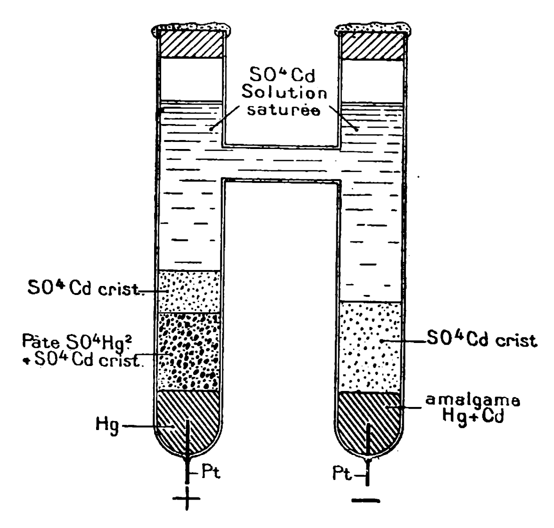


FIG. 211.

Il semble résulter des travaux faits depuis 1908 dans les divers laboratoires de métrologie que divers éléments Weston donnent bien la même f. é. m. à 1/100.000 près, à condition qu'ils soient construits avec des produits soigneusement purifiés, et que leur f. é. m. reste constante avec cette même précision pendant plusieurs années. La f. é. m. à 20° est égale à 1.01830 volts internationaux avec une erreur qui ne dépasse pas 2/100.000 (cf. § 273 *bis*).

181. Énergie chimique et énergie électrique. — Lorsqu'une pile de f. é. m. e est traversée par une quantité d'électricité q, elle fournit une énergie électrique eq.

Le système qui constitue la pile a subi, pendant le passage du courant, une transformation chimique à température constante, qui a diminué son énergie interne d'une certaine quantité U. Il s'est produit en même temps, entre la pile et le milieu extérieur, des échanges de chaleur autres que l'effet Joule, correspondant à l'effet Peltier présenté par les conducteurs. Si Q désigne la chaleur ainsi fournie par la pile au milieu extérieur, on a, d'après le principe de l'équivalence :

$$U = eq + JQ.$$

Si le circuit de la pile est fermé sur une résistance, l'énergie électrique eq est entièrement transformée en chaleur par effet Joule; mais s'il est fermé sur un récepteur, tel qu'une magnéto Gramme, une partie de cette énergie peut être recueillie sous forme de travail mécanique. Si la force contre-électromotrice du récepteur devient presque égale à la f. é. m. de la pile, le courant devient très faible, l'effet Joule devient négligeable (§§ 157 et 158), et l'on peut transformer en travail toute l'énergie eq. Dans le cas des piles thermo-électriques, la variation d'énergie interne U est nulle, et le travail eq est équivalent à l'énergie calorifique — JQ absorbée par la pile (§ 175). Dans le cas d'une pile à électrolyte, il représente, si la pile fonctionne à température constante et si la réaction qui s'y effectue est réversible, la diminution d'énergie utilisable A qui correspond à la transformation pour laquelle la diminution totale d'énergie est U. On sait que les valeurs de U et A correspondant à des transformations dans lesquelles les états initiaux d'une part, les états finaux d'autre part, ne diffèrent que par leur température, c'est-à-dire pour lesquelles q a la même valeur, sont des fonctions de la température absolue T liées entre elles par le théorème d'Helmholtz :

$$U = A - T\frac{dA}{dT}.$$

On a, en remplaçant A par sa valeur eq :

$$U = eq - T\frac{de}{dT}q, \qquad Q = -\frac{T}{J}\frac{de}{dT}q.$$

L'application des deux principes de la Thermodynamique fournit ainsi des relations entre les diverses énergies mises en jeu. En général, la pile absorbe de la chaleur au cours de son fonctionnement ($Q < 0$): sa f. é. m. croît quand la température croît $\left(\frac{de}{dT} > 0\right)$ et l'énergie électrique qu'elle fournit est plus grande que l'énergie chimique qui y disparaît.

La relation entre U, e et $\frac{de}{dT}$ est susceptible d'une vérification expérimentale : il est facile de mesurer e et $\frac{de}{dT}$, et les tableaux de la Thermochimie donnent la variation d'énergie chimique U correspondant à une valence-gramme, c'est-à-dire au passage d'une quantité d'électricité q égale à 96.490 coulombs. La vérification est souvent très bonne : c'est ainsi que, pour la pile Daniell, on trouve $\frac{U}{q} + T\frac{de}{dT} = 1{,}099$, ce qui est exactement la valeur expérimentale de e pour les solutions concentrées.

Mais il ne faut pas oublier que la relation d'Helmholtz, comme toutes les formules déduites du second principe de la Thermodynamique, ne s'applique qu'aux transformations réversibles, et que les réactions qui s'effectuent dans la plupart des piles ne sont pas réversibles.

QUATRIÈME PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE XVIII

CHAMP MAGNÉTIQUE DES COURANTS

I. — *CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN CIRCUIT FERMÉ*

182. Généralités. — Nous avons déjà indiqué, dès le début de l'étude des courants (§ 131), quelles sont les lois fondamentales de l'électromagnétisme : elles se résument dans le fait qu'on peut remplacer les courants par des feuillets pour le calcul de toutes les actions électromagnétiques.

Nous n'avons rien de plus à dire que ce qui est contenu dans les énoncés du paragraphe 131, nous allons simplement donner quelques exemples de leur application, et les traduire par différents types de relations mathématiques. Nous les mettrons d'abord sous la forme suivante :

Les vecteurs champ magnétique et induction magnétique créés en un point quelconque de l'espace par un circuit fermé parcouru par un courant électrique sont respectivement égaux aux vecteurs champ magnétique et induction magnétique créés, en ce même point, par un feuillet magnétique ayant même contour et même sens que le courant, et dont la puissance est proportionnelle à l'intensité du courant.

Nous avons réuni dans cet énoncé les deux lois fondamentales que nous avions distinguées au paragraphe 131 : la première était que le champ créé en un point est proportionnel à l'intensité, définie électrostatiquement, du courant; la seconde était que la répartition du champ dans l'espace — la forme des lignes de force — est la même pour le courant et pour le feuillet de même contour.

Notre énoncé compare le sens du courant et le sens du feuillet : il suppose donc qu'on a fait correspondre au sens de l'aimantation du feuillet un sens de parcours sur son contour : c'est ce qui a été fait au paragraphe 118, et la loi n'est valable qu'avec la correspondance précisée dans ce paragraphe. Elle peut être représentée par la règle d'Ampère : la face positive du feuillet est située à la gauche d'un observateur, couché sur le circuit de façon que le courant lui entre par les pieds et lui sorte par la tête, et regardant la surface du

feuillet — ou encore par la règle de Maxwell : la direction du vecteur aimantation du feuillet est la direction dans laquelle progresse un tire-bouchon qu'on tourne dans le sens du courant (§ 93).

Les lois fondamentales du paragraphe 131 ont été énoncées en parlant des forces exercées sur un aimant par un courant ou par un feuillet ; ces forces mesurent les champs magnétiques qui existent, dans l'un ou l'autre cas, aux points où est placé l'aimant. Il ne peut être placé qu'en dehors de la portion de l'espace qui est déjà remplie par la matière aimantée qui constitue le feuillet, et par conséquent en des points où les vecteurs champ magnétique et induction magnétique créés, soit par le courant, soit par le feuillet, sont liés par la même relation, $B = \mu_0 H$. On peut donc introduire dans l'énoncé, comme nous l'avons fait ici, l'induction magnétique au lieu du champ, et s'affranchir ainsi de toutes les difficultés qui résultent des discontinuités du champ magnétique créé par le feuillet sur les surfaces qui le limitent : l'emploi du vecteur induction, dont la valeur en un point est complètement indépendante de la position de la surface du feuillet (§ 122), permet de faire le calcul simultanément pour tous les points de l'espace, et de ne pas s'occuper de la position de cette surface.

Le coefficient de proportionnalité entre les nombres i et U qui mesurent l'intensité du courant et la puissance du feuillet équivalent dépend des unités choisies. Nous supposerons dans ce chapitre (sauf à la fin du paragraphe 189) que les unités ont été choisies de façon à satisfaire à la relation de coordination $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$, de façon que l'on ait (§ 133) :

$$\mu_0 i = U.$$

Les formules obtenues pourront être appliquées dans l'un des deux systèmes électromagnétique C. G. S. ($\mu_0 = 1$) ou électrostatique C. G. S. ($\mu_0 = 1/c^2$) ; elles pourront aussi être appliquées dans le système pratique (§ 134) en mesurant les courants en ampères, les longueurs en mètres et les champs magnétiques en millioersteds et en prenant $\mu_0 = 10^{-7}$.

Nous connaissons (§§ 122 à 124) les formules générales applicables au calcul du vecteur induction créé par un feuillet magnétique. Nous allons, dans les paragraphes suivants, les appliquer à des circuits de forme particulièrement simple. Les formes de circuit que nous étudierons sont celles qui sont couramment employées dans les appareils de mesures électriques, et le fait que les mesures effectuées à l'aide de ces appareils ne conduisent pas à des contradictions est une vérification extrêmement précise des formules utilisées. Certaines des relations que nous allons établir ont d'ailleurs été découvertes expérimentalement, par des mesures de champ magnétique par la méthode des oscillations et c'est pour représenter les résultats expérimentaux fournis jusqu'alors par l'étude des courants qu'Ampère a créé, en 1825, la notion de feuillet magnétique.

183. Champ créé en un point de son axe par un courant circulaire. — Nous avons vu que le vecteur induction magnétique créé par un feuillet de puissance U dérive d'un potentiel non uniforme (§§ 123 et 127), susceptible de l'une des déterminations :

$$V_B = U\Omega + 4\pi k U,$$

Ω étant l'angle solide sous lequel on voit, du point où on calcule le potentiel, la face négative du feuillet, et k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. En remplaçant dans cette relation U par $\mu_0 i$, nous obtenons le potentiel d'où dérive l'induction magnétique B créée par le courant i équivalent au feuillet U; en divisant par μ_0 nous obtenons le potentiel V d'où dérive le champ magnétique $H = B/\mu_0$. Donc :

Le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant d'intensité i dérive d'un potentiel non uniforme, susceptible de l'une des déterminations :

$$V = \frac{V_B}{\mu_0} = i\Omega + 4\pi k i.$$

Les lignes de force L du champ magnétique du courant sont identiques aux lignes d'induction du champ du feuillet. *Ce sont* (§ 122) *des courbes fermées, embrassant le circuit* C *parcouru par le courant; elles traversent une surface limitée par ce circuit de droite à gauche, pour un observateur placé sur le circuit dans le sens du courant et regardant cette surface.*

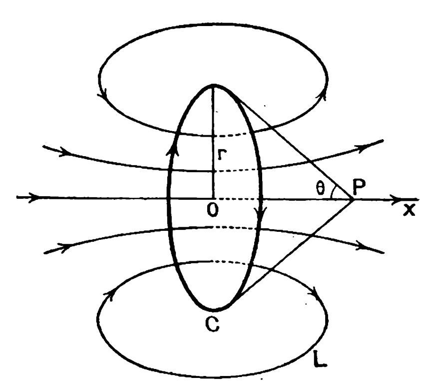


FIG. 212.

Considérons en particulier (*fig.* 212) un circuit C ayant la forme d'une circonférence de centre O et de rayon r. L'une des lignes de force est constituée, par raison de symétrie, par l'axe Ox de cette circonférence. Prenons un point P sur cet axe, à une distance OP $= x$ du centre de la circonférence, et soit θ le demi-angle au sommet du cône de révolution ayant le point P pour sommet et le contour C pour base. Son angle solide est, d'après la formule donnant l'aire de la calotte sphérique qu'il découpe sur la sphère de rayon 1 :

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta), \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{r}{x}.$$

L'une des déterminations du potentiel V a pour valeur absolue :

$$V = i\Omega = 2\pi i\left[1 - x(x^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Le champ magnétique en P est dirigé suivant Ox, dans le sens qui a été précisé plus haut, et a pour valeur absolue :

$$H = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi i\left[-(x^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x(x^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right] = 2\pi i\, r^2 (x^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Si l'on calcule le champ au centre O de la circonférence ($x = 0$) on obtient la formule :

$$H = \frac{2\pi i}{r}.$$

On a quelquefois à considérer des bobines circulaires plates, formées de N spires assez rapprochées pour qu'on puisse les considérer comme confondues. Le champ créé au centre de la bobine est la somme des champs créés par les N spires : il est dirigé suivant l'axe, vers la gauche de l'observateur placé sur le courant et regardant le centre de la bobine, et sa valeur est :

$$H = \frac{2\pi N i}{r}.$$

184. Solénoïdes. — On appelle **solénoïde** un ensemble de courants circulaires, de même rayon, de même intensité et de même sens, dont les plans sont perpendiculaires à un axe commun, qui passe par tous leurs centres, et

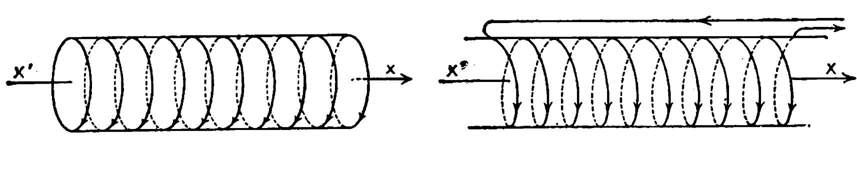


FIG. 213. FIG. 214.

sont équidistants (*fig.* 213). Les calculs que nous allons faire sur le solénoïde théorique s'appliquent très approximativement à une bobine constituée par un fil conducteur enroulé en hélice sur un tube ayant la forme d'un cylindre de révolution (*fig.* 214) ; l'approximation est encore meilleure quand on a soin de ramener le fil conducteur à son point de départ le long d'une génératrice (voir § 188).

Nous désignerons par i l'intensité du courant qui parcourt les différentes spires, par n le nombre de spires par unité de longueur : la distance de deux spires voisines est $a = \frac{1}{n}$, et le nombre total de spires est, si l est la longueur du solénoïde, $N = nl$.

Chacune des spires est équivalente à un feuillet magnétique ; on peut la remplacer par une masse de matière aimantée, qui a la forme d'un disque circulaire plat, et dont le moment magnétique par unité de surface est $\mu_0 i$. Nous pouvons supposer que l'épaisseur de ce disque est précisément la distance a de deux

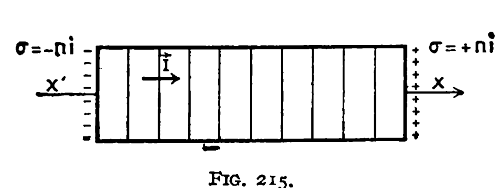


FIG. 215.

spires : les différents feuillets seront alors en contact et formeront une masse continue de matière aimantée, ayant la forme d'un barreau cylindrique, dont le volume est le volume du solénoïde (*fig.* 215). L'aimantation est la même en tous les points de ce barreau : elle est parallèle à l'axe $x'x$ du solénoïde, dirigée dans le sens où progresse un tire-bouchon que l'on tourne dans le sens du courant, et son intensité est $I = \frac{\mu_0 i}{a} = n\mu_0 i$ (§ 116). On sait (§ 111) que les actions exercées et subies par un tel aimant peuvent être calculées en le remplaçant par des masses magnétiques, distribuées sur les deux

faces terminales, avec des densités superficielles $+$ I et $-$ I, c'est-à-dire $+ n\mu_0 i$ et $- n\mu_0 i$. La masse magnétique totale d'une des faces est $n\mu_0 i\mathrm{S}$, en désignant par S la section du solénoïde ; le moment magnétique de l'aimant équivalent est $n\mu_0 i\mathrm{S}l = \mathrm{NS}\mu_0 i$.

En un point P extérieur, le champ $\vec{\mathrm{H}}$ créé par le solénoïde est identique au champ $\vec{h}$ créé par l'aimant : on le calcule facilement, si la distance du point P au solénoïde est grande par rapport à ses dimensions transversales, en remplaçant chacune des deux couches terminales par une masse magnétique unique, placée en son centre, ou même, si cette distance est grande par rapport à la longueur l, en employant les formules qui donnent le champ créé par un petit aimant.

En un point M intérieur (*fig.* 216), l'induction créée par le solénoïde est identique à l'induction $\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\vec{h} + 4\pi\vec{\mathrm{I}}$ créée par l'aimant. Si le solénoïde est très long et le point M situé très loin des faces terminales, le champ $\vec{h}$ créé en M par les masses $\pm\, n\mu_0 i\mathrm{S}$ est négligeable : le vecteur $\vec{\mathrm{B}}$ se réduit au vecteur $4\pi\vec{\mathrm{I}}$, qui est parallèle à l'axe $x'x$ et dont la grandeur est $4\pi n\mu_0 i$. Le champ créé par le solénoïde est $\vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{B}}/\mu_0$:

Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long est uniforme, parallèle à l'axe du solénoïde, dirigé vers la gauche d'un observateur placé suivant le courant, et est donné, en fonction du nombre n de spires par unité de longueur et de l'intensité i du courant, par la formule :

$$\mathrm{H} = 4\pi ni.$$

On applique généralement cette formule dans le système électromagnétique : le champ H est mesuré en gauss, l'intensité i en unités électromagnétiques, et le nombre de spires n est pris par centimètre. Dans la pratique, l'intensité du courant est généralement mesurée en ampères :

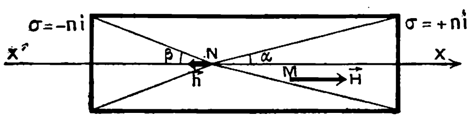


FIG. 216.

comme l'ampère est le dixième de l'unité électromagnétique, le nombre i qui mesure l'intensité du courant en u. é. m. est égal au dixième du nombre i_a qui la mesure en ampères ; la formule qui donne le champ H en gauss, en fonction de l'intensité i_a mesurée en ampères, est :

$$\mathrm{H} = \frac{4\pi n i_a}{10},$$

ou, à environ $\frac{1}{200}$ près ($4\pi = 12{,}566...$) :

$$\mathrm{H} = 1{,}25\, n i_a.$$

Si le solénoïde n'est pas infiniment long, on peut aisément tenir compte du terme $\vec{h}$, tout au moins pour le calcul du champ en un point N de l'axe (*fig.* 216). En u. é. m. ($\mu_0 = 1$), c'est le champ newtonien créé en un point de leur

axe par deux disques circulaires portant des répartitions uniformes de masses agissantes, avec des densités $+ ni$ et $- ni$. Il est dirigé en sens inverse de l'aimantation I, et si α et β sont les demi-angles au sommet des cônes de révolution sous lesquels les disques sont vus du point N, on a (§ 18) :

$$h = - 2\pi ni (1 - \cos\alpha) - 2\pi ni (1 - \cos\beta),$$

et

$$H = h + 4\pi ni = 2\pi ni (\cos\alpha + \cos\beta).$$

La formule usuelle $H = 4\pi ni$ suppose que les angles α et β sont assez petits pour qu'on puisse confondre leurs cosinus avec l'unité.

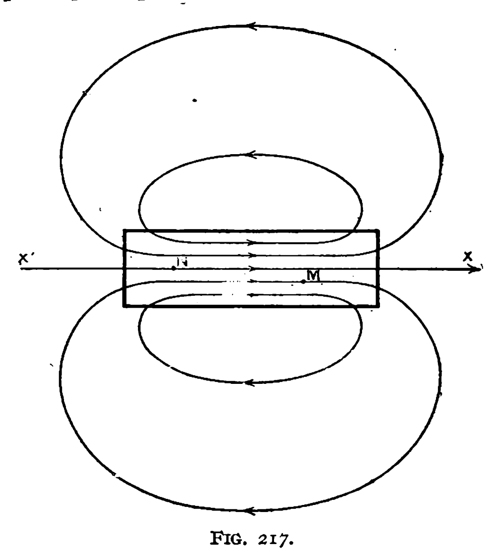


FIG. 217.

Nous pouvons tracer l'ensemble des lignes de force qui représentent le champ magnétique créé par le solénoïde (*fig.* 217). Au centre du solénoïde, où le champ est uniforme, elles sont parallèles entre elles et à l'axe du solénoïde ; quand on s'approche des extrémités, le champ diminue, et elles s'écartent ; enfin elles se ferment à l'extérieur du solénoïde, en dessinant la même figure que les lignes de force du champ d'un barreau aimanté.

Il convient d'ailleurs de remarquer que les calculs ne sont plus valables lorsqu'on s'approche des conducteurs où passe le courant. Chaque spire doit être, en réalité, assimilée à un feuillet d'épaisseur infiniment petite, et l'assimilation que nous avons faite à un feuillet d'épaisseur a n'est valable



FIG. 218.

que si l'on se trouve à une distance du contour du feuillet grande par rapport à la distance a. Chaque spire est un courant circulaire, qui produit un champ

magnétique analogue à celui que représente la figure 212, et c'est de la superposition de tous ces champs élémentaires que résulte le champ du solénoïde. Il est facile, si les spires sont assez écartées, de montrer, par l'expérience du spectre magnétique, qu'il reste, au voisinage de chaque spire, des lignes de force entourant cette spire (*fig.* 218).

185. Champ créé par un courant rectiligne indéfini. — Un courant rectiligne indéfini $z'z$ produit un champ magnétique dont les lignes de force présentent nécessairement la même symétrie que le courant rectiligne, et sont, par conséquent, des circonférences Γ ayant la droite $z'z$ pour axe (*fig.* 219). Le champ en un point P est perpendiculaire au plan $z'z$P, et sa valeur ne dépend que de la distance r du point P à la droite $z'z$. Si nous prenons un plan Π quelconque passant par l'axe $z'z$, par exemple le plan zoy, on peut considérer la droite indéfinie $z'z$ comme limitant la moitié de ce plan, et, par conséquent, assimiler le courant rectiligne indéfini à un feuillet, de puissance $U = \mu_0 i$, dont la surface est constituée par un demi-plan indéfini.

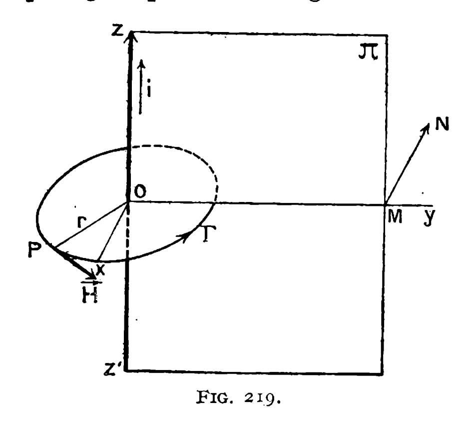


FIG. 219.

L'induction magnétique $\vec{B}$ créée par le courant est identique à celle que crée le feuillet. Sa circulation $\int \vec{B}\,\vec{ds} = 2\pi r B$, le long d'une circonférence Γ qui traverse une fois la surface du feuillet, est égale (§§ 123 et 127) à $4\pi U$, c'est à dire à $4\pi\,\mu_0 i$. On a donc :

$$2\pi r B = 4\pi\mu_0 i, \qquad H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{2i}{r}.$$

Le champ magnétique créé en un point P *par un courant rectiligne indéfini est inversement proportionnel à la distance du point* P *au courant.* Cette loi a été établie expérimentalement par Biot et Savart en 1820.

Quant au sens du champ $\vec{H}$, on l'obtient en remarquant que le sens $\vec{MN}$ du feuillet, et le sens dans lequel la ligne d'induction Γ le traverse, sont donnés par les règles habituelles : le champ $\vec{H}$ est dirigé vers la gauche d'un observateur placé sur le courant et regardant le point P, ou encore le sens de rotation des lignes de force est le sens dans lequel il faut tourner un tire-bouchon pour qu'il progresse dans le sens du courant.

II. — EXPRESSIONS ANALYTIQUES

186. Théorème d'Ampère. — Soit un feuillet, de contour C et de puissance U, et une courbe fermée Γ passant une fois à l'intérieur du contour C (*fig.* 220). Nous savons (§ 123) que la circulation du vecteur induction magnétique le long de la courbe fermée Γ est égale à $4\pi U$, en supposant qu'on parcoure la courbe Γ dans le sens qui traverse le feuillet de la face négative à la face positive.

Cette loi, appliquée au courant équivalent au feuillet, constitue ce que nous appellerons le **théorème d'Ampère :**

La circulation du vecteur champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant, le long d'une courbe fermée passant une fois à l'intérieur de ce circuit, dans le sens qui va de la droite vers la gauche pour un observateur placé sur ce courant, est égale au produit par 4π *de l'intensité du courant :*

$$\int_\Gamma \vec{H}\,\vec{ds} = 4\pi i.$$

Ce théorème n'est qu'une autre expression du fait, déjà indiqué, que le champ magnétique créé par un courant dérive d'un potentiel non uniforme, dont les déterminations diffèrent entre elles de $4\pi i$. Il est constamment appliqué, sous une forme que nous étudierons dans le prochain chapitre, pour le calcul des champs magnétiques dans la pratique industrielle.

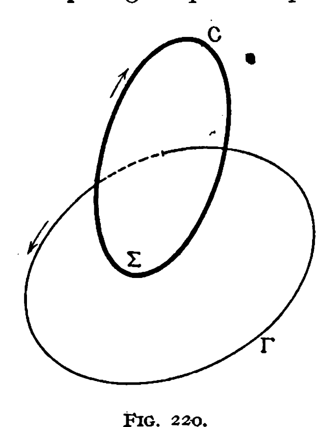


FIG. 220.

Au lieu de dire que la courbe Γ passe à l'intérieur de la courbe C, il revient au même de dire que la courbe C passe à l'intérieur de la courbe Γ, et on se rendra compte aisément sur la figure que le sens dans lequel la courbe Γ passe à l'intérieur de la courbe C, pour l'observateur placé sur la courbe C, est le même que le sens dans lequel la courbe C passe à l'intérieur de la courbe Γ, pour l'observateur placé sur la courbe Γ. On peut considérer i comme l'intensité du courant qui traverse, dans le sens positif, une surface Σ limitée par la courbe Γ, le sens positif de la normale à la surface Σ étant lié au sens de parcours sur la courbe Γ par nos conventions habituelles.

On peut facilement étendre le théorème d'Ampère au champ magnétique $\vec{H}$ produit par un système de courants : sa circulation le long de la courbe Γ est égale à la somme algébrique des circulations des champs composants : ces dernières sont nulles pour les courants qui ne traversent pas la surface Σ, et égales à $4\pi i$ pour chacun de ceux qui la traversent.

Si le champ magnétique est produit par des courants et des aimants, sa circulation est la somme des circulations du champ $\vec{H}_1$ créé par les aimants

et du champ créé par les courants ; le champ $\vec{H}_1$ dérive d'un potentiel (§ 113), et sa circulation le long du contour fermé Γ est nulle : il n'y a pas lieu d'en tenir compte, quelle que soit la nature et la position des aimants, que leur aimantation soit rigide ou induite (cf. § 199), que la courbe Γ les traverse ou non.

Nous arrivons ainsi à l'énoncé suivant du théorème d'Ampère :

La circulation du champ magnétique créé par un système quelconque de courants et d'aimants le long d'une courbe fermée quelconque Γ *est égale au produit par* 4π *de la somme des intensités des courants qui traversent, dans le sens positif, une surface* Σ *limitée par la courbe* Γ.

187. Relation de Maxwell-Ampère. — Le théorème d'Ampère s'applique encore quand les courants sont répartis dans tout le volume d'une matière conductrice. On sait que l'intensité totale du courant qui traverse la surface Σ est alors égale au flux à travers cette surface du vecteur courant $\vec{i}$ que nous avons défini en chaque point de la matière conductrice (§ 135). On a :

$$\int_\Gamma \vec{H}\,\vec{ds} = 4\pi \iint_\Sigma \vec{i}\,\vec{dS}.$$

La circulation du vecteur $\vec{H}$ *le long d'une courbe quelconque est égale au flux du vecteur* $4\pi\,\vec{i}$ *à travers une surface limitée par cette courbe.* On sait (§ 120) que cette propriété définit le rotationnel d'un vecteur : elle peut s'exprimer par la relation symbolique :

$$\text{rot}\,\vec{H} = 4\pi\vec{i},$$

qui résume les trois équations :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 4\pi i_x, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 4\pi i_y, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 4\pi i_z.$$

Cette relation, qui exprime que le champ magnétique à l'intérieur d'un conducteur ne dérive pas d'un potentiel ($\text{rot}\,\vec{H} \neq 0$), est une des équations fondamentales de la théorie de Maxwell : pour rappeler à la fois qu'elle est due à Maxwell et qu'elle exprime une loi énoncée par Ampère, nous l'appellerons la **relation de Maxwell-Ampère.**

Elle est valable dans tous les milieux, quelle que soit leur nature. Elle est valable dans l'espace qui avoisine les conducteurs comme dans les conducteurs eux-mêmes, dans les milieux aimantés comme dans le vide. Nous avons raisonné jusqu'ici sur des courants continus, correspondant à un état de régime permanent : nous admettrons qu'elle est encore valable pour les courants variables.

La démonstration que nous en avons donnée, par l'assimilation des courants aux feuillets, suppose essentiellement que tous les courants électriques sont des courants fermés. Il en est évidemment ainsi dans tous les cas où un régime permanent est établi. Nous verrons au chapitre xx qu'on doit considérer qu'il en est encore de même dans le cas des courants variables,

et qu'on doit par exemple considérer le courant de décharge d'un condensateur comme fermé, au point de vue électromagnétique, à travers le diélectrique du condensateur : l'équation de Maxwell-Ampère sera valable dans ce diélectrique, comme dans tout autre milieu.

On remarquera que la forme, rot $\vec{H} = 4\pi\vec{i}$, donnée à cette équation, suppose que les grandeurs H et i sont mesurées avec des unités coordonnées par la relation $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$ (cf. § 189), et que le système d'axes choisi est le système d'axes à gauche, défini par les règles d'Ampère ou de Maxwell.

188. Loi de Biot et Savart. — Nous avons trouvé, au paragraphe 124, une expression qui permet de calculer l'induction magnétique créée par un feuillet comme la résultante de vecteurs élémentaires correspondant aux différents éléments du contour du feuillet. Ce calcul s'applique immédiatement au champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant, et son expression constitue la **loi de Biot et Savart :**

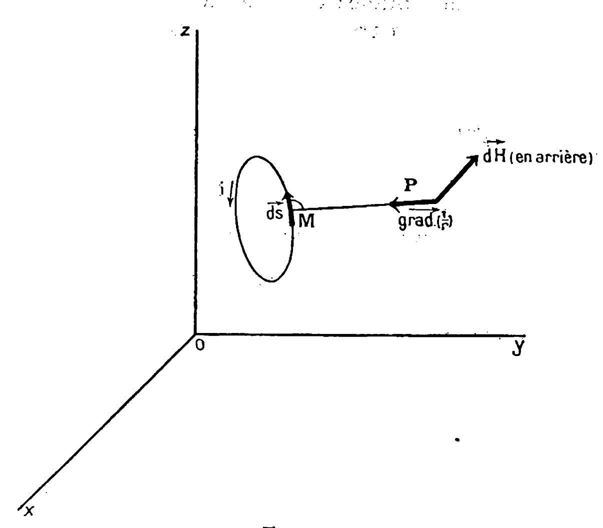


FIG. 221.

Le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant peut être considéré comme la résultante de champs élémentaires céés par les éléments du circuit. Le champ élémentaire créé par un élément ds en un point P *situé à une distance r de l'élément, dans une direction faisant l'angle α avec cet élément (fig. 221), est perpendiculaire au plan défini par l'élément et le point* P*, et dirigé vers la gauche d'un observateur placé dans le sens positif sur l'élément ds et regardant le point* P *; sa grandeur est :*

$$dH = \frac{i\,ds\,\sin\alpha}{r^2}$$

Nous avons également donné, au paragraphe 124, l'expression de cette loi dans la notation vectorielle. On a, le système d'axes étant le système à gauche défini par les règles usuelles d'Ampère ou de Maxwell :

$$\vec{dH} = \vec{\text{grad}}\,\frac{1}{r} \wedge i\,\vec{ds};$$

les dérivations exprimées par le symbole $\vec{\text{grad}}\,\frac{1}{r}$ doivent être effectuées par rapport aux coordonnées du point P où l'on calcule le champ.

Comme exemple de l'application de la formule de Biot et Savart, nous pouvons calculer le champ créé en son centre O par un courant circulaire de rayon r (*fig.* 222). La droite MO est perpendiculaire à l'élément ds, on a $\alpha = \pi / 2$ et $\sin \alpha = 1$; le vecteur $\overrightarrow{dH}$ est perpendiculaire au plan du cercle, il est dirigé suivant l'axe Ox, et sa valeur est :

$$dH = \frac{i\,ds}{r^2}.$$

Fig. 222.

On a donc :

$$H = \int dH = \frac{i}{r^2} \int_C ds = \frac{i}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi i}{r}.$$

C'est le résultat déjà trouvé par une autre méthode au paragraphe 183.

L'expression vectorielle de la loi de Biot et Savart montre immédiatement qu'on peut remplacer dans le calcul le vecteur $\overrightarrow{ds}$ par d'autres vecteurs dont il est la somme géométrique, par exemple par ses composantes dx, dy, dz suivant les trois axes de coordonnées : *le champ créé par l'élément $\overrightarrow{ds}$ est égal à la somme géométrique des champs créés par ses composantes.* C'est ce qu'on appelle le **principe des courants sinueux :** le courant rectiligne MM′ est équivalent au courant sinueux Mmm'M′ (*fig.* 223), à condition bien entendu que l'on calcule son action en un point P, à une distance r qui soit grande par rapport aux longueurs dx, dy, dz.

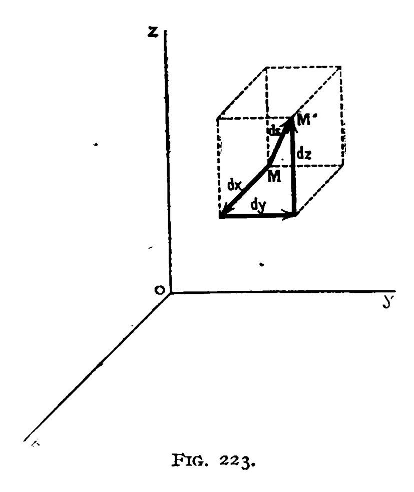


Fig. 223.

C'est ce principe qui permet l'assimilation complète au solénoïde théorique du solénoïde réalisé par un enroulement hélicoïdal, avec fil de retour suivant une génératrice (§ 184) : chaque élément de la spire hélicoïdale peut être remplacé par un élément de spire circulaire, qui est sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, et par un élément de génératrice, qui est sa projection sur l'axe : l'action de ces derniers éléments est exactement compensée par l'action du fil de retour.

Il faut bien remarquer que la loi de Biot et Savart n'exprime qu'une équivalence mathématique, et que la considération du champ créé par un élément de courant n'a aucune signification physique. Au point de vue électromagnétique, tout courant est un courant fermé, assimilable à un feuillet ; la loi de Biot et Savart exprime que le champ magnétique qu'il crée peut être calculé par une intégrale, étendue à tout le circuit, et en donne l'élément

différentiel. Mais il y a une infinité d'éléments différentiels dont la somme, prise le long d'un contour fermé, est nulle et qu'on peut ajouter, sans rien modifier au point de vue des vérifications expérimentales, à l'élément différentiel de Biot et Savart : il est possible d'imaginer une infinité de lois élémentaires qui soient équivalentes pour les circuits fermés, et qui soient par conséquent également justifiées au point de vue expérimental.

189. Potentiel-vecteur d'un système de courants. — Le champ magnétique $\vec{H}$ créé par un circuit C parcouru par un courant d'intensité i a la même expression que le champ créé par un feuillet de contour C et de puissance $\mu_0 i$, et par conséquent que l'induction créée par un feuillet de même contour et de puissance $U = i$. Il dérive donc d'un potentiel-vecteur $\vec{A}$ dont l'expression est celle que nous avons calculée aux paragraphes 124 et 127 ; on a :

$$\vec{H} = \text{rot}\,\vec{A} \qquad \text{et} \qquad \vec{A} = i\int_C \frac{\vec{ds}}{r}.$$

On pourra calculer par cette expression le potentiel-vecteur d'où dérive le champ magnétique créé par un système de courants, en étendant l'intégrale à l'ensemble des conducteurs parcourus par les courants : la valeur de l'intensité i est différente d'un conducteur à l'autre, et nous écrirons l'intégrale sous la forme :

$$\vec{A} = \int \frac{i\,\vec{ds}}{r}.$$

Le calcul peut également être effectué dans le cas d'un milieu conducteur parcouru par des courants, qu'on peut toujours considérer comme circulant dans des tubes de courant fermés. Considérons, sur un tube de courant T, un élément MM', de section dS, de longueur ds, de volume $dv = ds \,.\, dS$ (*fig.* 224) ; désignons par $\vec{i'}$ le vecteur courant au point M, et par i' la grandeur de ce vecteur : l'élément MM' est parcouru par un courant d'intensité $= i'dS$, a une longueur ds, et sa direction est celle du vecteur $\vec{i'}$. L'élément vectoriel $i\vec{ds}$ peut s'écrire $\vec{i'}dS\,ds$ ou $\vec{i'}dv$, et le potentiel-vecteur est (nous supprimons l'accent, et remplaçons $\vec{i'}$ par $\vec{i}$, la notation avec le symbole vecteur ne prêtant pas à confusion) :

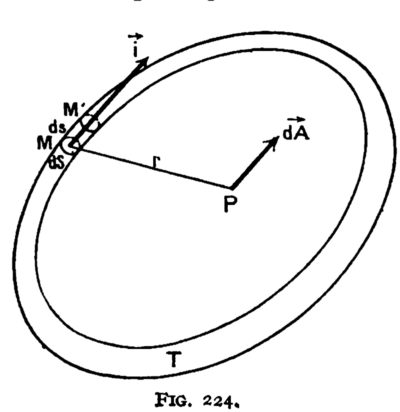


FIG. 224.

$$\vec{A} = \iiint \frac{\vec{i}\,dv}{r}.$$

L'intégrale doit être étendue à tout le volume du milieu conducteur parcouru par des courants. Elle reste définie même pour les points situés à l'intérieur de ce milieu (§ 14).

On remarquera l'analogie de l'expression du potentiel-vecteur $\vec{A}$ et de l'expression en unités électrostatiques du potentiel électrique V créé par une distribution de masses agissantes de densité ρ :

$$V = \iiint \frac{\rho\, dv}{r}.$$

Nous savons que le potentiel scalaire V satisfait, en dehors de la région occupée par les masses agissantes, à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0,$$

et, dans la région qu'elles occupent, à l'équation de Poisson :

$$\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

Les expressions des trois composantes A_x, A_y, A_z du potentiel-vecteur créé par un système de courants sont identiques à l'expression du potentiel V créé par un système de charges électriques : il suffit de remplacer la densité ρ par les composantes i_x, i_y, i_z du vecteur courant. Les composantes A_x, A_y, A_z satisfont donc aux équations de Laplace et de Poisson, qu'on peut résumer, en notation vectorielle, en dehors de la région où existent des courants (cf. § 124), par l'équation :

$$\Delta\vec{A} = 0;$$

et, dans le milieu parcouru par les courants, par l'équation :

$$\Delta\vec{A} + 4\pi\vec{i} = 0.$$

Du potentiel scalaire V, on déduit le champ électrique $\vec{E}$ par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V,$$

et cette relation, jointe à l'équation de Poisson, entraîne la relation :

$$\text{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho.$$

De même, du potentiel-vecteur $\vec{A}$, on déduit le champ magnétique $\vec{H}$ par la relation :

$$\vec{H} = \text{rot}\,\vec{A},$$

et cette relation, jointe à l'équation de Poisson, redonne l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot}\, \vec{H} = 4\pi \vec{i}.$$

Pour l'obtenir ainsi, on remarquera que div $\vec{A} = 0$ (cf. § 124), et on partira de l'identité, facile à vérifier en explicitant les dérivées :

$$\text{rot rot}\, \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\,.\, \text{div}\, \vec{A} - \Delta\vec{A}.$$

Répétons encore une fois que toutes les formules écrites dans ce Chapitre supposent que les unités électriques et les unités magnétiques choisies sont liées par la relation de coordination $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$ (§ 133). Si l'on emploie un système d'unités dans lequel cette relation n'est pas satisfaite, l'intensité i du courant et la puissance U du feuillet équivalent sont liées par la relation (§ 132)

$$\mu_0 i = c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\, U.$$

Le raisonnement du paragraphe 183 donne alors pour l'expression du potentiel V d'où dérive le champ magnétique créé par le courant, et pour la circulation de ce champ le long d'une courbe fermée Γ embrassant le circuit, les valeurs :

$$V = \frac{-i\Omega + 4\pi k i}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \qquad \int_\Gamma \vec{H}\, \vec{ds} = \frac{4\pi i}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

De cette relation, on déduit, comme au paragraphe 187, la relation de Maxwell-Ampère sous la forme :

$$\text{rot}\, \vec{H} = \frac{4\pi \vec{i}}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

On dit quelquefois que, dans les systèmes d'unités usuels, les unités sont choisies de façon que le théorème d'Ampère s'exprime par la relation $\int \vec{H}\, \vec{ds} = 4\pi i$. La formule générale que nous venons de donner montre que c'est là une convention de coordination tout à fait arbitraire (cf. § 323), comme toutes les conventions de coordination, et qu'elle est équivalente à la condition $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$.

CHAPITRE XIX

AIMANTATION INDUITE

I. — *PARAMAGNÉTISME ET DIAMAGNÉTISME*

190. Définitions. — Nous avons signalé, dès le début de l'étude du magnétisme (§ 88), l'existence des phénomènes d'aimantation induite. Un barreau de fer doux placé dans un champ magnétique acquiert les propriétés d'un aimant ; il les perd lorsqu'on supprime le champ magnétique.

Ce phénomène est extrêmement général, et on peut dire qu'un corps quelconque, placé dans un champ magnétique $\vec{H}$, devient un aimant, d'aimantation $\vec{I}$. L'immense majorité des corps présentent ce phénomène à un degré beaucoup moins marqué que le fer, et la valeur de l'intensité d'aimantation I reste très faible; d'autre part, on constate, en général, que le vecteur aimantation $\vec{I}$ a même direction que le vecteur champ magnétique $\vec{H}$, et que leurs grandeurs sont proportionnelles. Nous supposerons dans tout ce chapitre, les différentes grandeurs exprimées en unités électromagnétiques et nous poserons :

$$\vec{I} = \varkappa \vec{H}.$$

La constante $\varkappa$ s'appelle la **susceptibilité magnétique** de la substance. Nous ne considérerons pour le moment que les corps pour lesquels cette proportionnalité existe ; nous étudierons à part le cas du fer, pour lequel elle n'existe pas.

Pour quelques corps, assez rares, les deux vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{H}$ sont de même sens : ces corps sont dits **paramagnétiques.** Leur susceptibilité $\varkappa$ est positive. On peut citer parmi eux l'oxygène ($\varkappa = 0{,}16 . 10^{-6}$ à $0°, 760^{mm}$), l'air ($\varkappa = 0{,}03 . 10^{-6}$) et la plupart des sels de fer ($\varkappa = 2{,}6 . 10^{-4}$ pour les cristaux de chlorure ferrique).

Pour presque tous les corps, les deux vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{H}$ ont même direction et sont de sens opposés. Les corps de cette catégorie sont dits **diamagnétiques**: leur susceptibilité $\varkappa$ est négative. Elle est toujours très faible en valeur absolue, de l'ordre de 10^{-6}. C'est ainsi qu'on a, pour le bismuth $\varkappa = -12 . 10^{-6}$, pour l'eau $\varkappa = -0{,}72 . 10^{-6}$, pour l'alcool $\varkappa = -0{,}6 . 10^{-6}$.

Le vecteur induction magnétique, à l'intérieur d'un corps aimanté, est donné par la relation $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I}$. Dans un corps para- ou diamagnétique,

$\vec{I}$ est parallèle et proportionnel à $\vec{H}$, et il en est de même de $\vec{B}$. On a :

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\kappa\vec{H} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = 1 + 4\pi\kappa.$$

Le rapport constant μ de l'induction au champ s'appelle la **perméabilité magnétique.** Il est supérieur à 1 pour les corps paramagnétiques, inférieur à 1 pour les corps diamagnétiques. Dans l'un et l'autre cas, il est très voisin de l'unité, et en diffère, tout au moins pour les corps diamagnétiques, de quantités qui restent toujours de l'ordre du millionième.

Dans les systèmes d'unités électromagnétiques, que nous employons systématiquement dans ce chapitre, les trois grandeurs B, H et I ont mêmes dimensions (§§ 107 et 113), et les rapports κ et μ sont des nombres, indépendants de la grandeur des unités fondamentales. Si l'on passait à un système non électromagnétique, le rapport des facteurs par lesquels il faudrait multiplier les unités de champ et d'induction serait égal au coefficient μ_0 de la loi de Coulomb, et il faudrait écrire $B = \mu_0\mu H$, en conservant à la perméabilité μ la même valeur numérique, indépendante des unités choisies, qu'en u. é. m.

191. Forces subies par une particule para- ou diamagnétique. — Appliquons au calcul de ces forces les formules du paragraphe 96. Si v est le volume de la particule, son moment magnétique est :

$$\vec{M} = \vec{I}v = \kappa\vec{H}v.$$

Le système de forces se réduit à un couple et à une force appliquée au centre de l'aimant. Le couple a pour expression :

$$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H} \qquad (C = M \, . \, H \, . \, \sin\theta).$$

Il est toujours nul, puisque les vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{H}$ sont toujours parallèles ($\theta = 0$).

La composante de la force suivant l'axe Ox a pour expression :

$$X = \vec{M}\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial x} = \kappa v \, . \, \vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{H}}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\kappa v\,\frac{\partial\,(H^2)}{\partial x},$$

ou :

$$X = \kappa v\left(H_x\frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y\frac{\partial H_y}{\partial x} + H_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,\kappa v\,\frac{\partial}{\partial x}\,(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) = \frac{1}{2}\,\kappa v\,\frac{\partial\,(H^2)}{\partial x}.$$

Dans un champ uniforme ($H^2 = C^{te}$), *une substance paramagnétique ou diamagnétique n'est soumise à aucune force.*

Dans un champ non uniforme, une particule d'une substance para- ou diamagnétique est soumise à une force qui dérive d'une fonction de forces $\frac{\kappa v H^2}{2}$. *La force est normale aux surfaces d'égale intensité du champ, et a donc*

pour direction celle suivant laquelle l'intensité du champ varie le plus rapidement ; elle est dirigée dans le sens des champs croissants pour les corps paramagnétiques, dans le sens des champs décroissants pour les corps diamagnétiques.

Supposons que l'axe Ox soit précisément dirigé dans la direction de la force ; la grandeur de la force est :

$$F = X = \frac{1}{2}\,\kappa v\,\frac{\partial (H^2)}{\partial x} = \kappa v H\,\frac{\partial H}{\partial x}.$$

La force, exprimée en dynes, est égale au produit de la susceptibilité par le volume exprimé en centimètres cubes, par l'intensité du champ exprimée en gauss

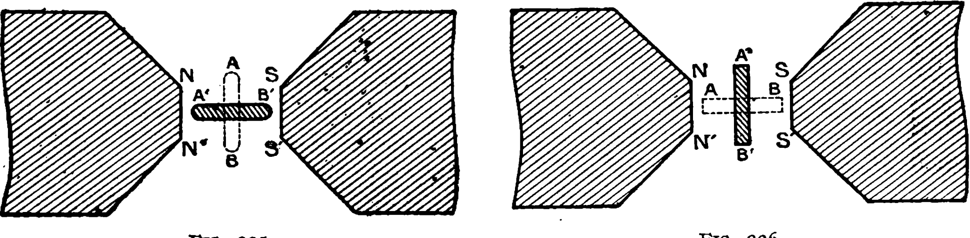


Fig. 225. Fig. 226.

et par le taux de variation de cette intensité dans la direction de la force, exprimée en gauss par centimètre.

Il est facile de montrer l'existence de cette force, si l'on dispose par exemple d'un électro-aimant ayant des pièces polaires tronconiques. Le champ est nettement plus intense dans la partie de l'entrefer située suivant l'axe de l'électro que dans les parties latérales. Si l'on suspend dans l'entrefer, par son centre de gravité, une ampoule allongée AB, remplie de cristaux de chlorure ferrique (*fig.* 225) et si l'on excite l'électro-aimant, on la voit tourner et venir prendre une position A'B', de façon qu'elle entre tout entière dans la région des champs intenses. Si on répète la même expérience avec un barreau de bismuth (*fig.* 226), il se met au contraire en croix avec l'axe de l'électro-aimant, les forces qui agissent sur ses extrémités AB tendant à les amener en des points A'B' où le champ est moins intense.

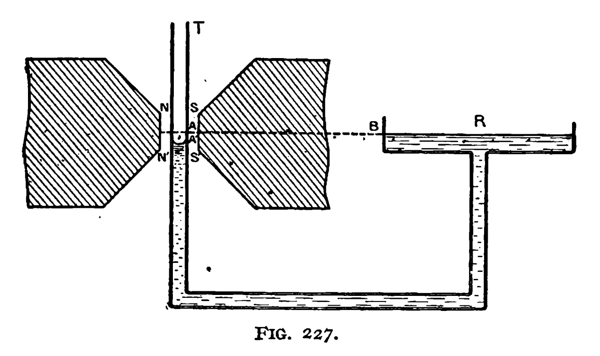


Fig. 227.

On obtient des résultats analogues avec des substances liquides, en les plaçant dans un tube vertical T communiquant avec un réservoir R, de façon que le niveau A dans le tube se trouve dans le champ de l'électro, et le réservoir R dans une région où le champ est nul (*fig.* 227). En l'absence du champ magnétique, les niveaux A et B du liquide sont dans le même plan

horizontal ; lorsqu'on établit le champ, si le liquide est diamagnétique (eau distillée), il tend à sortir du champ, et le niveau A s'abaisse de A en A'. S'il est paramagnétique (solution de chlorure ferrique), il tend, au contraire, à rentrer dans la région des champs intenses, et son niveau s'élève dans le tube T.

192. Énergie d'une particule magnétique placée dans un champ. — Les formules que nous venons d'appliquer pour le calcul des forces ont été déduites de l'expression de l'énergie d'un petit aimant à aimantation rigide placé dans le champ magnétique. Nous avons déjà remarqué (§ 96) que les forces ne dépendent pas de la façon dont sont créés le champ magnétique et l'aimantation du petit aimant, mais seulement de leurs valeurs actuelles, et qu'au contraire, l'énergie dépend de toutes les valeurs par lesquelles ils ont passé au cours de la transformation qui amène le système de l'état pris comme origine des énergies à l'état actuel. Elle représente le travail qu'il a fallu fournir pour effectuer cette transformation, et au besoin pour entretenir le champ magnétique au cours de cette transformation.

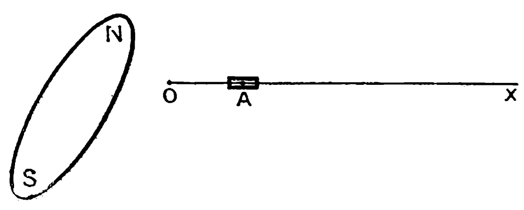


FIG. 228.

Supposons le champ créé par un aimant permanent NS, et le petit aimant placé en un point A, d'abscisse x, de la droite ox (*fig.* 228) ; soit $\vec{H}$ le champ créé en ce point par l'aimant NS et $\vec{M} = \vec{I}v$, le moment magnétique du petit aimant. Dans tous les cas, la composante suivant Ox de la force qui s'exerce sur le petit aimant est $X = \vec{M}\frac{\partial \vec{H}}{\partial x}$. Éloignons-le à l'infini par une translation suivant la droite Ox ; il n'y a pas d'autre énergie échangée entre le système et le milieu extérieur que le travail $\mathfrak{T}$ fourni par la force magnétique X : ce travail mesure la diminution d'énergie du système, c'est-à-dire l'énergie W que possédait le petit aimant dans le champ magnétique $\vec{H}$. On a :

$$W = \mathfrak{T} = \int_x^\infty \vec{M}\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial x}\,dx = v\int_x^\infty \vec{I}\frac{\partial \vec{H}}{\partial x}\,dx.$$

Pour achever le calcul, il est indispensable de savoir comment $\vec{I}$ varie en fonction de x, au cours du déplacement, tandis que le champ varie de la valeur $\vec{H}$ à la valeur o. Quand le petit aimant possédait une aimantation rigide, le vecteur aimantation $\vec{I}$ restait constant, et on avait :

$$W = v\vec{I}\int_x^\infty \frac{\partial \vec{H}}{\partial x}\,dx = -\,v\vec{I}\vec{H}.$$

Pour une substance para ou diamagnétique, le vecteur $\vec{I}$ est proportionnel au vecteur $\vec{H}$; on a :

$$\vec{I} = \varkappa\vec{H},$$

$$W = v\int_x^\infty \varkappa\vec{H}\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial x}\,dx = -\frac{1}{2}\,\varkappa v H^2 = -\frac{1}{2}\,v\vec{I}\vec{H}.$$

Employons cette expression pour le calcul des forces magnétiques dans l'expérience de dénivellation décrite au paragraphe précédent (*fig.* 227). Nous l'avons décrite avec un électro-aimant ; nous devons ici supposer le champ créé par un aimant permanent, mais l'expression obtenue pour les forces sera valable dans tous les cas. Lorsque le niveau du liquide s'élève d'une hauteur dz dans le tube T de section s, on peut dire qu'un volume de liquide $s\,dz$ passe du réservoir R, où le champ est nul, dans la partie AA′ du tube T, où le champ est H ; l'énergie magnétique augmente de $W = -\frac{1}{2}\varkappa H^2 s\,dz$, c'est-à-dire qu'on a fourni, contre la force magnétique Z, un travail :

$$\mathcal{T} = -Z\,dz = W = -\frac{1}{2}\,\varkappa H^2 s\,dz,$$

et on a :

$$Z = -\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2}\,\varkappa H^2 s.$$

Cette force est égale à la force produite par une pression :

$$p = \frac{Z}{s} = \frac{1}{2}\,\varkappa H^2.$$

Elle est dirigée vers le haut ($Z > 0$) si le liquide est paramagnétique ($\varkappa > 0$), vers le bas ($Z < 0$) s'il est diamagnétique ($\varkappa < 0$).

193. Mesure des susceptibilités. — Pour mesurer la susceptibilité $\varkappa$ d'un solide, on place un volume v de ce solide dans un champ non uniforme, et on mesure la force à laquelle il est soumis :

$$X = \varkappa v H\,\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Le champ non uniforme est créé par un aimant en fer à cheval ou un électro-aimant, dont les pôles limitent un entrefer en forme de coin ; la force peut être mesurée par une balance de torsion (*fig.* 229). Pour obtenir des mesures absolues, il est nécessaire de déterminer la constante de la balance de torsion, ainsi que la valeur du champ H et de sa dérivée $\frac{\partial H}{\partial x}$; ces dernières mesures sont difficiles, les mesures de champ magnétique ne pouvant être précises que dans le cas des champs uniformes. On réalisera plus commodément des mesures relatives : si l'on suspend successivement à la balance de torsion

deux volumes égaux de deux corps différents, de susceptibilités $\varkappa$ et $\varkappa'$, et si on les amène à la même position A dans le champ magnétique, le rapport des forces X et X′ est égal au rapport des torsions α et α' du fil T :

$$\frac{\varkappa}{\varkappa'} = \frac{X}{X'} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Les angles α et α' se mesurent aisément par la méthode optique, à l'aide d'un miroir M porté par le levier BC de la balance de torsion.

La même méthode peut être appliquée aux liquides, en les enfermant dans une ampoule de verre ; il faut bien entendu tenir compte de la force qui s'exerce sur le verre de l'ampoule : on la mesure par une expérience préalable avec l'ampoule vide.

On peut également, dans le cas des liquides, employer la méthode de dénivellation (*fig.* 227). Nous avons vu que les forces magnétiques sont égales aux forces de pression correspondant à une pression :

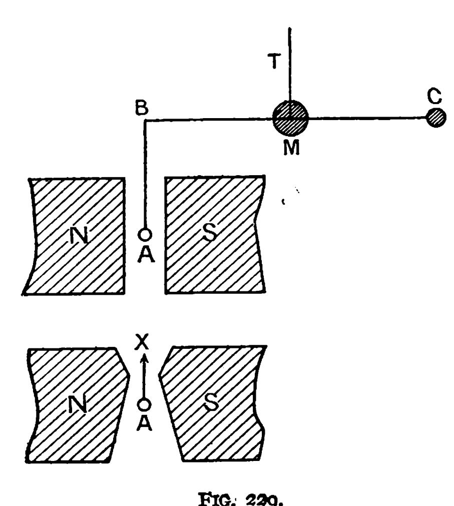


FIG. 229.

$$p = \frac{1}{2}\varkappa H^2.$$

Cette pression est mesurée directement par la différence des deux niveaux A et B du liquide. Le champ H peut être uniforme dans un espace assez grand, et être mesuré avec assez de précision : la méthode se prête bien à des mesures absolues. La principale difficulté vient des erreurs que peuvent produire les phénomènes capillaires : pour l'eau, la dénivellation capillaire dans un tube de 3 centimètres de diamètre est encore voisine de $0^{mm},1$, et la dénivellation magnétique correspondant à un champ de 20.000 gauss n'est que $1^{mm},4$. La susceptibilité de l'eau semble avoir été déterminée par cette méthode à moins de 1/1000 près.

Les formules ont été établies en supposant le corps placé dans le vide. En réalité, il est placé dans l'air, qui est paramagnétique à cause de l'oxygène qu'il contient, et il faut tenir compte de sa susceptibilité $\varkappa_0$. Lorsqu'on écarte le corps du point A à l'infini, on doit considérer qu'en même temps on rapproche un égal volume d'air de l'infini au point A, et l'expression de l'énergie devient :

$$W = -\frac{1}{2}(\varkappa - \varkappa_0)\, vH^2.$$

Les différentes mesures fournissent en réalité la valeur de $\varkappa - \varkappa_0$. C'est ainsi qu'on a pu, en faisant des mesures de dénivellation de l'eau dans différents gaz, obtenir les valeurs des susceptibilités de ces gaz.

On a pu, par la méthode de la balance de torsion, étudier les variations

de la susceptibilité avec la température. Les lois obtenues sont intéressantes, parce qu'elles sont différentes pour le paramagnétisme et le diamagnétisme, et montrent ainsi qu'il y a, entre ces deux phénomènes, une différence plus profonde que le simple changement de signe d'une constante. Il est avantageux, pour les exprimer, de ne pas définir la susceptibilité à partir du moment magnétique I de l'unité de volume, mais à partir du moment magnétique I′ de l'unité de masse. Si d est la densité du corps, l'unité de masse occupe le volume $v = \frac{1}{d}$, et l'on a $I' = Iv = \frac{I}{d}$; le **coefficient d'aimantation** est le rapport $\chi = \frac{I'}{H} = \frac{I}{dH} = \frac{\varkappa}{d}$. Ses variations avec la température sont données, du moins en première approximation, par les deux **lois de Curie :**

Le coefficient d'aimantation des corps diamagnétiques est indépendant de la température ($\chi = C^{te}$, cf. § 353 *a*).

*Le coefficient d'aimantation des corps paramagnétiques est **inversement proportionnel à la température** absolue* ($\chi T = C^{te}$, cf. § 353 *b* et *c*).

II. — *FERROMAGNÉTISME*

194. Champ démagnétisant. — Avant de passer à l'étude de l'aimantation du fer, nous ferons une remarque sur les calculs développés dans les paragraphes précédents. Nous avons toujours supposé que le champ $\vec{H}$ auquel était soumise une particule de la substance magnétique était identique au champ $\vec{H}_0$ qui existait, au point A où la particule est placée, avant qu'on l'y ait apportée. Il est évident que cette hypothèse ne peut pas être rigoureusement exacte. La substance devient un aimant, et crée au point A un champ $\vec{h}$: la particule placée en A est soumise au champ $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$. Dans le cas des substances paramagnétiques, comme des substances ferromagnétiques, le champ $\vec{h}$ est dirigé en sens inverse du champ primitif $\vec{H}_0$, d'où le nom de **champ démagnétisant** qui lui a été donné. Son calcul est d'ailleurs extrêmement compliqué, car il dépend de la forme de la substance magnétique ; nous allons le montrer par un exemple.

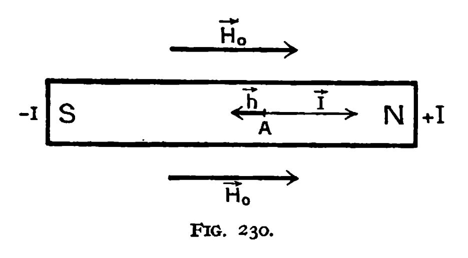


FIG. 230.

Supposons que le champ $\vec{H}_0$ soit un champ uniforme, tel que celui qui existe à l'intérieur d'un solénoïde, et plaçons-y, parallèlement au champ, un barreau cylindrique allongé d'une substance paramagnétique. Si la particule A était soumise uniquement au champ $\vec{H}_0$, elle acquerrait une aimantation $\vec{I}$, parallèle à $\vec{H}_0$, qui serait la même pour toutes les particules qui composent le barreau ; il deviendrait un aimant, dont l'action serait équivalente à celle

de deux distributions superficielles uniformes, de densités $+$ I et $-$ I, réparties sur ses faces terminales N et S (*fig.* 230). Elles créent au point A un champ $\vec{h}$, variable d'un point à l'autre ; en un point de l'axe, il est dirigé en sens inverse du champ $\vec{H}_0$, et joue bien le rôle d'un champ démagnétisant.

Chacune des couches porte une masse totale I*s* ; le champ $\vec{h}$ qu'elles créent au centre du barreau de longueur *l* est de l'ordre de $2\dfrac{Is}{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = I \cdot \dfrac{8s}{l^2}$. Pour les substances paramagnétiques, I/H est de l'ordre de 10^{-4} ou 10^{-6}, et $\vec{h}$ est négligeable vis-à-vis de $\vec{H}$: on peut confondre le champ $\vec{H}$ au point A avec le champ primitif $\vec{H}_0$. Il en est de même pour les substances diamagnétiques, pour lesquelles I/H est de l'ordre de 10^{-6}.

Mais, s'il s'agit d'un barreau de fer, le rapport I/H, dont nous étudierons plus loin les variations, peut être supérieur à 100, et même atteindre 1.000; le rapport *h*/H n'est pas négligeable, à moins que le rapport s/l^2 ne soit très faible : si par exemple $\dfrac{I}{H} = 400$, $\dfrac{h}{H}$ sera inférieur à $\dfrac{1}{1.000}$ si $\dfrac{8s}{l^2}$ est inférieur à 1/400.000 ce qu'on pourra réaliser, pour un barreau à section circulaire, en lui donnant une longueur égale à 1.000 fois son diamètre. Dans les mesures que nous étudierons dans le prochain paragraphe, nous supposerons la longueur du barreau assez grande pour que le champ démagnétisant au centre soit négligeable. Il est certain qu'il n'est plus négligeable au voisinage des extrémités et que l'aimantation n'y est plus uniforme ; les masses magnétiques qui constituent chaque pôle sont réparties, non seulement sur les faces terminales, mais aussi sur la surface latérale. Nous admettrons que cette répartition ne s'étend pas à une distance des extrémités très supérieure au diamètre du barreau (cf. § 111), et que la masse magnétique totale de chaque pôle est égale à I*s*, I étant la valeur de l'intensité d'aimantation au centre du barreau.

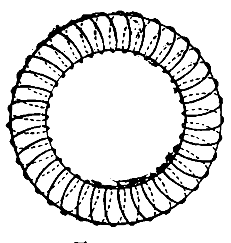


FIG. 231.

Il est d'ailleurs possible de se placer dans des conditions telles qu'il n'y ait pas de champ démagnétisant, en employant des *circuits magnétiques fermés* (cf. § 199). Supposons par exemple qu'un courant électrique parcoure un enroulement régulier disposé autour d'une masse de fer en forme de tore (*fig.* 231). Les lignes de force du champ $\vec{H}_0$ sont des circonférences, les aimantations $\vec{I}$ sont tangentes à ces circonférences ; en chaque point de la surface du tore, elles sont tangentes à cette surface, et il n'apparaît nulle part de magnétisme libre. L'aimant ainsi produit ne crée aucun champ. Nous verrons plus loin (§ 223) comment on peut déterminer son aimantation, et utiliser cette expérience pour la détermination des propriétés magnétiques du fer.

On aura, au contraire, un champ démagnétisant particulièrement intense

dans un disque plat normal au champ $\vec{H}_0$ (*fig.* 232) : les faces du disque se recouvrent de couches magnétiques, de densités superficielles + I et — I, et, si le disque est suffisamment large, le champ démagnétisant est $\vec{h} = -4\pi\vec{I}$. Pour un corps para- ou diamagnétique, le rapport I / H est de l'ordre de 10^{-6}, et le champ $\vec{h}$ est encore négligeable par rapport à $\vec{H}$; mais pour un disque de fer, si I / H est supérieur à 100, c'est au contraire $\vec{H}$ qui est négligeable devant $4\pi\vec{I}$, et comme on a $H = H_0 + h = H_0 - 4\pi I$, on a $I = \frac{H_0}{4\pi}$. L'aimantation, au lieu d'être égale à plusieurs centaines de fois le champ imposé, n'en atteint pas le dixième.

On peut maintenant comprendre ce qui arrive lorsqu'on place un barreau de fer doux obliquement dans un champ uniforme (*fig.* 233). Sans entrer dans des calculs précis, on peut dire que la composante L du champ dirigée suivant l'axe du barreau produit une aimantation longitudinale intense, et que la composante T perpendiculaire produit une aimantation transversale négligeable; *quelle que soit la direction du champ* $\vec{H}_0$, *le barreau s'aimante approximativement dans le sens de sa longueur, il est par suite soumis à un couple qui tend à l'orienter dans la direction du champ* $\vec{H}_0$. Nous avons là l'explication d'un des premiers phénomènes observés dans l'étude du magnétisme, l'orientation des grains de limaille suivant les lignes de force du champ magnétique. Les attractions qui s'exercent entre eux font ensuite qu'ils se disposent en files, suivant ces lignes de force, pour dessiner le spectre magnétique. Ils sont d'ailleurs attirés, comme les substances paramagnétiques, vers les régions où le champ est le plus intense.

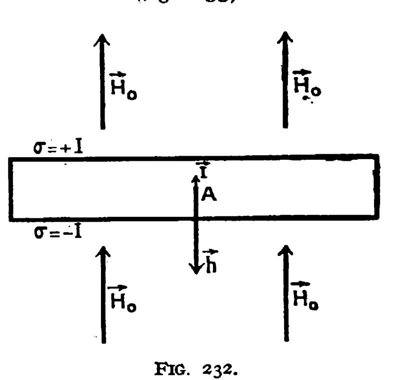


Fig. 232.

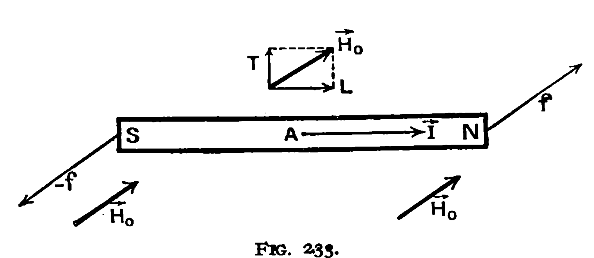


Fig. 233.

195. Courbe de première aimantation. — Les substances **ferromagnétiques** se distinguent des substances paramagnétiques parce que l'aimantation qu'elles acquièrent n'est pas proportionnelle au champ magnétique qui la produit, et peut même ne pas lui être parallèle. Elles sont en même temps caractérisées par une valeur élevée de cette aimantation. Les substances ferromagnétiques sont peu nombreuses : en dehors de métaux rares comme le gadolinium, il n'y a à citer que le *fer*, le *nickel*, le *cobalt*, et certains composés de ces métaux, tels que les *aciers*, la *magnétite* Fe^3O^4, qui constitue les aimants naturels, et aussi certains alliages de manganèse.

L'étude du ferromagnétisme est extrêmement compliquée. *Les propriétés magnétiques d'un barreau d'acier dépendent de tous les états antérieurs par lesquels le métal a passé.* Elles sont différentes suivant que l'acier a été trempé (acier dur) ou a été recuit (acier doux) ; elles sont modifiées par les chocs que peut subir le barreau ; elles ne sont pas les mêmes suivant que le barreau a déjà été aimanté ou non. Aussi nous bornerons-nous à quelques indications générales.

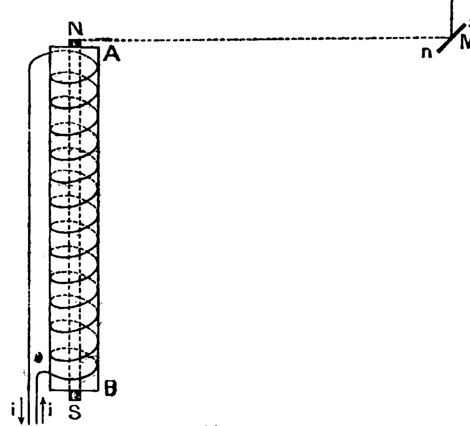


FIG. 234.

Le fer perd ses propriétés magnétiques lorsqu'on le porte à une température voisine de 775° centigrades. On le constate facilement, en constatant qu'un clou porté au rouge dans un bec Bunsen n'est plus attiré par un aimant ; il est à nouveau attiré lorsqu'il se refroidit. Cette modification dans les propriétés magnétiques est probablement due à une transformation allotropique. Elle nous permettra d'obtenir un barreau de fer vierge de toute aimantation, en le portant au rouge et en le laissant refroidir en dehors de tout champ magnétique.

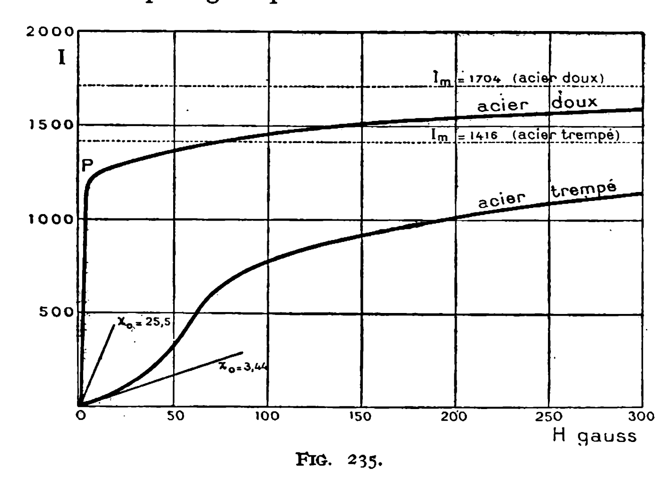


FIG. 235.

Pour étudier l'aimantation de ce barreau, nous le placerons dans un solénoïde vertical AB (*fig.* 234) et nous mesurerons, par un magnétomètre *ns*, le champ magnétique qu'il produit en un point M. Nous avons vu que, si le barreau est suffisamment long, le champ H auquel il est soumis peut être confondu avec le champ $4\pi ni$ créé par le solénoïde ; le champ qu'il crée est celui de deux masses + Is et — Is placées à ses extrémités. On devra naturellement tenir compte de l'action sur le barreau de la composante verticale

du champ magnétique terrestre, et de l'action sur le magnétomètre du champ créé par le solénoïde. Si ces deux actions sont compensées, l'intensité du courant i et la déviation α du magnétomètre (ou plutôt tang α) mesurent en valeur relative le champ H et l'intensité I de l'aimantation induite.

La figure 235 représente, pour deux cas extrêmes, les *courbes de première aimantation* obtenues en faisant croître progressivement le champ à partir de la valeur zéro ; elles se rapportent, l'une à un acier extra-doux deux fois recuit, l'autre à un acier trempé. L'intensité d'aimantation, proportionnelle

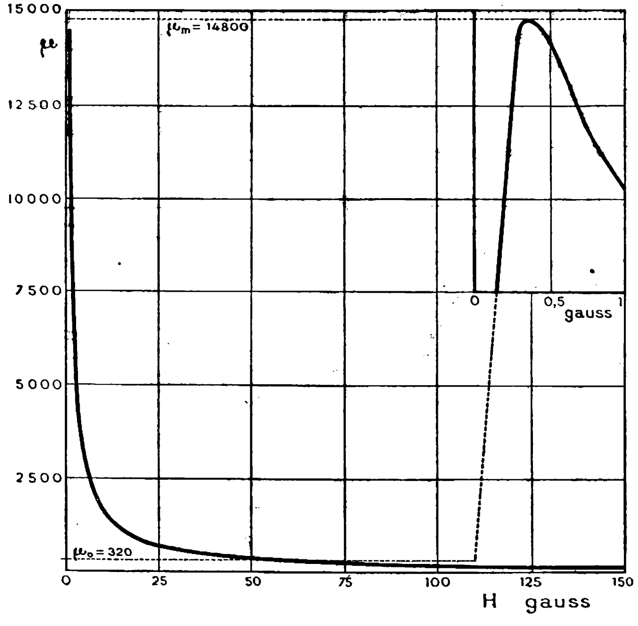


FIG. 236.

au champ pour des champs très faibles, croît ensuite plus vite que le champ, et tend vers une limite I_m lorsque le champ augmente indéfiniment : cette limite correspond à l'**aimantation à saturation** du fer. Sa valeur est de l'ordre de 1.700 C. G. S. pour le fer doux, 1.400 pour l'acier trempé.

A partir de l'intensité d'aimantation donnée par les courbes de la figure 235, on pourra calculer les valeurs de l'induction magnétique $B = H + 4\pi I$. L'induction augmente indéfiniment avec le champ ; dans les appareils industriels, tels que les électro-aimants des dynamos, il est avantageux d'obtenir des inductions aussi fortes que possible, avec une dépense aussi réduite que possible de courant magnétisant. On se place en un point P, voisin de l'endroit où la courbe d'aimantation cesse de s'élever rapidement, et on emploie au plus des inductions de l'ordre de 15.000. Avec l'acier doux de la figure 235, cette induction correspond à une valeur de I de l'ordre de 1.200 et à un champ de l'ordre de 5 gauss.

La susceptibilité $\chi = I/H$ et la perméabilité $\mu = 1 + 4\pi\chi$ ne sont pas des constantes, mais des fonctions de H. La figure 236 représente la variation

de la perméabilité μ pour l'acier extra-doux de la figure 235; la partie initiale de la courbe a été tracée à part, avec une échelle agrandie des champs. La perméabilité part d'une valeur initiale $\mu_0 = 320$; elle croît très vite dès que le champ dépasse quelques centièmes de gauss, atteint un maximum $\mu_m = 14.800$, pour un champ inférieur à 0,5 gauss, et décroît à nouveau. Quand le champ H augmente indéfiniment, l'intensité d'aimantation I tend vers une limite : la susceptibilité χ tend vers 0, et la perméabilité μ vers l'unité. Le fer aimanté à saturation se comporte comme une substance non magnétique, en ce sens que les variations du champ ne modifient pas son aimantation et y produisent des variations égales de l'induction.

On a pu obtenir avec du fer très pur des perméabilités maxima μ_m dépassant 100 000, pour des champs de l'ordre de 0,1 gauss. Des alliages industriels de fer et de nickel, l'*hypernik* à 50 o/o de nickel et le *permalloy* à 78,5 o/o de nickel, donnent des perméabilités maxima du même ordre, mais leur aimantation à saturation est inférieure de 25 à 30 o/o à celle du fer.

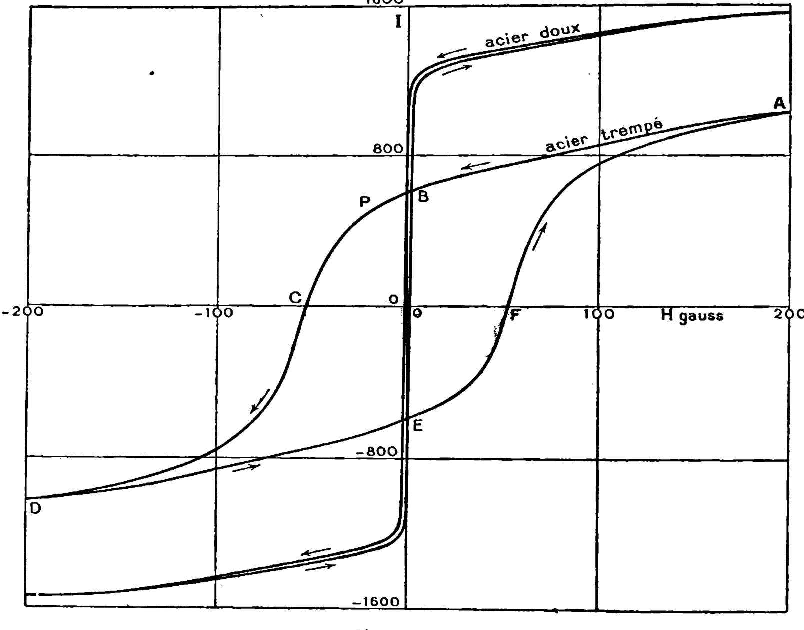


FIG. 237.

196. Hystérésis. — Si, après que le barreau de fer a été aimanté, on fait décroître le champ, l'aimantation diminue, mais, pour chaque valeur du champ, elle conserve une intensité supérieure à celle qu'elle avait au cours de la première aimantation. C'est le phénomène de l'**hystérésis**. Son étude complète est presque impossible, et on peut dire qu'à chaque instant, la valeur de l'aimantation dépend de toutes ses valeurs antérieures. Nous nous bornerons à l'étude du phénomène lorsqu'on fait varier le champ entre deux limites symétriques, + H et — H; lorsque cette opération a été répétée un certain nombre de fois, le phénomène se fixe, et le point figuratif du

diagramme I, H décrit une courbe fermée symétrique, dite **cycle d'hystérésis.**

La figure 237 représente, pour des valeurs assez fortes de H, les courbes d'hystérésis de l'acier extra-doux et de l'acier trempé étudiés au paragraphe précédent. Pour l'acier trempé, en réduisant le champ à partir d'une valeur H = 200, on décrit la partie AB de la courbe, et, lorsque le champ est nul, l'acier conserve une **aimantation rémanente** égale à 595. Pour la faire disparaître, il faut appliquer un champ de sens inverse — H_c, représenté par OC et égal à 52 gauss : c'est le **champ coercitif.** On achève de décrire le cycle en faisant varier le champ de — H_c à — H (partie CD), puis de — H à zéro (partie DE) et de zéro à H (partie EFA).

La trempe et l'écrouissage d'une matière magnétique augmentent en général le champ coercitif, et élargissent le cycle d'hystérésis; le recuit a au contraire pour effet de le rétrécir. Pour l'acier extra-doux deux fois recuit des figures 235 à 237, le champ coercitif n'est plus que 0,37 gauss. C'est d'ailleurs là une valeur exceptionnelle : pour les fers et aciers doux du commerce, le champ coercitif est en général compris entre 1 et 2 gauss. D'ailleurs, la diminution du champ coercitif obtenue par recuit n'est pas toujours très stable : pour des tôles maintenues à quelques dizaines de degrés au-dessus de la température ordinaire, il peut augmenter spontanément, en l'espace de quelques semaines, dans une proportion qui est de l'ordre de grandeur du simple au double : c'est le phénomène du *vieillissement des tôles.*

On emploiera des aciers de l'une ou de l'autre catégorie, suivant l'usage auquel ils sont destinés. Pour les tôles des dynamos, des moteurs, des transformateurs qui doivent être soumises à des champs magnétiques alternatifs, on prendra, pour des raisons que nous développerons dans le prochain paragraphe, des aciers doux à cycles d'hystérésis étroits. Les courbes obtenues par la méthode que nous avons décrite ne peuvent d'ailleurs donner qu'une idée grossièrement approchée de l'hystérésis dans les tôles d'une dynamo. En général, les parties en mouvement ne sont pas soumises à un champ dont l'intensité varie, mais à un champ dont la direction varie, et l'hystérésis a alors pour effet de donner à l'aimantation une direction différente de celle du champ. D'autre part, les tôles sont soumises à des trépidations et des chocs continuels, qui ont sans doute pour effet de rétrécir le cycle d'hystérésis.

Pour la fabrication des aimants permanents, tels que ceux qui entrent dans les magnétos ou les appareils de mesure à cadre mobile, on devra prendre au contraire des aciers trempés. Un aimant permanent se trouve placé normalement dans son champ démagnétisant, c'est-à-dire que son état correspond à un point tel que P (*fig.* 237), et il ne faut pas que son aimantation puisse être détruite lorsqu'on le place dans un champ négatif faible. La condition essentielle que doit remplir un acier à aimants est, non pas d'avoir une aimantation rémanente intense, mais d'avoir un champ coercitif élevé; l'aimant doit autant que possible avoir son circuit magnétique fermé par une armature de fer doux, de façon à réduire le champ démagnétisant. On a fabriqué des aciers au tungstène trempés, dont le champ coercitif atteint 70 gauss, et l'aimantation rémanente 850, et des aciers au cobalt, dont le champ coercitif est encore trois fois plus grand; l'addition de titane à l'acier au cobalt permet même d'atteindre un champ coercitif de 900 gauss, avec une aimantation rémanente de 550 C.G.S.

197. Échauffement par hystérésis. — Dans le champ magnétique créé par un aimant permanent, déplaçons, suivant une ligne de force ox que nous supposons rectiligne (*fig.* 238), une particule de fer de volume v, de forme telle que son champ démagnétisant soit négligeable. La particule étant placée en M a une aimantation I correspondant au point A du cycle d'hystérésis (*fig.* 239). Éloignons-la à l'infini : elle décrit la portion AB de ce cycle et nous recueillons, sous forme de travail, l'énergie (§ 192) :

FIG. 238.

$$W = v \int_x^{\infty} \vec{I}\, \frac{\partial \vec{H}}{\partial x}\, dx = v \int_H^{O} I\, dH = -\, v \int_O^{H} I\, dH = -\, v \times \text{aire } OaAB.$$

Retournons la particule, ce qui n'exige pas de travail, puisqu'elle est dans un champ nul ; ramenons-la en M, éloignons-la de nouveau à l'infini, retournons-la encore une fois, et ramenons-la en M. Nous avons décrit le cycle d'hystérésis ABCDEFA, et nous avons recueilli au total l'énergie :

$$\Sigma\, W = -\, v \times \text{aire ABCDEFA}.$$

Le signe — indique que nous avons fourni un travail, mesuré par le produit du volume de la particule par l'aire du cycle d'hystérésis. Comme le système est revenu à son état initial, il a dû apparaître quelque part une énergie équivalente à ce travail. L'expérience montre qu'elle apparaît sous forme d'énergie calorifique dans la particule ; elle vérifie également que la même quantité de chaleur apparaît dans le fer, que les variations de l'aimantation soient dues à son déplacement dans un champ magnétique constant non uniforme ou à la variation du champ magnétique agissant sur une particule fixe.

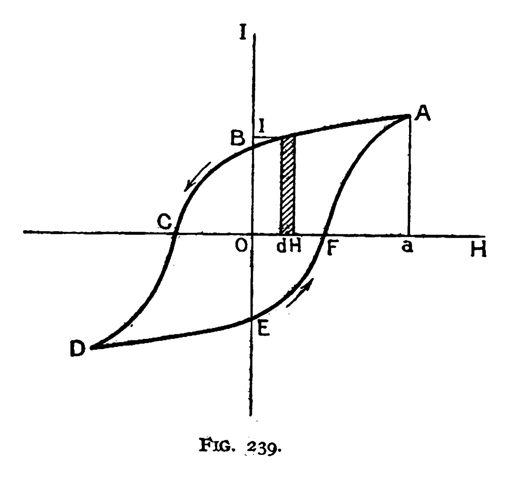


FIG. 239.

Lorsqu'une substance ferromagnétique parcourt un cycle d'hystérésis, il apparaît, dans chaque unité de volume de cette substance, une quantité de chaleur équivalente au travail mesuré par l'aire du cycle d'hystérésis, $\int I dH$.

Cette dissipation d'énergie par hystérésis constitue un phénomène irréversible, qui réduit le rendement des moteurs et générateurs industriels. C'est pour la rendre plus faible qu'on emploie dans ces appareils des aciers doux,

à cycle d'hystérésis aussi étroit que possible. Sa valeur dépend à la fois de la nature de l'acier et des limites d'aimantation entre lesquelles est compris le cycle d'hystérésis. Dans la pratique industrielle, on calcule l'énergie W dépensée par unité de volume par une formule empirique, dite *formule de Steinmetz* :

$$W = \eta B^{1,6}$$

où B est l'induction maximum, correspondant aux extrémités du cycle, et η un coefficient qui dépend de la nature du métal. La valeur de ce coefficient, pour l'acier trempé de la figure 237, est 0,0337, pour l'acier extra-doux de la même figure 0,00054. Pour les fers et aciers doux du commerce, il est en général compris entre 0,001 et 0,002.

Calculons, par exemple, l'énergie dissipée par hystérésis dans chaque centimètre cube d'un acier doux pour lequel $\eta = 0{,}0015$, parcourant un cycle compris entre B = + 15.000 et B = — 15.000 C. G. S. On a :

$$W = 0{,}0015 \cdot (15.000)^{1,6} = 7.200 \text{ ergs.}$$

Pour les fréquences usuelles, la perte par cycle est indépendante du temps mis à parcourir le cycle. Si l'acier parcourt 50 cycles par seconde (fréquence usuelle des courants alternatifs), la perte d'énergie, par centimètre cube et par seconde, est $7.200 \times 50 = 3{,}6 \cdot 10^5$ ergs ; la puissance dissipée est, par centimètre cube, 0,036 watt.

III. — *APPLICATIONS*

198. Généralités. — Plaçons, dans le champ magnétique sensiblement uniforme qui existe entre les extrémités d'un aimant en fer à cheval NS (*fig.* 240), un noyau de fer doux ABCD. Il s'aimante, et son aimantation crée un champ magnétique, dont les lignes de force ont la forme représentée schématiquement par la figure 241 ; entre la face AB et le pôle N, entre la face CD et le pôle S, le champ du noyau est de même sens que celui de l'aimant ; au-dessus de la face BD et au-dessous de la face AC, il est de sens opposé. L'introduction du fer doux augmente le champ dans l'**entrefer**, le réduit dans les parties latérales; son effet est d'infléchir les lignes de force (*fig.* 242), qui semblent se déplacer pour venir aboutir en plus grand nombre au noyau de fer doux : on peut s'en rendre compte par l'expérience du spectre magnétique. D'autre part, le champ créé par le noyau dans les parties de l'aimant NS qui se trouvent en face de lui y diminue le champ démagnétisant : leur aimantation augmente, et cet effet se superpose au premier pour augmenter le champ dans l'entrefer : il devient d'autant plus intense que l'entrefer est plus étroit.

On peut employer un autre langage, en considérant les lignes d'induction. Elles sont identiques dans l'air aux lignes de force, mais elles peuvent être prolongées à l'intérieur de l'aimant et du noyau de fer doux, de façon à constituer des courbes fermées ; on sait d'autre part que le flux d'induction est conservatif (§ 113), et est le même à travers toutes les sections d'un même

tube d'induction. Nous pouvons alors dire que les tubes d'induction se déforment de façon à venir traverser le noyau de fer, et que le fer canalise le flux d'induction. C'est cette propriété du fer, d'être plus perméable au flux d'induction que l'air, que rappelle le mot de *perméabilité* employé pour désigner le rapport B / H.

On remarquera que, si l'aimant est assez long pour que le champ démagnétisant soit nul dans la section EF, l'aimantation et l'induction dans cette section ne sont pas modifiées. Le flux d'induction total reste le même; seule,

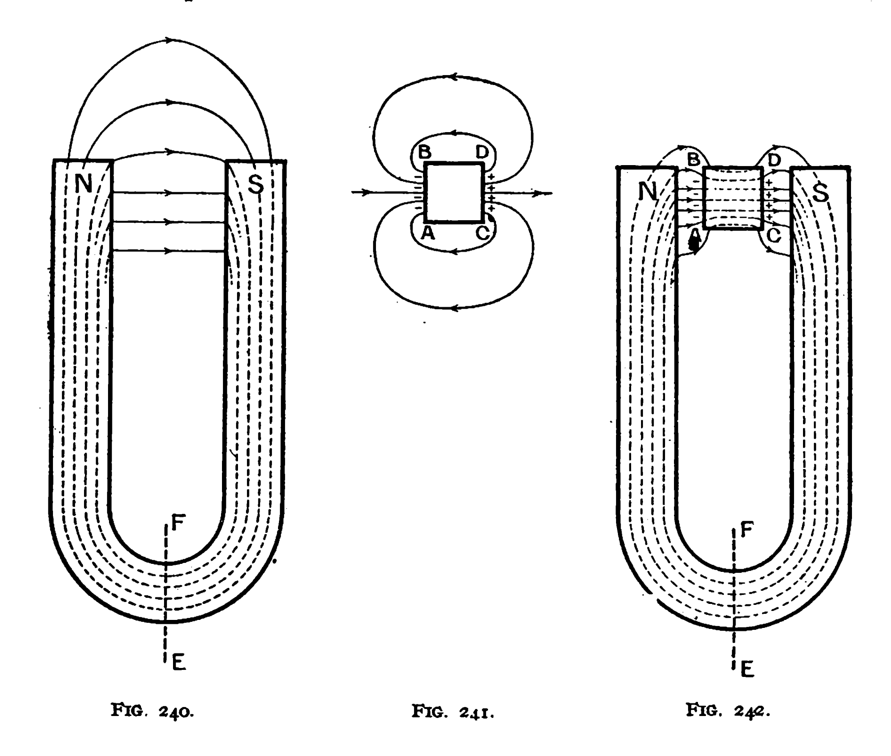


FIG. 240. FIG. 241. FIG. 242.

sa répartition est modifiée par l'introduction du noyau de fer, et, si l'entrefer est très étroit, on peut admettre qu'il passe tout entier à travers ce noyau.

Rappelons encore que, par suite de la valeur élevée du rapport B / H pour le fer doux, les lignes de force dans l'air au voisinage du noyau sont normales à sa surface ; si les lignes d'induction dans le fer sont aussi normales à cette surface, le champ magnétique dans l'air est égal à l'induction dans le fer, en vertu de la continuité de la composante normale de l'induction (§ 114).

Soit maintenant un solénoïde B parcouru par un courant d'intensité i : il crée un champ magnétique, dont les lignes de force — ou les lignes d'induction — ont la forme représentée par la figure 243. En un point M intérieur au solénoïde, le champ est $H = 4\pi ni$, et le flux d'induction à travers la section S du solénoïde est $\Phi = HS$. Introduisons dans le solénoïde un barreau de fer doux de section S ; si le solénoïde et le barreau sont infiniment longs,

le champ démagnétisant est nul, l'induction en M devient $B = \mu H$ et le flux d'induction devient $\Phi' = \mu\Phi$: il est multiplié par la perméabilité du fer. On remarquera d'ailleurs qu'il n'est, en général, pas possible de négliger le champ démagnétisant : nous avons vu au paragraphe 194 qu'il faudrait que la longueur du barreau soit de l'ordre de 1.000 fois son diamètre.

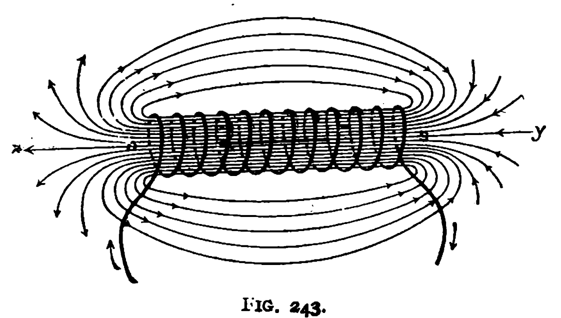


FIG. 243.

De même, si l'on approche des pôles d'un électro-aimant en fer à cheval une armature de fer doux (*fig.* 244), on pourra répéter les raisonnements faits sur l'aimant permanent : si l'entrefer est assez étroit, le flux d'induction est entièrement canalisé par le fer. Mais, comme l'aimantation du fer doux qui constitue les noyaux de l'électro est beaucoup plus forte, et surtout varie beaucoup plus vite avec le champ que celle de l'acier trempé qui constitue l'aimant permanent, il ne sera, en général, plus possible de négliger la variation du champ démagnétisant dans la section EF. Le flux total augmentera à mesure que l'approche de l'armature réduira le champ démagnétisant.

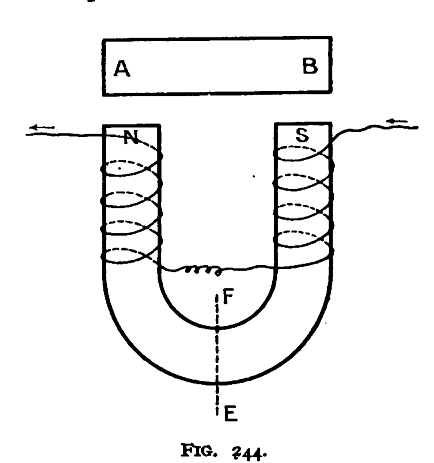


FIG. 244.

199. Circuits magnétiques. — De nombreux appareils employés dans la pratique industrielle se composent d'une carcasse de fer doux C sur laquelle sont enroulées des bobines BB' parcourues par des courants (*fig.* 245) ; le fer y forme quelquefois un **circuit magnétique** fermé ; le plus souvent il est interrompu par une coupure étroite E, dite **entrefer,** et on utilise le champ magnétique qui existe dans l'entrefer.

Les considérations développées dans le paragraphe précédent permettent de tracer approximativement les lignes d'induction : elles suivent le circuit dessiné par la carcasse de fer et traversent l'entrefer normalement, d'une surface à l'autre. Si le circuit magnétique est traversé par le flux d'induction Φ et si la section de l'entrefer est S, le champ y est $H = \frac{\Phi}{S}$. Le calcul du champ magnétique dans l'entrefer se ramène au calcul du flux d'induction total Φ.

Le calcul s'effectue, dans la pratique industrielle, par une règle déduite du théorème d'Ampère (§ 186). Considérons une ligne d'induction L qui traverse, dans le même sens, N spires parcourues par un courant d'intensité i : la circulation du champ magnétique $\int_L H\, ds$ le long de cette ligne est égale

à $4\pi Ni$, quels que soient les milieux traversés, et quelle que soit l'aimantation du fer : il n'y a pas à tenir compte de cette dernière, parce que le champ qu'elle crée dérive d'un potentiel, et que sa circulation est nulle le long d'un contour fermé. Considérons alors, autour de la ligne L, un tube d'induction T, et soit $d\Phi$ le flux d'induction à travers une section quelconque de ce tube. En un point M où cette section est dS, l'induction

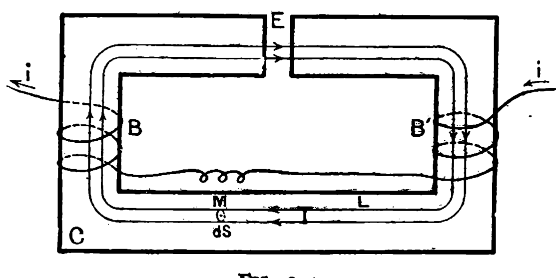


FIG. 245.

est $B = \frac{d\Phi}{dS}$, et le champ $H = \frac{B}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{d\Phi}{dS}$. Le théorème d'Ampère a pour expression :

$$\int_L \frac{1}{\mu}\frac{d\Phi}{dS}\,ds = 4\pi Ni, \qquad \text{ou} \qquad 4\pi Ni = r\,d\Phi, \qquad \text{avec} \qquad r = \int_L \frac{1}{\mu}\frac{ds}{dS},$$

Le flux total Φ est la somme des flux $d\Phi$ à travers les différents tubes d'induction. On a :

$$\Phi = \iint d\Phi = \frac{4\pi Ni}{R}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{R} = \iint \frac{1}{r}.$$

L'expression obtenue pour le flux d'induction dans un circuit magnétique est analogue à celle que donne la loi d'Ohm pour l'intensité du courant dans un circuit électrique. La quantité $4\pi Ni$, qui joue le rôle de la force électromotrice, s'appelle la **force magnétomotrice** ; la quantité R, qui joue le rôle de la résistance, s'appelle la **réluctance.** Les formules qui la définissent sont identiques à celles qui définissent la résistance d'un conducteur non linéaire (§ 145) : il suffit d'y remplacer la conductivité par la perméabilité.

Pour l'emploi pratique de cette formule, on se rappellera que la relation $B = \mu H$ n'est valable qu'en u. é. m. (§ 190) ; si l'on se donne la valeur i_a du courant en ampères, la force magnétomotrice en u. é. m. est $\frac{4\pi Ni_a}{10}$. Le nombre Ni_a est le nombre d'**ampères-tours** magnétisants.

Si l'on voulait faire les calculs en unités pratiques, en prenant $4\pi Ni_a$ pour valeur de la force magnétomotrice, on pourrait (§ 190) remplacer μ par $\mu\mu_0$, avec $\mu_0 = 10^{-7}$ (§ 134) et exprimer les longueurs en mètres : le flux Φ serait alors exprimé en unités pratiques, valant 10^8 maxwells (§§ 134 et 277).

La perméabilité μ du fer n'est pas une grandeur définie : elle dépend de la valeur de l'induction B. Dans la pratique, on prend généralement comme point de départ la valeur de l'induction qu'on désire obtenir : il est facile de choisir la valeur de μ qui correspond à cette induction pour l'acier employé. Les phénomènes d'hystérésis empêchent également la perméabilité d'avoir

une valeur définie : mais on remarquera que, pour les aciers doux et les inductions élevées, les deux branches du cycle d'hystérésis sont suffisamment rapprochées pour qu'il n'y ait pas à tenir compte de ces phénomènes.

On effectue toujours le calcul de la réluctance en adoptant pour chaque partie du circuit magnétique une valeur moyenne de la section et de la longueur, et en le traitant comme une suite de conducteurs linéaires $\left(R = \sum \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}\right)$. Des formules empiriques permettent de faire les corrections nécessaires pour tenir compte des angles, des joints des tôles, etc.

Le théorème des circuits magnétiques ne donne jamais qu'une valeur assez grossièrement approchée du flux d'induction. Il y a toujours des *fuites magnétiques* : certaines lignes d'induction sortent du fer, et leur faisceau s'épanouit un peu à la traversée de l'entrefer. On en tient compte, pour chaque type d'appareil, en multipliant la valeur trouvée par un coefficient empirique, inférieur à l'unité.

200. Électro-aimants. — Nous nous bornerons à de très brèves indications sur ces appareils, dont le schéma est celui de la figure 245. Ce sont à peu près les seuls appareils employés pour la production des champs magnétiques.

La production d'un flux magnétique donné exige d'autant plus d'ampères-tours que la réluctance du circuit $\left(R = \sum \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}\right)$ est plus grande : d'où la nécessité de donner aux noyaux des électro-aimants des formes courtes et larges. Pour obtenir des champs très intenses, on est obligé de donner à l'induction dans le fer des valeurs très élevées, qui correspondent à des valeurs faibles de sa perméabilité μ : lorsqu'on se trouve dans la partie descendante de la courbe des perméabilités (*fig.* 236), le champ produit augmente beaucoup moins vite que le courant dépensé. C'est pourquoi on n'a pas intérêt, dans la pratique industrielle, à rechercher des valeurs très élevées du champ. Le champ dans l'entrefer d'une dynamo est en général de l'ordre de 10.000 à 12.000 gauss, et la perméabilité peut conserver, dans les noyaux des électro-aimants, une valeur de l'ordre de 1.000. Il est important de réduire autant que possible l'épaisseur de l'entrefer, puisque, au point de vue de la réluctance, une longueur des lignes d'induction de 1 millimètre dans l'air est équivalente à une longueur dans le fer μ fois plus grande, soit de l'ordre de 1 mètre.

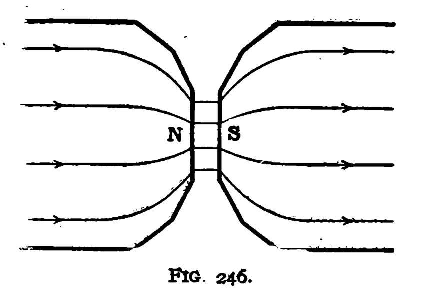


FIG. 246.

Les électro-aimants de laboratoire sont en général munis de pièces polaires coniques, dans lesquelles les lignes d'induction se resserrent (*fig.* 246). Les noyaux des bobines conservent une large section et une aimantation faible, et, par conséquent une réluctance peu élevée. Les pièces polaires sont au contraire saturées et l'induction $B = H + 4\pi I$ à leur extrémité, induction à laquelle est égal le champ dans l'entrefer, est très élevée. L'aimantation à saturation I est

celle du fer doux. Quant au champ H, on l'accroît en plaçant les bobines aussi près que possible de l'entrefer, et en y faisant passer un courant aussi intense que possible : on augmente les densités de courant admissibles en constituant les conducteurs par des tubes de cuivre refroidis par un courant d'eau qui les

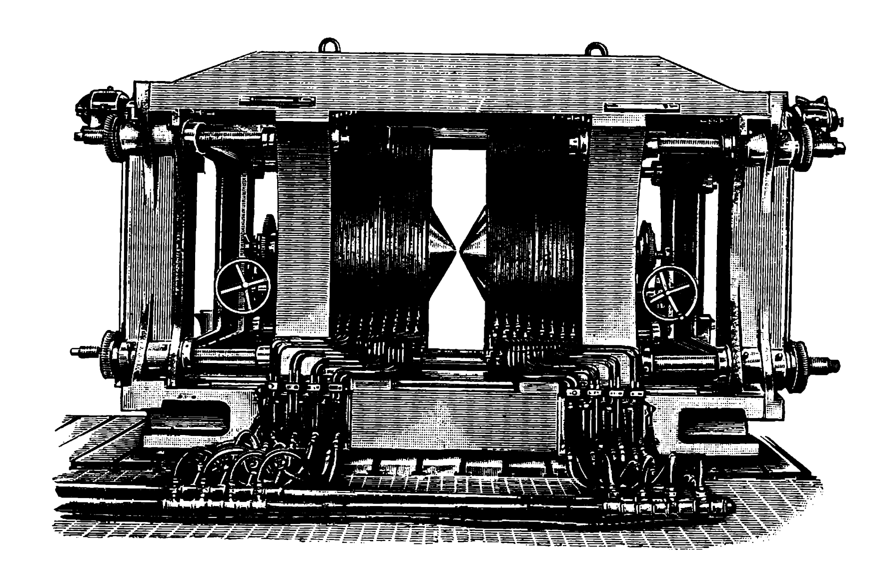


Fig. 247.

parcourt. L'électro-aimant de Bellevue, que représente la figure 247, pèse 120 tonnes, et possède des bobines de $1^{m},90$ de diamètre; avec une puissance consommée de 100 kilowatts, il fournit un champ de l'ordre de 50.000 gauss dans un entrefer d'une vingtaine de centimètres cubes.

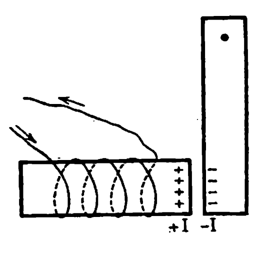


Fig. 248.

Il semble qu'on soit arrivé à la limite des champs magnétiques que peuvent donner les électro-aimants, et qu'on ne pourra aller plus loin que par l'emploi de bobines sans fer parcourues par des courants exceptionnellement intenses. En fermant en court-circuit sur une telle bobine un alternateur de 2.000 kilowatts de construction spéciale, Kapitza a réussi récemment (1927) à obtenir pendant un temps très court, de l'ordre du centième de seconde, un courant de 72.000 ampères et à réaliser ainsi un champ supérieur à 300.000 gauss.

Les électro-aimants sont employés dans une foule d'appareils où l'on utilise l'attraction qu'ils exercent sur une armature de fer doux, soit pour soulever des objets pesants, soit pour commander la manœuvre d'une pièce mobile. On peut calculer approximativement la force d'attraction, en la considérant comme résultant de l'action l'une sur l'autre de deux couches de magnétisme

de densités superficielles + I et — I (*fig.* 248) : la première crée un champ égal à $2\pi I$ et la seconde est soumise, par unité de surface, à une force $f = 2\pi I^2$. Exprimons cette force en fonction de l'induction, qui est donnée par le calcul du circuit magnétique : on a $B = H + 4\pi I$, et comme H est toujours petit vis-à-vis de B, on peut le négliger, et prendre $I = \frac{B}{4\pi}$. La **force portante** par unité de surface est alors :

$$f = 2\pi \left(\frac{B}{4\pi}\right)^2 = \frac{B^2}{8\pi}$$

Avec une induction B de 15.000, on peut obtenir une force portante d'environ 9 millions de dynes ou 9 kilogrammes par centimètre carré.

La force avec laquelle l'armature est attirée augmente quand l'induction augmente. Pour une valeur donnée du courant magnétisant, elle est d'autant plus grande que l'armature est plus rapprochée et la réluctance du circuit plus faible ; sa valeur augmente notablement quand l'armature vient au contact du noyau et que la réluctance de l'entrefer est supprimée.

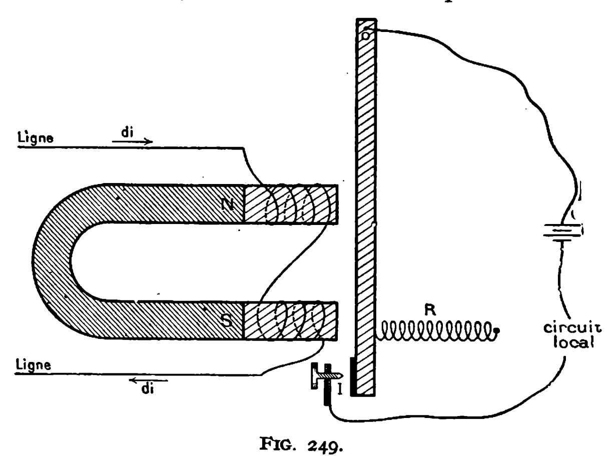


FIG. 249.

La force est proportionnelle au carré de l'induction : pour une variation dB de l'induction, la variation $\frac{1}{4\pi} B dB$ de la force est d'autant plus faible que l'induction est plus faible. Cette circonstance est très désavantageuse pour la construction des appareils tels que les **relais** employés en télégraphie, qui doivent être actionnés par les courants très faibles transmis par de longues lignes. On obtient une plus grande sensibilité en employant des **relais polarisés** (*fig.* 249). On aimante légèrement le noyau par l'action d'un aimant permanent NS, et on équilibre la force d'attraction correspondante par un ressort R ; comme B n'est jamais nul, un faible courant *di* peut produire une variation $\frac{B\, dB}{4\pi}$ de la force assez grande pour provoquer le déplacement de l'armature et fermer par un contact I un circuit local parcouru par un courant relativement intense.

200 *bis*. Aimants permanents. — Les procédés utilisés pour calculer le champ dans l'entrefer d'un électro-aimant peuvent être étendus aux appareils dans lesquels le champ magnétique est produit par un aimant permanent muni

d'armatures de fer doux limitant un entrefer étroit (§ 198). Imaginons par exemple qu'un barreau aimanté cylindrique NS, de longueur L et de section S, soit muni d'armatures de fer doux de la forme que représente la figure 249 *bis*, de façon à produire un champ h dans un entrefer AB, de longueur l et de section s. Si la perméabilité du fer des armatures est très grande, les lignes d'induction ont la forme qu'indique la figure, et l'on peut admettre, en première approximation, que le champ h est uniforme dans tout le volume de l'entrefer, et qu'il en est de même du champ H et de l'induction B dans tout le volume de l'aimant.

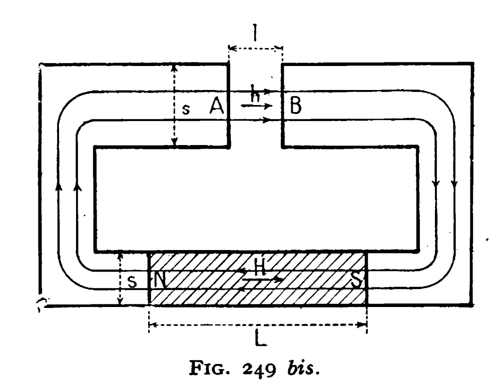


FIG. 249 *bis*.

En vertu de la conservation du flux d'induction, le flux hs à travers l'entrefer est égal au flux d'induction BS qui traverse une section de l'aimant. D'autre part, le champ magnétique d'un système d'aimants dérive d'un potentiel (§ 113) et sa circulation $\int H\, dl$ le long d'une ligne d'induction est nulle ; mais, à cause de la très grande perméabilité du fer doux, le champ magnétique y est négligeable (§ 114) et la circulation le long de la ligne d'induction se réduit aux deux termes hl et HL relatifs à l'entrefer et à l'aimant. On obtient donc les deux relations :

$$hs = BS \qquad hl + HL = 0,$$

que l'on peut remplacer par les relations équivalentes :

$$\frac{B}{H} = -\frac{s}{S}\frac{L}{l}, \qquad SL = -\frac{h^2}{BH} sl.$$

La première exprime que l'aimant est placé dans un champ H négatif, qui est son champ démagnétisant, et permet (*fig.* 249 *ter*) de déterminer son point de fonctionnement P (§ 196) par l'intersection du cycle d'hystérésis construit avec H et B comme coordonnées, de l'acier qui le constitue avec la droite OP du coefficient angulaire — sL/Sl. La seconde permet de calculer le volume $V = SL$ qu'il faut donner à l'aimant pour produire un champ donné h dans un entrefer de volume $v = sl$ donné : on voit que V varie en raison inverse du produit BH.

Pour réduire au minimum le volume à donner à l'aimant, il faut choisir le rapport L/S de sa longueur à sa section de façon que la position du point P sur l'arc RC du cycle d'hystérésis soit celle pour laquelle le produit BH est maximum. L'expérience montre que l'arc RC diffère peu d'un arc d'hyperbole équilatère à asymptotes parallèles aux axes, et il en résulte que la droite OP correspondant au maximum du produit BH a pour coefficient angulaire $-B_r/H_c$ (fig. 249 *ter*), en désignant par H_c le champ coercitif et par B_r l'induction

rémanente de l'acier de l'aimant : on prendra donc le rapport L /S égal à lB_r/sH_c. On remarquera qu'avec les aciers à aimants modernes, à grand champ coercitif, le rapport B /H est alors assez faible, de l'ordre de 10 à 20.

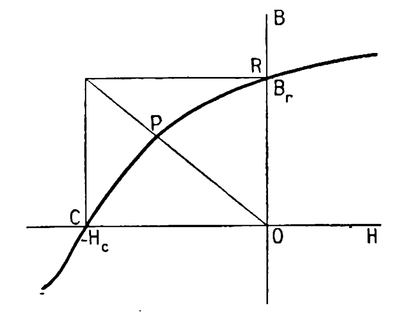


FIG. 249 ter.

Si l'on compare entre eux des aimants fabriqués avec des aciers différents et capables de donner le même champ dans le même entrefer, celui qui a le plus petit volume est celui pour lequel la valeur maximum $(BH)_m$ du produit BH est la plus grande. Pour les différents aciers, cette valeur $(BH)_m$ est sensiblement proportionnelle au produit B_rH_c de l'induction rémanente par le champ coercitif ; d'autre part, lorsqu'on passe d'un acier à un autre, la variation relative de l'induction rémanente est généralement très inférieure à celle du champ coercitif : ainsi se justifie l'intérêt, que nous avons indiqué à la fin du paragraphe 196, de l'accroissement du champ coercitif. Mais si l'on veut une caractérisation précise de la valeur d'un acier à aimants, elle ne peut être donnée que par la considération du produit (BH) : le tableau ci-dessous, donnant les caractéristiques de divers aciers, montre les progrès réalisés à ce point de vue depuis un demi-siècle :

	H_c	B_r	$(BH)_m$
	—	—	—
Acier ancien (1890)	80	8.000	$0{,}2 \cdot 10^6$
Acier au tungstène (1910)	62	12.000	0,3 —
Acier au cobalt (1921)	210	8.500	0,9 —
Acier au nickel, cobalt, titane (1934)	850	7.000	1,6 —
Acier au nickel, cobalt, aluminium, cuivre (1940)	650	12.000	5,2 —

C'est grâce à ces progrès de la métallurgie et au calcul correct de la forme à donner aux aimants que l'on arrive maintenant à produire dans l'entrefer d'un galvanomètre un champ de 3.000 à 4.000 gauss, alors qu'on ne dépassait pas autrefois 1000 gauss, et que l'on a pu diviser par 5 ou 6 le poids et l'encombrement des aimants employés dans les compteurs électriques et dans les haut-parleurs.

CHAPITRE XX

DIÉLECTRIQUES

I. — *ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE*

201. Polarisation du diélectrique. — L'une des hypothèses fondamentales (§ 20) dont nous avons déduit tous les théorèmes de l'électrostatique est qu'une charge électrique ponctuelle, mesurée en u. é. s. par un nombre q, crée un champ électrique égal à $\frac{q}{r^2}$, quel que soit le milieu où elle est placée. Lorsque ce milieu est un diélectrique autre que le vide, il faut tenir compte, pour le calcul du champ, de l'action des charges qui s'y développent ; il faut ajouter, aux hypothèses fondamentales, une hypothèse sur la nature de ces charges.

Cette hypothèse est celle de la **polarisation du diélectrique.** La polarisation d'un diélectrique peut être comparée à l'aimantation d'une substance paramagnétique. Un élément de volume dv d'une substance paramagnétique placé dans un champ magnétique $\vec{H}$ devient un aimant élémentaire — un doublet magnétique — de moment magnétique $\vec{I}\,dv$, et l'aimantation $\vec{I}$ est proportionnelle au champ $\vec{H}$. De même, nous admettrons qu'un élément de volume dv d'un diélectrique placé dans un champ électrique $\vec{E}$ devient un doublet électrique, de moment électrique $\vec{P}\,dv$. La **polarisation** $\vec{P}$ est un vecteur, de même direction et de même sens que le champ $\vec{E}$, qui lui est proportionnel :

$$\vec{P} = k\vec{E}.$$

Le coefficient k caractérise le diélectrique : nous l'appellerons sa **susceptibilité diélectrique.**

202. Champ et induction électrostatiques. — Les actions exercées et subies par le doublet électrique de moment électrique $\vec{P}\,dv$ peuvent se calculer par l'application de la loi de Coulomb, en le remplaçant par deux masses électriques $+ q$ et $- q$, situées en deux points A et B définissant un vecteur $\vec{BA} = \vec{dl}$ (*fig.* 250), tel qu'on ait $q\,\vec{dl} = \vec{P}\,dv$. Nous avons déjà développé

ce calcul pour les actions exercées par le doublet magnétique : nous n'avons qu'à appliquer les résultats obtenus, en remplaçant les grandeurs magnétiques par les grandeurs électriques correspondantes. Nous ferons tous les calculs en prenant l'expression de la loi de Coulomb sous la forme $f = qq'/r^2$, c'est-à-dire en prenant son coefficient ε_0 égal à l'unité : toutes les grandeurs doivent être mesurées dans le système électrostatique, et toutes les formules que nous donnerons ne sont valables que dans ce système. La constante k, comme la constante ε que nous définirons tout à l'heure, sont alors indépendantes de la grandeur des unités fondamentales (cf. § 190).

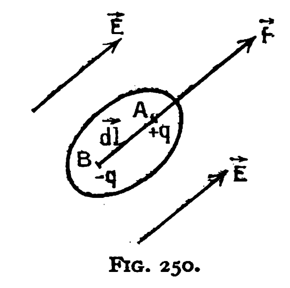


FIG. 250.

Le champ électrique $\vec{E}$ créé en un point extérieur par un volume v rempli du diélectrique est le même que celui d'un système de masses électriques, réparties à la surface du diélectrique avec une densité superficielle $\sigma = P_n$ et dans le volume du diélectrique avec une densité cubique $\rho = -\operatorname{div}\vec{P}$ (§§ 109 et 110). Il dérive du potentiel newtonien $V = \iint \frac{\sigma dS}{r} + \iiint \frac{\rho dv}{r}$ créé par cette distribution de masses agissantes. Cette expression définit une fonction potentiel continue en tous les points de la surface et du volume du diélectrique : conformément à l'hypothèse fondamentale rappelée au début de ce chapitre, nous admettrons que le **champ électrique** en un point du diélectrique *est le champ qui dérive du potentiel newtonien* $V = \sum \frac{q}{r}$, *où les charges comprennent les charges qui créent le champ primitif et les charges* σ *et* ρ *représentatives de la polarisation.*

De même que nous avons défini l'induction magnétique (§ 112), nous définirons en un point du diélectrique l'**induction électrostatique** :

$$\vec{B} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \varepsilon = 1 + 4\pi k.$$

La constante ε pourrait être appelée la perméabilité diélectrique : nous verrons tout à l'heure qu'elle est identique au **pouvoir inducteur spécifique** défini expérimentalement au paragraphe 54, et nous la désignerons dès maintenant de ce nom.

Le flux du vecteur induction électrostatique est conservatif dans toute région de l'espace ne contenant pas de masses agissantes autres que les charges de polarisation : en un point du diélectrique, on a $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, et comme le vecteur $\vec{B}$ est proportionnel aux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{P}$, on a aussi $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ et $\operatorname{div}\vec{P} = 0$. Il résulte de cette propriété que la densité cubique $\rho = -\operatorname{div}\vec{P}$ est toujours nulle. *L'action d'un certain volume de substance diélectrique peut toujours être remplacée par l'action d'une couche superficielle de densité* $\sigma = P_n$, *répartie sur la surface qui limite ce diélectrique.*

Il en résulte aussi que *le potentiel satisfait, à l'intérieur du diélectrique, à l'équation de Laplace*, $\Delta V = 0$, car on a $\Delta V = -\operatorname{div} \vec{E}$.

Nous n'avions pas trouvé de propriétés analogues à ces deux dernières dans l'étude des aimants : c'est que nous avions supposé $\vec{H}$ et $\vec{I}$ indépendants l'un de l'autre, ce qui est effectivement réalisé dans le magnétisme du fer. Ici, au contraire, nous supposons toujours les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{E}$ proportionnels ; les propriétés correspondantes sont analogues à celles des substances para- et diamagnétiques.

A la surface de séparation de deux diélectriques, les conditions de passage sont les mêmes qu'à la surface de séparation de deux milieux aimantés (§ 114) : *il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique* (*fig.* 251) *et de la composante normale de l'induction électrostatique :*

$$E_t = E'_t, \qquad B_n = B'_n, \qquad \varepsilon E_n = \varepsilon' E'_n$$

Le champ et l'induction électrostatique ont toujours même direction : les lignes d'induction coïncident avec les lignes de force. *Le flux du vecteur induction électrostatique est le même à travers les différentes sections d'un tube de force qui traverse la surface de séparation ; il y a à cette surface une réfraction des lignes de force* (*fig.* 252), donnée par :

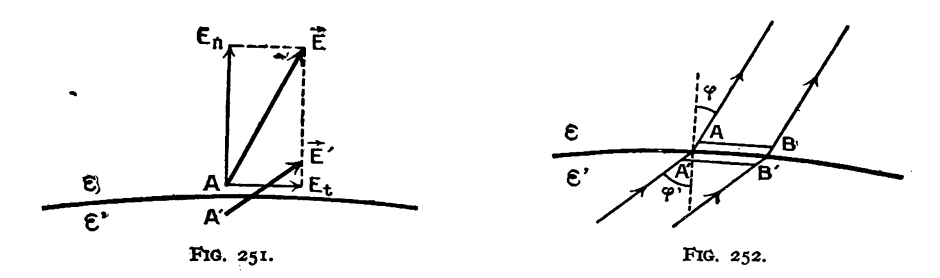


FIG. 251. FIG. 252.

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\varepsilon} = \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\varepsilon'}.$$

Ces relations ne s'appliquent que si la surface de séparation des deux diélectriques ne porte pas de charges électriques autres que celles qui représentent la polarisation. On pourra, par exemple, les appliquer si l'on introduit une plaque de paraffine entre les plateaux d'un condensateur plan ; mais on ne pourra plus les appliquer si l'on électrise la surface de la plaque de paraffine, en la frottant avec une peau de chat ; on aurait alors à tenir compte, dans le calcul de la valeur du champ, de la charge créée par le frottement.

203. Théorèmes de Gauss et de Coulomb. — Considérons maintenant la surface de séparation d'un conducteur C et d'un diélectrique, de pouvoir inducteur spécifique ε, ne contenant pas d'autres charges que celles de polarisation. En vertu des propriétés qui définissent le conducteur, cette surface

est une surface équipotentielle, et le champ électrique $\vec{E}$ en un point infiniment voisin lui est normal.

Reprenons, dans le cas actuellement considéré, la démonstration donnée au paragraphe 29 du théorème de Coulomb (*fig.* 253). Les charges électriques qui créent le champ comprennent les charges portées par le conducteur, avec une densité superficielle σ, et les charges représentatives de la polarisation, réparties à la surface du diélectrique avec une densité $\sigma' = P_n$. Lorsqu'on tient compte de toutes ces charges, le champ dérive d'un potentiel, qui a toujours pour expression $\sum \frac{q}{r}$; ses propriétés sont les propriétés habituelles, et on peut appliquer le théorème de Gauss. Le flux de force à travers la surface fermée A'B'BCAA', $\Phi = EdS$, est égal au produit par 4π des charges $\sigma dS + \sigma' dS$ qu'elle contient, et on a $E = 4\pi(\sigma + \sigma')$. Le vecteur $\vec{P}$, comme le vecteur $\vec{E}$, est normal à la surface du conducteur : nous les compterons tous deux positivement vers l'extérieur du conducteur, donc vers l'intérieur du diélectrique, et nous aurons $\sigma' = -P$. L'expression du théorème de Gauss est alors :

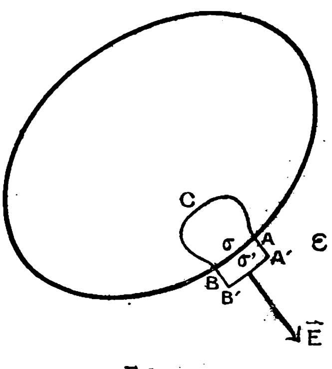


FIG. 253.

$$E = 4\pi(\sigma - P), \qquad E + 4\pi P = 4\pi\sigma,$$

ou, avec les notations du paragraphe précédent ($B = E + 4\pi P = \varepsilon E$) :

$$B = 4\pi\sigma, \qquad E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon},$$

$$\sigma + \sigma' = \frac{E}{4\pi} = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

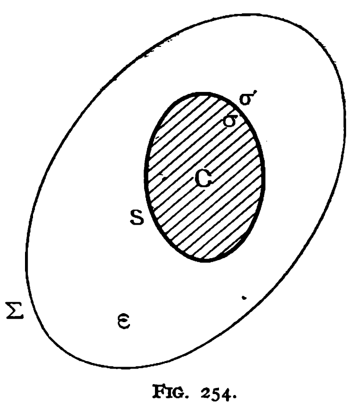


FIG. 254.

Pour une même charge superficielle σ *du conducteur, le champ électrique* E *au voisinage est* ε *fois plus petit lorsqu'il est au contact du diélectrique que lorsqu'il est dans le vide. L'induction électrostatique* B *est la même.*

Supposons maintenant le conducteur C entièrement entouré du diélectrique de pouvoir inducteur spécifique ε ; considérons une surface fermée Σ (*fig.* 254), tout entière à l'intérieur du diélectrique, et entourant complètement le conducteur C. Pour appliquer le théorème de Gauss à la surface Σ, nous devons admettre qu'elle contient les masses σ et les masses σ' ; en chaque point de la surface S du conducteur on a $\sigma + \sigma' = \frac{\sigma}{\varepsilon}$; la charge totale contenue à l'intérieur de la surface Σ, $\iint_S (\sigma + \sigma')dS = \frac{1}{\varepsilon}\iint_S \sigma dS$, est égale à $\frac{q}{\varepsilon}$ en désignant par q la charge totale du conducteur.

Ce résultat se généralise immédiatement à un nombre quelconque de conducteurs. A l'énoncé ordinaire du **théorème de Gauss,** qu'on ne peut appliquer qu'en tenant compte des charges représentatives de la polarisation, nous pouvons substituer l'énoncé suivant, dans lequel n'interviennent que les charges réellement apportées à l'intérieur de la surface Σ :

Le flux de force du champ électrique à travers une surface fermée prise dans un diélectrique homogène de pouvoir inducteur spécifique ε est égal en u. é. s. au produit par $\frac{4\pi}{\varepsilon}$ de la charge électrique totale placée à l'intérieur de cette surface.

Il en résulte, puisque l'on a toujours $\vec{B} = \varepsilon \vec{E}$, que :

Le flux du vecteur induction électrostatique à travers une surface fermée quelconque est égal au produit par 4π de la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface.

Ce dernier énoncé du théorème de Gauss est applicable même au cas d'un milieu diélectrique hétérogène, en vertu de la conservation du flux d'induction lorsque les lignes d'induction traversent la surface de séparation de deux diélectriques.

204. Équilibre des conducteurs dans un milieu diélectrique. — Supposons que, dans un milieu diélectrique homogène indéfini, ou, ce qui revient au même, dans une enceinte métallique fermée entièrement remplie du diélectrique, et maintenue au potentiel o, soient placés des conducteurs isolés les uns des autres. La fonction potentiel V a une valeur constante sur la surface de chaque conducteur, est nulle à l'infini, et on a, en chaque point de l'espace rempli du diélectrique homogène, $\Delta V = 0$. Ces conditions sont exactement les mêmes que celles auxquelles doit satisfaire la fonction potentiel dans le problème de l'équilibre des conducteurs dans le vide (§ 37) ; la solution générale du problème est la même; si l'on se donne la valeur du potentiel sur chaque conducteur, la solution du problème particulier ainsi défini est aussi la même.

Étant donné un système de conducteurs S_0 *placé dans le vide, et le système* S *qu'on obtient en remplissant tout l'espace d'un diélectrique homogène, si les différents conducteurs sont portés à des potentiels donnés* V_0, V_0', V_0'', ..., *la répartition des potentiels* V *dans l'espace et la valeur du champ électrique en chaque point,* $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, *sont les mêmes dans les deux cas.*

Mais les charges portées par les conducteurs sont différentes : les densités superficielles σ_0 et σ, en un même point de la surface d'un des conducteurs des systèmes S_0 et S, sont données, en fonction du champ E en un point voisin, par les relations qui expriment le théorème de Coulomb :

$$\sigma_0 = \frac{E}{4\pi}, \qquad \sigma = \varepsilon \frac{E}{4\pi} = \varepsilon\sigma_0.$$

Les conducteurs étant maintenus à des potentiels constants, les charges électriques totales Q, Q', ... *portées par les conducteurs du système* S *sont* ε *fois plus grandes que les charges correspondantes* Q_0, Q'_0, ... *du système* S_0 :

$$Q = \varepsilon Q_0, \qquad Q' = \varepsilon Q'_0 \qquad \dots\dots$$

Les relations qui permettent de calculer les charges, connaissant la fonction potentiel, sont linéaires, pour le système S comme pour le système S_0. Les théorèmes démontrés pour le système S_0, concernant l'addition des états d'équilibre (§ 38) et la possibilité de définir entièrement l'état d'équilibre, en se donnant la valeur du potentiel ou de la charge totale de chaque conducteur (§ 39), sont encore applicables au système S. En particulier, si l'on se donne, pour les charges des conducteurs du système S, les valeurs $Q_0 = \frac{Q}{\varepsilon}$, $Q_0' = \frac{Q'}{\varepsilon}$, ..., on obtiendra pour les potentiels les valeurs $V = \frac{V_0}{\varepsilon}$, $V' = \frac{V_0'}{\varepsilon}$, ...

Si les différents conducteurs portent les mêmes charges Q_0, Q_0', ... dans les deux systèmes S_0 et S, le potentiel en un même point, et par suite aussi la différence de potentiel entre deux conducteurs, sont ε fois plus petits dans le système S que dans le système S_0.

205. Capacité d'un condensateur contenant un diélectrique. — Appliquons ces résultats à un condensateur C_0, dans lequel l'espace compris entre les armatures est vide, et au condensateur C obtenu en le remplissant entièrement avec le diélectrique ε : si la différence de potentiel $V_0' - V_0$ est la même pour les deux condensateurs, la charge du second est ε fois plus grande que celle du premier : sa capacité est ε fois plus grande.

La capacité C d'un condensateur, dans lequel l'intervalle entre les armatures est rempli par un diélectrique, est égale à la capacité C_0 du même condensateur, dans lequel ce diélectrique est remplacé par le vide, multipliée par le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique :

$$C = \varepsilon C_0$$

L'hypothèse de la polarisation nous a permis de retrouver la loi expérimentale donnée au paragraphe 54, et le résultat obtenu justifie l'assimilation, faite dès le paragraphe 202, de la perméabilité diélectrique ε au pouvoir inducteur spécifique défini au paragraphe 54.

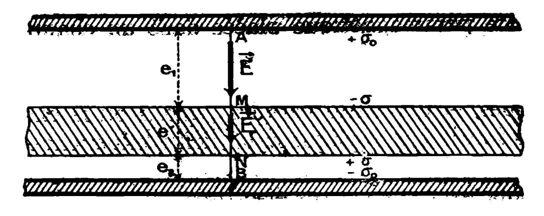


FIG. 255.

On pourrait, par des raisonnements analogues, passer de l'équilibre électrique du système S_0 à celui d'un système S', obtenu à partir de S_0 en remplissant de diélectrique l'intervalle compris entre deux surfaces équipotentielles quelconques. Nous allons simplement en donner un exemple dans le cas du condensateur plan.

Supposons que, dans un condensateur plan indéfini AB, on introduise une lame plane indéfinie MN de diélectrique d'épaisseur e', et soit $e = e_1 + e_2$ l'épaisseur totale restant vide (*fig.* 255). Les lignes de force sont toujours, par raison de symétrie, les droites normales aux plateaux. En vertu de la continuité de la composante normale de l'induction électrostatique, le champ E'

dans le diélectrique est ε fois plus petit que le champ E dans le vide ; ce dernier est lié à la densité σ_0 sur les plateaux par le théorème de Coulomb ; on a :

$$E' = \frac{E}{\varepsilon}, \qquad E = 4\pi\sigma_0$$

La différence de potentiel entre les plateaux est :

$$V_A - V_B = e_1E + e'E' + e_2E = \left(e + \frac{e'}{\varepsilon}\right)E = 4\pi\sigma_0\left(e + \frac{e'}{\varepsilon}\right).$$

La capacité d'une surface S du condensateur plan indéfini est en u. é. s. :

$$C = \frac{\sigma_0 S}{V_A - V_B} = \frac{S}{4\pi\left(e + \frac{e'}{\varepsilon}\right)}.$$

On remarquera que nous n'avons pas parlé, dans ce paragraphe comme dans le précédent, de la polarisation du diélectrique [1] : le fait fondamental qui permet de traiter tous les problèmes d'équilibre électrique est la possibilité de définir, en chaque point d'un diélectrique, un vecteur induction $\vec{B} = \varepsilon\vec{E}$, auquel on peut appliquer le théorème de Gauss sous la forme indiquée à la fin du paragraphe 203. Nous l'avons déduit de l'hypothèse de la polarisation ; mais nous aurions pu le prendre directement comme hypothèse fondamentale. L'avantage de l'hypothèse de la polarisation est de nous donner une idée du mécanisme du phénomène, qui sera particulièrement utile pour certaines théories de l'électro-optique, telles que celle de la dispersion.

206. Forces à l'intérieur d'un diélectrique. — De même qu'une substance paramagnétique placée dans un champ magnétique non uniforme est soumise à des forces magnétiques (§ 191), de même un diélectrique placé dans un champ électrique non uniforme est soumis à des forces électrostatiques, et est attiré vers les régions où le champ est le plus intense. Ce sont ces forces qui expliquent la vieille expérience de l'attraction des corps légers non conducteurs — morceaux de papier, pendule électrique à boule diélectrique — par les corps électrisés.

On peut montrer expérimentalement leur existence en suspendant sous l'un des plateaux d'une balance une plaque de paraffine P dont l'extrémité inférieure se trouve dans l'espace compris entre les deux plateaux A et B d'un condensateur vertical (*fig.* 256). La balance, en équilibre lorsque les

(1) Si on avait voulu traiter directement le problème du condensateur plan incomplètement rempli par le diélectrique à partir de l'hypothèse de la polarisation, il aurait fallu tenir compte des deux distributions $+\sigma$ et $-\sigma$, portées par les faces du diélectrique, qui la représentent. Les charges portées par les plateaux créent dans tout l'espace qui les sépare un champ $E = 4\pi\sigma_0$; à l'intérieur du diélectrique, il faut ajouter à ce champ E un champ égal à $-4\pi\sigma$, créé par les distributions de densité $\sigma = kE'$, et le champ total est $E' = E - 4\pi kE' = \frac{E}{\varepsilon}$.

plateaux A et B sont réunis, s'incline du côté de la plaque P lorsqu'on établit entre eux une différence de potentiel à l'aide d'une machine électrostatique.

On peut également faire, avec un diélectrique liquide, une expérience de dénivellation analogue à celle qui a été faite avec une substance paramagnétique liquide : il suffit de disposer les plateaux A et B d'un condensateur dans un flacon R contenant du sulfure de carbone, de façon que le niveau du liquide se trouve dans le champ électrique. Quand on charge le condensateur avec une machine électrostatique, on voit le niveau du sulfure de carbone s'abaisser dans le tube latéral T: sous l'action des forces électrostatiques, le diélectrique tend à pénétrer dans la région des champs intenses comprise entre les plateaux, comme s'il était soumis à des forces de pression hydrostatique.

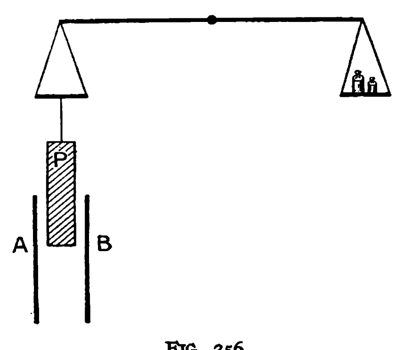


FIG. 256.

Considérons maintenant des conducteurs placés dans un diélectrique fluide, de façon qu'on puisse mesurer les forces qui s'exercent sur eux. En vertu d'une de nos hypothèses fondamentales (§ 20), les forces qu'ils exercent les uns sur les autres peuvent se calculer, à partir de leurs charges, par la loi de Coulomb, $f = \frac{qq'}{r^2}$, quel que soit le milieu interposé. Mais nous venons de voir que le diélectrique, liquide ou gazeux, placé dans le champ créé par les conducteurs, est soumis à des forces ; il les transmet nécessairement aux conducteurs, sur lesquels il exerce une pression hydrostatique modifiée par ces forces d'origine électrique. La force qui s'exerce sur un conducteur est la résultante des forces électrostatiques créées par les autres conducteurs et des forces de pression hydrostatique exercées par le diélectrique : elle est nécessairement différente de celle qu'on observerait si l'on supprimait les forces de la seconde catégorie sans modifier les premières, en remplaçant le diélectrique par le vide sans modifier les charges des conducteurs.

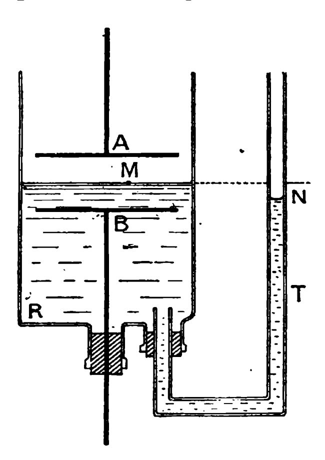


FIG. 257.

Le calcul des différentes forces que nous venons d'envisager peut se faire à partir de l'hypothèse de la polarisation du diélectrique, par des raisonnements analogues à ceux que nous avons employés au paragraphe 191 pour le calcul des forces magnétiques qui s'exercent sur les substances paramagnétiques. Mais il faut remarquer que les formules des paragraphes 191 et 192 ne sont valables que si l'on peut négliger le champ démagnétisant, et ne peuvent s'appliquer qu'à des diélectriques de pouvoir inducteur spécifique

très peu supérieur à l'unité, par exemple à des diélectriques gazeux. Les calculs sont beaucoup plus compliqués dans le cas général, et il est plus commode, pour calculer les forces, de partir de l'expression de l'énergie d'un système de conducteurs: Cette expression, $W = \frac{1}{2}\sum QV$, a été déduite directement de la définition du potentiel (chap. VI) ; elle ne dépend pas du milieu qui sépare les conducteurs, et il en est de même de l'expression des forces à partir de l'énergie (§§ 65 et 66).

Reprenons, par exemple, les deux systèmes S et S_0 du paragraphe 204, portant les mêmes charges Q_0, Q'_0, ... Pour une même position, quelconque d'ailleurs, des conducteurs, leurs potentiels sont ε fois plus petits pour le système S que pour le système S_0, l'énergie $W = \frac{1}{2}\sum Q_0V$ du système S est ε fois plus petite que l'énergie $W_0 = \frac{1}{2}\sum Q_0V_0$ du système S_0. La force $X = -\frac{\partial W}{\partial x}$ qui s'exerce sur un conducteur du système S est aussi ε fois plus petite que la force $X_0 = -\frac{\partial W_0}{\partial x}$ qui s'exerce sur le même conducteur du système S_0 : *les forces électrostatiques qui s'exercent sur des conducteurs, placés dans un diélectrique homogène et indéfini, sont, pour les mêmes charges des conducteurs, ε fois plus petites dans le diélectrique que dans le vide.*

Si l'on prend deux conducteurs de très petites dimensions — deux points matériels électrisés — placés dans le milieu diélectrique homogène indéfini, l'expression de la force qui s'exerce entre eux est, en rétablissant le coefficient ε_0 de la formule des forces dans le vide en unités non électrostatiques :

$$f = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}.$$

Si au contraire, on avait comparé les systèmes S et S_0 *pour les mêmes valeurs des potentiels des conducteurs,* on aurait trouvé que *les forces électrostatiques qui s'exercent sur les conducteurs sont ε fois plus grandes dans le diélectrique que dans le vide.*

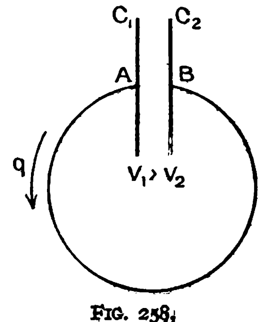


FIG. 258.

II. — *COURANT DE DÉPLACEMENT*

207. Définition et calcul du courant de déplacement. — Nous avons déjà remarqué (§ 187) que le calcul du champ magnétique d'un courant électrique, par l'assimilation de ce courant à un feuillet, suppose essentiellement qu'il parcoure un circuit fermé, puisque le contour du feuillet est nécessairement une courbe fermée. Les lois de l'électromagnétisme, telles que nous les avons développées dans les derniers chapitres, n'ont de sens que pour des circuits fermés.

Pour pouvoir les étendre à des courants tels que les courants de décharge d'un condensateur AB (*fig.* 258), il est nécessaire de constituer des circuits fermés par des lignes de courant tracées à l'intérieur du diélectrique du condensateur.

Prenons comme exemple un condensateur plan AB (*fig.* 259), de surface S, dont les armatures sont séparées par un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique ε. Soit I l'intensité du courant qui parcourt à l'instant t le conducteur extérieur ; nous la supposons mesurée en u. é. s., et comptée positivement, dans ce conducteur, dans le sens de B vers A; si Q est la charge totale en u. é. s., de l'armature A, on a $I = \frac{dQ}{dt}$. Nous devons, à l'intérieur du diélectrique, tracer des lignes de courant, et définir, en chaque point, un vecteur courant $\vec{i}$ tel que l'intensité totale correspondante soit précisément I. Par raison de symétrie, le vecteur $\vec{i}$ doit être normal aux plateaux, et sa grandeur i, comptée positivement de A vers B, est la même en tous les points. L'intensité totale des courants définis par les vecteurs $\vec{i}$ est iS, et on a :

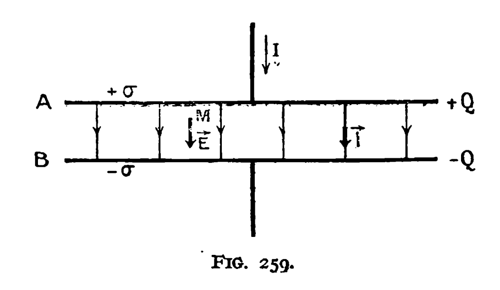
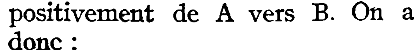


Fig. 259.

$$i = \frac{I}{S} = \frac{1}{S}\frac{dQ}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}.$$

La densité superficielle σ sur l'armature A est liée au champ E dans le diélectrique par le théorème de Coulomb (§ 203), $E = 4\pi\sigma / \varepsilon$, où E est compté positivement de A vers B. On a donc :



$$i = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{dE}{dt}.$$

Les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{E}$ ont même direction, normale aux plateaux, et sont comptés positivement dans le même sens, de A vers B ; on a entre eux la relation vectorielle :

$$\vec{i} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d\vec{E}}{dt}.$$

Fig. 260.

Nous allons généraliser cette expression au cas où le fil conducteur C, qui transporte le courant d'intensité I, apporte la quantité d'électricité $dQ = I dt$ à un conducteur A de forme quelconque, plongé dans un milieu diélectrique quelconque, homogène ou non (*fig.* 260). Nous simplifierons d'abord son écriture en remarquant que le vecteur $\varepsilon\vec{E}$ est le vecteur induction électrostatique $\vec{B}$, et en désignant par $\vec{D}$ le vecteur $\frac{\vec{B}}{4\pi}$, que nous appellerons le **déplacement électrique.** Nous allons montrer que le courant I peut être considéré comme

fermé par un système de courants dans le diélectrique, caractérisé en chaque point par un vecteur courant $\vec{i} = \frac{d\vec{D}}{dt}$.

Pour cela, il nous faut montrer que, étant donnée une surface quelconque Σ entourant le conducteur A, l'intensité $I = \frac{dQ}{dt}$ du courant qui y entre par le fil C est égale à l'intensité totale $\iint_\Sigma \vec{i}\,d\vec{S}$ des courants qui en sortent, c'est-à-dire au flux $\iint_\Sigma \frac{d\vec{D}}{dt}\,d\vec{S}$ du vecteur $\frac{d\vec{D}}{dt}$ à travers la surface Σ, de l'intérieur vers l'extérieur.

Cette égalité est une conséquence immédiate du théorème de Gauss : d'après le dernier énoncé de ce théorème donné au paragraphe 203, le flux du vecteur $\vec{D} = \vec{B}\,/\,4\pi$ à travers la surface Σ, de l'intérieur vers l'extérieur, est toujours égal à la charge Q du conducteur A : on a :

$$\iint_\Sigma \vec{D}\,d\vec{S} = Q.$$

Il suffit de prendre les dérivées, par rapport au temps, des deux membres de cette équation pour démontrer la propriété indiquée :

$$\iint_\Sigma \frac{d\vec{D}}{dt}\,d\vec{S} = \frac{dQ}{dt} = I.$$

En résumé, *on peut considérer tous les courants électriques comme des courants fermés, à condition d'admettre qu'il existe dans les diélectriques, toutes les fois que l'induction électrostatique y varie, des courants, dits* **courants de déplacement,** *caractérisés en chaque point* (en u. é. s.) *par un vecteur courant :*

$$\vec{i} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d\vec{E}}{dt}.$$

Dans un système d'unités non électrostatique, la quantité $4\pi Q$ est égale, pour le vide, au flux du vecteur $\varepsilon_0 E$ (§ 21?) ; si ε est toujours la quantité par laquelle il faut multiplier les charges, à potentiel constant, pour passer du vide au diélectrique, $4\pi Q$ est égal au flux du vecteur $\varepsilon\varepsilon_0 E$. Le calcul du courant $I = dQ/dt$ donne alors pour le courant de déplacement :

$$\vec{i} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\pi}\frac{d\vec{E}}{dt}.$$

La conception des courants de déplacement est due à Maxwell. Ils ont été imaginés pour constituer, avec des courants dans des conducteurs, des circuits fermés assimilables à des feuillets, et nous admettrons qu'on peut

leur appliquer tous les théorèmes d'électromagnétisme déduits de cette assimilation. En particulier, en un point du diélectrique, le courant de déplacement est lié au champ magnétique par la relation de Maxwell-Ampère (§ 187).

208. Interprétation des courants de déplacement. — Supposons d'abord que le diélectrique soit le vide. Il est évident que le vide ne contient pas de charges électriques, et que le courant de déplacement, $\vec{i_0} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\vec{E}}{dt}$, ne correspond à aucun déplacement d'électricité. En un point de l'espace où existe un champ électrique $\vec{E}$, les propriétés de l'espace sont modifiées ; il a subi une sorte de déformation que nous caractérisons par le déplacement électrique $\frac{\vec{E}}{4\pi}$: la théorie de Maxwell admet que la variation de ce déplacement, $\frac{1}{4\pi}\frac{d\vec{E}}{dt}$, est équivalente, au point de vue électromagnétique, à un courant électrique. Mais il n'y a pas lieu de chercher d'autre analogie que cette équivalence électromagnétique entre le courant de conduction dans un métal et le courant de déplacement dans le vide. La théorie de Maxwell nous apprend uniquement *qu'en toute région de l'espace où existe un champ électrique variable* $\left(\frac{d\vec{E}}{dt} \neq 0\right)$, *il existe un champ magnétique*, et elle nous fournit, par l'expression du courant de déplacement et par la relation de Maxwell-Ampère, les moyens de le calculer.

Si l'on considère un diélectrique autre que le vide, le courant de déplacement peut être interprété de la même façon : il suffit de remplacer le champ $\vec{E}$ par l'induction électrostatique $\vec{B} = \varepsilon\vec{E}$. Nous pouvons nous représenter le mécanisme de l'action du diélectrique en partant de l'hypothèse de la polarisation. Nous supposerons qu'un élément de volume du diélectrique pris à l'état neutre contient des centres chargés des deux signes — des ions — répartis de telle sorte que son moment électrique total soit nul ; le champ électrique, par les forces qu'il exerce sur eux, a pour effet de les déplacer. S'ils étaient libres de se mouvoir dans toute la masse du diélectrique, leur transport produirait un courant électrique obéissant à la loi d'Ohm, comme nous l'avons vu dans le cas des électrolytes (§ 165) ; nous devrons admettre qu'ils sont liés aux molécules du diélectrique, et qu'un ion ne peut pas sortir de la molécule à laquelle il appartient. Lorsqu'il s'écarte à une distance $\vec{l}$ de sa position d'équilibre initiale, il est soumis, par l'effet de ces liaisons, à une force quasi-élastique, proportionnelle à $\vec{l}$, qui tend à l'y ramener ; la nouvelle position d'équilibre, prise par un ion de charge e sous l'action de cette force quasi-élastique et de la force électrostatique $\vec{E}e$, correspond à un écart $\vec{l} = A\vec{E}$, proportionnel au champ électrique $\vec{E}$.

Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait qu'une seule espèce d'ions mobiles. L'unité de volume du diélectrique contient N molécules, et chaque molécule

contient, par exemple, un ion de charge $+ e$ qui subit le déplacement $\vec{l} = A\vec{E}$, tandis que la charge complémentaire $- e$ reste immobile. La molécule acquiert ainsi un moment électrique $\vec{M} = e\vec{l} = A\vec{E}e$, et le moment électrique de l'unité de volume, la *polarisation*, est

$$\vec{P} = N\vec{M} = Ne\vec{l} = NAe \, . \, \vec{E}.$$

L'établissement du champ électrique, en provoquant le déplacement des charges électriques $+ e$, a produit dans le diélectrique un véritable courant électrique, dont la direction est celle de ce déplacement. Considérons une surface d'aire égale à l'unité, normale au vecteur $\vec{l}$; tous les ions qui se trouvaient primitivement à une distance de cette surface inférieure à l, c'est-à-dire dans un volume l, l'ont traversée ; leur nombre est Nl, et ils ont transporté, à travers la surface unité prise normalement au courant, la quantité d'électricité $q = Nel$. Pendant l'intervalle de temps dt, ils ont transporté la même quantité d'électricité qu'un courant $i_1 = \frac{dq}{dt} = Ne\frac{dl}{dt}$, et le *courant de polarisation* produit par le déplacement des ions est représenté par le vecteur courant $\vec{i_1} = Ne\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$.

Revenons maintenant au courant de déplacement dans le diélectrique :

$$\vec{i} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{i_0} + \vec{i_1}.$$

Le courant de déplacement $\vec{i}$ dans le diélectrique est la somme du courant de déplacement dans le vide $\vec{i_0}$, et du courant de polarisation du diélectrique $\vec{i_1}$. Le premier ne correspond à aucun déplacement réel de l'électricité, mais à une modification des propriétés de l'espace produite par la variation du champ électrique. Le second correspond à un véritable déplacement de l'électricité à l'intérieur des molécules du diélectrique.

Dans un grand nombre d'applications, on peut se contenter, suivant la conception de Maxwell, d'introduire la valeur $\vec{i} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d\vec{E}}{dt}$ du courant de déplacement, sans se préoccuper de son mécanisme. Mais la considération de ce mécanisme donne plus de souplesse à la théorie, et permet de grouper et d'expliquer de nombreux phénomènes, en introduisant de nouveaux termes dans les équations, par exemple en tenant compte de l'inertie des ions et des forces de frottement auxquelles ils sont soumis (théories électro-optiques de l'absorption et de la dispersion).

III. — *DIÉLECTRIQUES RÉELS*

209. Diélectriques parfaits et diélectriques réels. — Lorsqu'on cherche à mesurer le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique, on cons-

tate, en général, qu'il n'a pas une valeur définie : lorsqu'on met les armatures d'un condensateur à lame diélectrique en communication avec les deux pôles d'une source à potentiel constant, on trouve le plus souvent que sa charge augmente avec le temps; il faut quelquefois plusieurs heures pour atteindre une valeur limite, qui peut être égale à trois ou quatre fois la charge initiale, prise en un temps très court. De même, lorsqu'on réunit par un fil conducteur les deux armatures d'un condensateur à lame de verre, leurs potentiels s'égalisent en une fraction de seconde, mais le condensateur n'est pas entièrement déchargé. Si l'on isole les armatures, puis qu'on les réunisse à nouveau après quelques minutes, on peut obtenir une nouvelle décharge.

La théorie que nous avons déduite de l'hypothèse fondamentale de la polarisation ne suffit donc pas à rendre compte de tous les faits expérimentaux. C'est une théorie simplifiée, qui ne s'applique qu'à des substances idéales, que nous appellerons des **diélectriques parfaits.** Les phénomènes sont compliqués, pour les **diélectriques réels,** par la superposition, aux propriétés caractéristiques d'un diélectrique parfait, d'autres propriétés, en général très mal connues. En particulier, le diélectrique peut présenter une certaine conductibilité, soit dans l'intérieur de sa masse, soit à sa surface; il peut aussi présenter des phénomènes d'hystérésis (cf. §§ 210 et 211).

Il existe quelques diélectriques qu'on peut pratiquement considérer comme des diélectriques parfaits, notamment les diélectriques gazeux et la paraffine dure. La quantité d'électricité portée par un condensateur à air ou à paraffine dure ne dépend pas de la durée de charge; les mesures électrostatiques de précision peuvent, sans inconvénient, être faites dans l'air, à condition de tenir compte de la valeur de sa constante diélectrique, $\varepsilon = 1{,}000576$, pour le calcul des capacités et des forces.

Le rôle de la conductibilité, et aussi de l'hystérésis (§ 211), devient de moins en moins important à mesure que les durées des charges et des décharges diminuent ; pour les très faibles valeurs de ces durées, correspondant aux fréquences des oscillations électriques qui constituent les ondes hertziennes de faible longueur d'onde (10^6 à 10^8 oscillations par seconde), de nombreux diélectriques se comportent comme des diélectriques parfaits. On obtient des résultats en parfait accord avec l'expérience en appliquant les formules des diélectriques parfaits à la propagation des ondes hertziennes dans le soufre ou des ondes infra-rouges (10^{12} à 10^{13} oscillations par seconde) dans le quartz, bien que, pour les charges et décharges ordinaires, ces diélectriques présentent les phénomènes des décharges résiduelles.

210. Conductibilité des diélectriques. — Supposons d'abord qu'entre les deux armatures AB d'un condensateur se trouve une lame diélectrique MN, faiblement conductrice, ne les touchant pas (*fig.* 262). Dans la charge instantanée, la lame MN se comporte comme un diélectrique, et il existe à l'intérieur de cette lame un champ électrique différent de zéro. Il y produit un courant, qui ne cesse que quand le volume de la lame MN est devenu un volume équipotentiel; aux charges apportées lentement par le courant sur les deux faces du conducteur MN correspondent de nouvelles charges développées par influence sur les plateaux AB : il y a accroissement lent de la capacité.

Réunissons pendant un instant très court les armatures AB; les charges des surfaces MN n'ont pas le temps de traverser la lame pour se recombiner, et elles maintiennent des charges par influence sur les conducteurs AB : le condensateur n'est pas entièrement déchargé. Elles maintiennent également un champ électrique à l'intérieur de la lame MN : ce champ va disparaître lentement, par l'effet du courant qu'il produit, et lorsqu'il aura disparu,on aura atteint un nouvel état d'équilibre, dans lequel les conducteurs A et B pourront donner une décharge résiduelle.

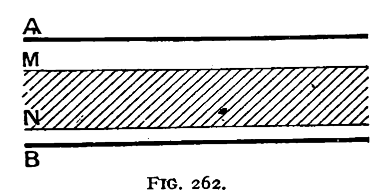


FIG. 262.

Prenons maintenant un condensateur entièrement rempli du diélectrique (*fig.* 263). S'il existe entre les deux surfaces A et B une différence de potentiel V, il existe nécessairement, dans le diélectrique qui les sépare, un champ $E = V / e$. Il s'établit un état de régime permanent, dans lequel les armatures portent les charges nécessaires à la création de ce champ, et le diélectrique est parcouru par le courant qu'on en déduit par la loi d'Ohm. Le calcul montre qu'il s'établit très vite, en un temps de l'ordre du dix-millième de seconde ; de même, si l'on réunit les plateaux AB par un fil métallique de faible résistance, le condensateur se décharge en un temps très court.

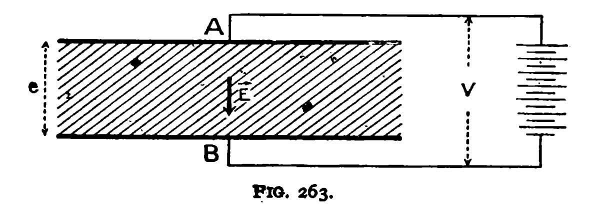


FIG. 263.

Il n'en est plus de même si l'on isole les armatures : elles forment alors deux conducteurs reliés par une très grande résistance, celle du diélectrique, et elles se déchargent très lentement à travers cette résistance (cf. § 234). L'étude de la variation du potentiel avec le temps permet de la mesurer ; ce procédé est employé pour la mesure des résistances d'isolement des câbles. Quand on charge l'armature intérieure d'un câble sous-marin et qu'on la laisse se décharger à travers le diélectrique du câble, son potentiel décroît de moitié en un temps qui est de l'ordre de une à deux minutes, quand les conditions d'isolement sont bonnes.

211. Hystérésis diélectrique. — Les propriétés électriques d'un solide, comme ses propriétés magnétiques ou ses propriétés élastiques, dépendent de tous les états antérieurs par lesquels il a passé. En particulier, le vecteur polarisation n'est pas déterminé par la valeur actuelle du vecteur champ électrique, il dépend, en général, de toutes ses valeurs antérieures. On peut observer des phénomènes d'*hystérésis diélectrique*, analogues aux phénomènes d'hystérésis magnétique; les cycles d'hystérésis obtenus en prenant comme coordonnées le champ et l'induction électrostatiques ont la forme d'ellipses, d'autant plus aplaties que la fréquence est plus élevée.

Ces phénomènes peuvent expliquer les décharges résiduelles obtenues avec des diélectriques parfaitement isolants, tels que la diélectrine. Chargeons un condensateur plan AB, l'armature A étant l'armature positive, puis réunis-

sons les conducteurs AB; ils sont au même potentiel, et le champ dans l'espace qui les sépare, $E = V/e$, est nul. A cause de l'hystérésis, le diélectrique conserve une polarisation rémanente P, dirigée dans le sens du champ primitif. En un point M (*fig.* 264), elle crée un champ E', qu'on peut calculer en remplaçant son action par celle d'une couche de densité + P placée sur la surface B et d'une couche de densité — P placée sur la surface A. Puisque le champ en M est nul, c'est que le champ E' est annulé par un champ opposé, créé par des charges portées par les plateaux. Le plateau A conserve une charge de densité $\sigma = + P$, le plateau B une charge de densité $\sigma = - P$: le condensateur n'est pas entièrement déchargé.

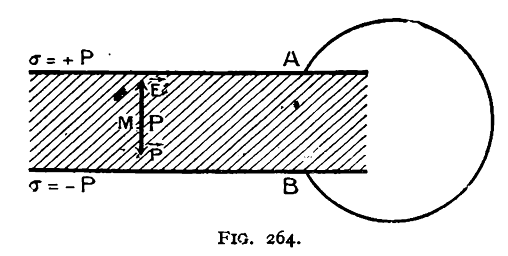


FIG. 264.

Si le condensateur est abandonné à lui-même, la polarisation rémanente disparaît lentement. Les charges + P et — P portées par les plateaux deviennent libres, et peuvent être recueillies dans une décharge résiduelle.

L'hystérésis diélectrique, comme l'hystérésis magnétique, produit un échauffement du diélectrique soumis à des champs alternatifs. Un condensateur à lame diélectrique, relié aux bornes d'un alternateur, s'échauffe et dissipe de l'énergie par hystérésis. Si le diélectrique présente une certaine conductibilité, il dissipe également de l'énergie par effet Joule. *Les deux causes d'imperfection des diélectriques que nous avons signalées se traduisent toutes deux par une dissipation d'énergie et un échauffement du diélectrique* : cet échauffement peut devenir gênant dans les câbles souterrains de transport d'énergie où l'isolant est soumis à une tension élevée.

Nous verrons plus loin qu'un condensateur parfait, relié aux bornes d'un alternateur, reçoit de cet alternateur un courant en avance de $\pi/2$ sur la différence de potentiel (§ 295), de sorte que la puissance absorbée est nulle (§ 291). A la dissipation d'énergie dans un condensateur à diélectrique imparfait correspond une diminution de la différence de phase, qui prend une valeur $\pi/2 - \alpha$: la puissance consommée est proportionnelle à $\sin \alpha$, et l'angle α, qui mesure en quelque sorte la puissance perdue, s'appelle l'**angle de perte.** Sa valeur, qui ne dépasse pas quelques minutes pour les condensateurs au mica et les bons condensateurs au papier imprégné maintenus à une température inférieure à 30° C., peut atteindre 10°, aux fréquences industrielles usuelles, pour les condensateurs à lame de verre.

Les diélectriques employés dans la pratique sont de bons isolants, et les pertes sont presque entièrement dues à l'hystérésis diélectrique. Différentes théories ont été proposées pour expliquer son mécanisme : il semble que la forme elliptique des cycles et la diminution des pertes avec l'augmentation de la fréquence puissent s'interpréter en admettant l'existence d'ions mobiles avec un frottement proportionnel à la vitesse (*viscosité diélectrique*); ces ions peuvent être des groupes d'atomes se déplaçant à l'intérieur des molécules, ou des ions, électrolytiques ou gazeux, mobiles dans des poches d'impuretés ou dans des bulles d'air contenues dans le diélectrique. Le mécanisme ainsi imaginé n'est en somme pas différent de celui de la figure 262.

CHAPITRE XXI

ACTION DES CHAMPS MAGNÉTIQUES SUR LES COURANTS

I. — *ACTION SUR UN CIRCUIT FERMÉ*

212. Généralités. — Les lois fondamentales de l'électromagnétisme, que nous avons énoncées au paragraphe 131, se traduisent, pour le calcul des forces subies par un courant, par l'énoncé suivant :

Le système des forces auxquelles est soumis un circuit fermé, parcouru par un courant électrique et placé dans un champ magnétique, est équivalent au système des forces auxquelles est soumis, dans le même champ, un feuillet magnétique ayant même contour et même sens que le courant, et dont la puissance est proportionnelle à l'intensité du courant.

Nous n'indiquerons pas de vérification expérimentale de cette loi. L'action des champs magnétiques sur les courants est utilisée dans une quantité de moteurs industriels et d'appareils de mesures électriques : le calcul de ces moteurs et l'emploi de ces appareils de mesures fournit une vérification permanente de la loi fondamentale.

On peut la considérer comme une conséquence de la loi qui donne le champ magnétique créé par un courant (§ 182), et du principe de l'action et de la réaction. Le champ créé en un point quelconque de l'espace par un courant C est le même que celui que crée le feuillet équivalent F ; le système S des forces exercées par le courant C ou le feuillet F sur un aimant quelconque A est le même. Inversement, l'aimant A exerce sur le courant C et sur le feuillet F des forces formant deux systèmes équivalents au système — S, donc équivalents entre eux.

Le sens de l'aimantation du feuillet F et celui du courant C sont liés par les règles habituelles : règle d'Ampère ou règle de Maxwell. Nous supposerons, dans ce Chapitre et dans les Chapitres suivants, sauf au paragraphe 245 *bis* où nous reviendrons sur cette question, que les diverses grandeurs sont mesurées dans un système d'unités satisfaisant à la relation de coordination $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$, de sorte que l'intensité i du courant C et la puissance U du feuillet F équivalent sont liées par la relation (§ 133) :

$$\mu_0 i = U.$$

Nous ne ferons aucune distinction entre les forces électromagnétiques créées par l'action d'un aimant sur un courant, et les forces électrodynamiques créées par l'action mutuelle de deux courants. Nous admettrons qu'il y a une identité complète de propriétés entre les champs magnétiques des courants et ceux des aimants.

213. Expression générale du travail et des forces. — L'équivalence des deux systèmes de forces qui agissent sur un circuit fermé parcouru par un courant et sur un feuillet de même contour entraîne l'égalité des travaux accomplis par ces deux systèmes de forces pour un même déplacement. Nous voyons donc, que d'après la première des lois établies au paragraphe 118 :

Un circuit fermé parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique tend à se déplacer de façon à embrasser le plus grand flux d'induction possible par sa face négative ; il est en équilibre stable lorsque ce flux a la valeur maximum compatible avec les liaisons.

Lorsqu'un feuillet passe d'une position où il est traversé par le flux d'induction Φ_1 à une position où il est traversé par le flux Φ_2, le travail des forces électromagnétiques est (§ 127) $\mathcal{T} = U(\Phi_2 - \Phi_1)/\mu_0$. En remplaçant U par $\mu_0 i$, on obtient la loi relative aux courants :

$$\mathcal{T} = i(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Le travail accompli par les forces électromagnétiques qui agissent sur un circuit fermé parcouru par un courant dans le déplacement de ce circuit est égal au produit de l'intensité du courant par l'accroissement du flux d'induction qui traverse une surface limitée par le circuit.

La formule $\mathcal{T} = i\,\Delta\Phi$ s'applique sans difficulté, et donne le travail en ergs, si i et $\Delta\Phi$ sont donnés en u. é. m. Si l'on donne la valeur i_a de l'intensité en ampères et la valeur $\Delta\Phi_m$ de la variation de flux en maxwells, on peut l'appliquer dans le système pratique, où l'unité de flux vaut 10^8 maxwells (§ 134), et calculer le travail en joules $\mathcal{T}_j = 10^{-8} i_a\,\Delta\Phi_m$, ou revenir au système électromagnétique, où l'unité d'intensité vaut 10 ampères, et calculer le travail en ergs, $\mathcal{T}_e = 10^{-1} i_a\,\Delta\Phi_m$.

Comme le flux d'induction est toujours conservatif, les valeurs de Φ_1 et Φ_2 sont indépendantes de la surface utilisée pour les calculer, elles ne dépendent que du contour qui la limite, c'est-à-dire du circuit parcouru par le courant ; le sens de la normale positive à la surface est donné, à partir du sens du courant, par la règle d'Ampère ou la règle du tire-bouchon.

On peut encore dire que *le travail $\mathcal{T}$ est égal au produit de l'intensité du courant par le flux coupé par le circuit au cours du déplacement. Le flux coupé par un élément du circuit doit être compté positivement si le déplacement s'effectue vers la gauche, pour un observateur placé sur l'élément dans le sens du courant et regardant dans le sens du champ magnétique.*

Quant aux expressions des forces, elles sont, d'après la loi fondamentale même, identiques à celles qui s'appliquent à un feuillet (§ 119) ; on les retrouvera aisément, à partir des résultats précédents, en écrivant que le travail est égal au produit de la force par le déplacement, ou du couple par la rotation. *Les composantes de la force et du couple auxquels on peut réduire le système des forces électromagnétiques agissant sur un circuit fermé, parcouru par un courant d'intensité i, et placé dans un champ magnétique produisant à tra-*

vers ce circuit un flux d'induction Φ, *se calculeront par les formules :*

$$X = \frac{d\mathcal{C}}{dx} = i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad L = \frac{d\mathcal{C}}{d\alpha} = i\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}.$$

On remarquera que nous avons évité de parler de l'énergie des courants. Nous avons pu calculer l'énergie d'un aimant permanent placé dans un champ magnétique parce que, lorsque nous apportons l'aimant dans le champ, les échanges d'énergie se réduisent au travail fourni contre les forces électromagnétiques. Lorsque nous déplaçons un courant, nous devons tenir compte de l'énergie que nous dépensons pour entretenir le courant au cours de son déplacement ; nous verrons dans le prochain chapitre les lois qui permettent de calculer cette dernière énergie, et nous pourrons ensuite aborder la question de l'énergie des courants.

214. Exemples. — Considérons d'abord l'action sur un circuit fermé d'un champ uniforme $\vec{H}$, tel que le champ magnétique terrestre ou le champ à l'intérieur d'un solénoïde. Le système des forces agissant sur le circuit se réduit à un couple, qu'on peut calculer, à partir du moment magnétique $\vec{M}$ du feuillet équivalent au courant, par la formule $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H}$.

Si le circuit est plan, et si S est l'aire de la surface plane limitée par le circuit, le moment magnétique M est égal à $\mu_0 i$S, d'après la définition même de la puissance d'un feuillet (moment magnétique par unité de surface). Le vecteur $\vec{M}$ est normal au plan du circuit et dirigé vers la gauche de l'observateur placé sur le courant. S'il fait un angle θ avec le champ magnétique $\vec{H}$, le couple électromagnétique tend à faire tourner le circuit pour amener le vecteur $\vec{M}$ sur le vecteur $\vec{H}$, et sa valeur est MH sin $\theta = \mu_0 i$SH sin θ.

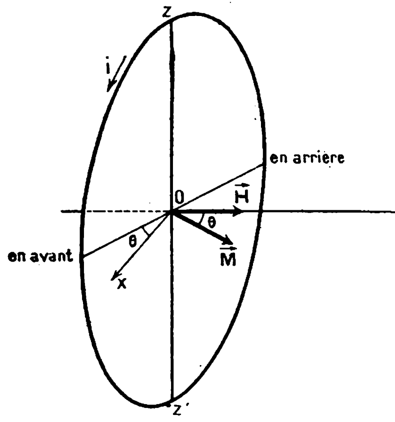


Fig. 265.

Si le circuit est mobile autour d'un axe $z'z$, le couple électromagnétique qui tend à le faire tourner autour de cet axe ne dépend que de la composante $\vec{H}$ du champ perpendiculaire à l'axe $z'z$. Le circuit est en équilibre stable lorsque son plan est perpendiculaire à $\vec{H}$: dans le cas de la figure 265, le champ $\vec{H}$ est dirigé suivant Oy, et le circuit est en équilibre quand il est dans le plan xOz, le sens du courant étant le sens positif de ce plan, de oz vers ox. Le flux que reçoit, par sa face négative, la surface limitée par le circuit, est alors maximum et sa valeur est $\Phi_0 = \mu_0$SH ; si le circuit tourne d'un angle θ à partir de cette position, le flux devient $\Phi = \Phi_0 \cos\theta$, et le moment du couple

est $i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \Phi_0 i \sin \theta$: c'est la valeur calculée directement, le signe — indiquant que le couple tend à ramener le circuit à sa position d'équilibre.

Si le circuit se compose de N circuits plans, de même aire S, parallèles et de même sens, le moment magnétique du feuillet équivalent est $N\mu_0 iS$. C'est le cas d'un solénoïde ; le couple auquel il est soumis dans un champ uniforme $\vec{H}$ avec lequel son axe fait l'angle θ est $N\mu_0 iSH \sin \theta$.

Si le circuit se compose de deux circuits plans de même aire parallèles et de sens contraires, le moment magnétique total est nul. On a réalisé un **cadre astatique,** analogue aux systèmes astatiques réalisés avec deux aimants opposés (§ 92). Dans un champ uniforme, le flux qui le traverse est toujours nul, et il n'est soumis à aucun couple, quelle que soit sa position.

Nous utiliserons les formules que nous venons d'écrire au calcul des couples dans divers appareils de mesure, tels que les wattmètres et les électro-dynamomètres. Elles sont vérifiées expérimentalement, avec une très grande précision, par l'usage même de ces appareils, et nous ne décrirons pas les expériences de cours par lesquelles on peut montrer l'existence et le sens des couples que nous venons de calculer.

Indiquons maintenant quelques expériences relatives au cas des champs non uniformes. Suspendons, en face d'un barreau aimanté ou du solénoïde équivalent NS, un circuit plan, ou mieux une bobine plate C ; le diamètre du circuit est plus grand que le diamètre du barreau, et le fil de suspension est assez long pour que les déplacements ne fassent pas intervenir des forces de pesanteur trop grandes. Faisons passer un courant dans le circuit C : il est attiré par l'aimant, et vient s'enfiler sur lui (*fig.* 266), de façon à embrasser tout son flux d'induction. Renversons le sens du courant dans le circuit C ; il sort du barreau aimanté, se retourne et s'y enfile à nouveau dans l'autre sens, de façon à embrasser encore tout le flux d'induction par sa face négative.

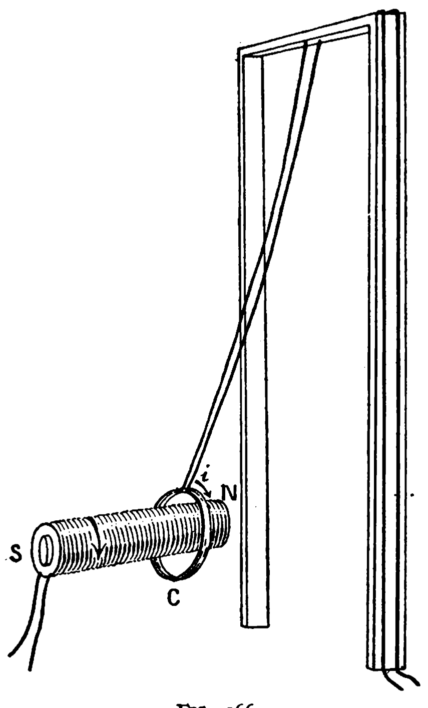


FIG. 266.

Dans un champ quelconque, le système des forces qui s'exercent sur un solénoïde est équivalent à celui des forces qui s'exercent sur l'ensemble des feuillets équivalents. Nous savons que cet ensemble de feuillets constitue un barreau aimanté (§ 184) : les actions qui s'exercent entre un solénoïde et un barreau aimanté, ou entre deux solénoïdes, sont identiques à celles qui s'exercent entre deux barreaux aimantés. Il est facile de le vérifier expérimentalement,

et de montrer par exemple que les extrémités de même signe de deux solénoïdes se repoussent, que les extrémités de signes contraires s'attirent ; on a vérifié également (expériences de Weber) qu'il était possible de répéter avec des solénoïdes courts les mesures fondamentales du magnétisme, telles que les avait faites Gauss avec des barreaux aimantés (chap. x).

215. Mesure des champs magnétiques : balance de Cotton. — On peut mesurer un champ magnétique en mesurant la force qu'il exerce sur un circuit parcouru par un courant. On mesurera le rapport de deux champs magnétiques en mesurant le rapport des forces qu'ils exercent sur le même circuit parcouru par le même courant ; on obtiendra une mesure absolue en mesurant les dimensions linéaires du circuit et en mesurant le courant en valeur absolue, par l'électrolyse de l'azotate d'argent, ou à l'aide d'un électrodynamomètre (chap. xxvi).

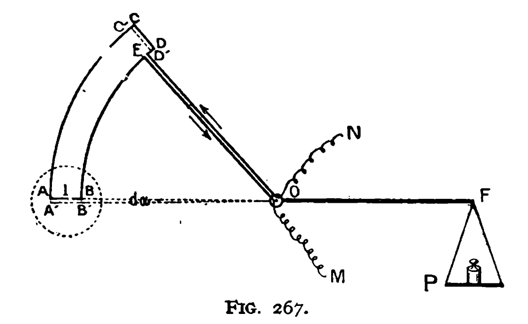


Fig. 267.

Pour mesurer le champ magnétique dans l'entrefer d'un électro-aimant,

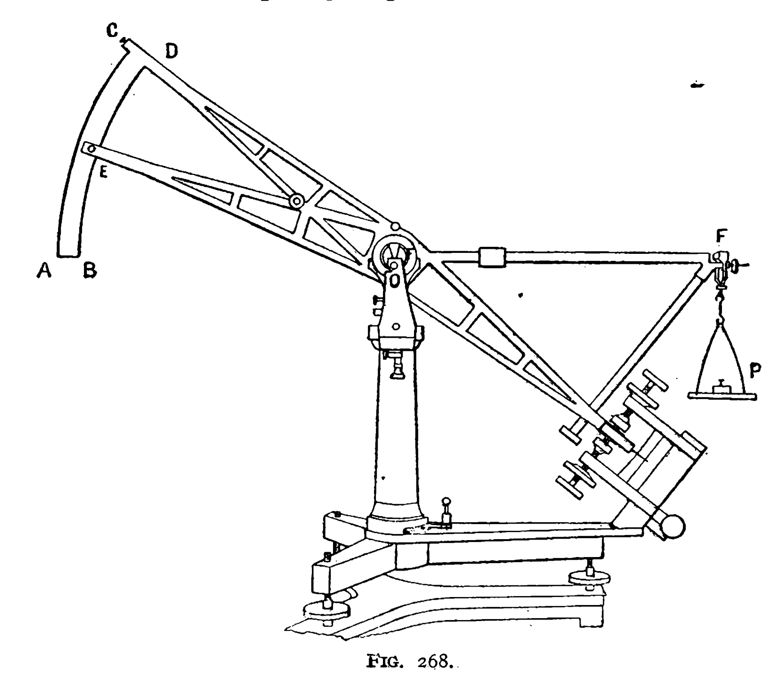


Fig. 268.

on emploie la **balance de Cotton** (*fig.* 267 et 268). Le circuit mobile est constitué par une bande métallique fixée sur un arc de verre, et se compose de

deux arcs de cercle concentriques AC, BD, réunis par deux conducteurs radiaux AB, CD. Cet arc est placé à l'une des extrémités d'un fléau de balance EOF, mobile autour d'un couteau O qui coïncide exactement avec le centre des deux arcs, et on équilibre les forces électromagnétiques par des poids placés dans le plateau P. Le courant est amené à l'arc par deux conducteurs juxtaposés OE ; la surface comprise entre ces deux conducteurs est négligeable et il n'y a pas lieu d'en tenir compte dans le calcul du flux Φ ; de même il n'y a pas lieu de tenir compte du flux à travers le reste du circuit, constitué par la source qui fournit le courant et les fils MN qui l'amènent à la balance, parce qu'il est situé assez loin de l'électro-aimant pour que le champ y soit négligeable ; on peut d'ailleurs torsader ensemble les fils MN dans la région voisine de la balance, pour réduire encore davantage ce flux.

Le flux à travers le circuit se réduit au flux à travers l'arc ABCD. Si le fléau tourne d'un angle $d\alpha$, sa variation $d\Phi$ est égale au flux à travers les deux petites surfaces ABA'B', CDC'D' ; ce dernier est d'ailleurs négligeable, si l'arc est assez long pour que l'élément CD se trouve nettement en dehors du champ de l'électro. Désignons par H l'intensité de ce champ, supposé normal au plan du circuit, et uniforme sur la longueur de l'élément AB, par l la longueur AB, par R le rayon moyen de l'arc $\left(\frac{OA + OB}{2}\right)$. Exprimons tout en u. é. m. ($\mu_0 = 1$) ; le flux à travers la surface ABA'B' est $d\Phi = \mathrm{H}l\mathrm{R}d\alpha$, et le moment, par rapport à l'axe O, du système des forces électromagnétiques, est :

$$\Gamma = i\,\frac{d\Phi}{d\alpha} = \mathrm{H}il\mathrm{R}.$$

On équilibre d'abord la balance en coupant le courant i ; lorsqu'on ferme ce courant, il faut, pour rétablir l'équilibre, ajouter ou enlever dans le plateau P une masse m ; le moment du poids mg par rapport à l'axe O est mgd, en désignant par d la distance des deux couteaux O et F. La condition d'équilibre est donc :

$$\mathrm{H}il\mathrm{R} = mgd, \qquad \mathrm{H} = \frac{mgd}{il\mathrm{R}}.$$

Si l'on a $d = \mathrm{R}$, $l = 2$ centimètres, $i = 1$ (10 ampères), H = 20.000 gauss, la masse m doit être égale à environ 40 grammes, et est mesurée facilement à 1/4.000 près, si la balance est sensible au centigramme. Il est possible de mesurer d et R à 1/30.000 près (1/100 millimètre sur 30 centimètres) ; l à 1/4.000 près (1/200 millimètre) ; on peut mesurer i à 1/10.000 près (chap. XXVI), et on peut finalement obtenir la valeur du champ magnétique avec une erreur ne dépassant pas quelques dix-millièmes.

Il faut naturellement, pour obtenir cette précision, que les conditions géométriques et mécaniques soient réalisées avec une précision correspondant aux chiffres qui viennent d'être indiqués ; le fléau doit être rigide et exempt de fer ; la distance des arcs AC et BD doit être constante à 1/200 de millimètre près, et ils doivent être centrés sur le couteau O à 1/100 de millimètre près. Les fils MN qui amènent le courant i à la partie mobile doivent être des lames très souples de cuivre recuit, de manière à n'exercer sur le fléau qu'un couple négligeable. On fera deux mesures avec les courants $+ i$ et

— i, et on en prendra la moyenne, de façon à éliminer les forces, de l'ordre des décigrammes, exercées par l'électro-aimant sur le verre diamagnétique qui constitue l'arc portant le circuit.

216. Actions mutuelles de deux courants. — Considérons deux circuits fermés en présence C et C′, parcourus par des courants i et i'. Les champs magnétiques créés par ces circuits, et les forces auxquelles ils sont soumis, sont les mêmes que pour les deux feuillets équivalents, et nous pouvons appliquer les résultats obtenus pour les feuillets. Nous introduirons dans les calculs l'**inductance mutuelle** M des deux circuits (§ 125). C'est une grandeur, homogène à une longueur dans le système électromagnétique (§ 126), qu'on peut calculer par la formule de Neumann (§ 127) :

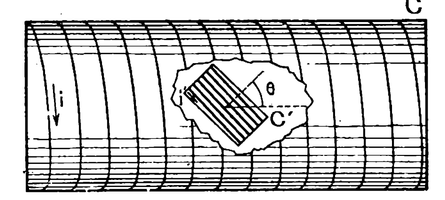


Fig. 269.

$$M = \mu_0 \iint\limits_{C\,C'} \frac{\vec{ds}\,\vec{ds'}}{r} = \mu_0 \iint\limits_{C\,C'} \frac{ds\,ds' \cos \varepsilon}{r}.$$

Partant de la formule (§ 127) $\Phi = \mathrm{MU}/\mu_0$ et de la condition d'équivalence $\mu_0 i = \mathrm{U}$, on voit que le flux envoyé par le premier circuit à travers le second est :

$$\Phi = \mathrm{M}i,$$

tandis que le flux envoyé par le second circuit à travers le premier est :

$$\Phi' = \mathrm{M}i'.$$

La résultante et le moment résultant du système des forces qui agissent sur l'un des circuits sont donnés par les formules :

$$\mathrm{X} = ii' \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}, \qquad \mathrm{L} = ii' \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \alpha}.$$

Ces formules mettent en évidence le fait que *les forces sont proportionnelles aux intensités des deux courants, et à un coefficient qui ne dépend que des données géométriques qui définissent les deux circuits et leur position relative.*

Le calcul de ce coefficient, par la formule de Neumann, est en général très compliqué. On cherchera, le plus souvent, à calculer le flux envoyé par l'un des circuits à travers l'autre par des procédés plus simples, et on en déduira la valeur de l'inductance mutuelle

Considérons, par exemple, un grand solénoïde C, comportant n spires par centimètre et parcouru par un courant i ; effectuons les calculs en supposant toutes les grandeurs mesurées en u. é. m. ($\mu_0 = 1$) : le champ à l'intérieur est uniforme, parallèle à l'axe et son intensité est $\mathrm{H} = 4\pi ni$. Plaçons-y (*fig.* 269) une petite bobine C′, de section S′, contenant au total N′ spires, parcourue par un courant i'. dont l'axe fait un angle θ avec l'axe du solénoïde. Le flux envoyé par

le circuit C à travers le circuit C′ est $\Phi = N'S'H \cos\theta = 4\pi n N'S'i \cos\theta$. L'inductance mutuelle des deux circuits est $M = \frac{\Phi}{i} = 4\pi n N'S' \cos\theta$; la bobine C′ est soumise à un couple de moment $\Gamma = ii' \frac{\partial M}{\partial\theta} = -4\pi n N'S'ii' \sin\theta$, et le flux envoyé par le cicuit C′ à travers C est $\Phi' = 4\pi n N'S'i' \cos\theta$. Si l'on remplace la bobine C′ par l'aimant A′ équivalent, dont le moment magnétique est $\mathfrak{M}' = N'S'i'$, on peut énoncer ce dernier résultat en disant que le flux envoyé par l'aimant A′ à travers le solénoïde indéfini C est $\Phi' = 4\pi n \mathfrak{M}' \cos\theta$.

On voit par cet exemple comment les propriétés de l'inductance mutuelle permettent de résoudre certains problèmes : comme les deux circuits jouent exactement le même rôle pour sa définition, on peut choisir pour son calcul celui des deux flux Φ et Φ' qui s'y prête le mieux, et se servir du résultat pour calculer l'autre. On est ainsi conduit aux mêmes calculs que dans l'application, au calcul des forces, du principe de l'action et de la réaction; les deux procédés sont équivalents.

II. — *ACTION SUR UN ÉLÉMENT DE COURANT*

217. Loi de Laplace. — Nous pouvons appliquer à un circuit fermé parcouru par un courant le théorème, démontré au paragraphe 119, qui permet de remplacer le système des forces appliquées à la matière aimantée qui constitue un feuillet par un système de forces appliquées aux éléments de son contour. Dans le cas de feuillets, ce théorème ne traduit qu'une équivalence mathématique ; dans le cas des courants il peut avoir une signification physique : on peut constituer un circuit déformable, dont un élément seul est mobile, et mesurer la force qui s'exerce sur cet élément. Rien ne prouve *a priori* que cette force aura pour valeur l'expression calculée au paragraphe 119 ; les lois établies jusqu'ici ne s'appliquent qu'à des circuits fermés, et on peut concevoir une infinité de lois de forces élémentaires donnant des systèmes équivalents pour des circuits fermés. *Nous devons considérer comme une loi expérimentale nouvelle le fait que l'expression du paragraphe* 119 *donne effectivement l'expression de la force qui agit sur un élément de courant.*

Cette loi, dite **loi de Laplace,** peut s'énoncer de la façon suivante (*fig.* 270) :

La force $\vec{f}$ exercée par un champ magnétique $\vec{H}$ sur un élément de courant $\vec{ds}$, parcouru par un courant d'intensité i, faisant l'angle α avec le champ, est perpendiculaire au plan défini par le champ magnétique $\vec{H}$ et l'élément $\vec{ds}$, dirigée vers la gauche d'un observateur placé sur l'élément $\vec{ds}$ dans le sens du courant, et regardant dans le sens du champ $\vec{H}$; sa grandeur est $f = \mu_0 H i\, ds \sin\alpha$.

Dans la notation vectorielle, on peut écrire :

$$\vec{f} = \mu_0 i \vec{ds} \wedge \vec{H}.$$

Le coefficient μ_0 s'introduit en remplaçant U par $\mu_0 i$ dans la formule donnée au paragraphe 127; la quantité $\mu_0 H$ est l'induction, et le calcul du paragraphe 119 montre qu'on peut encore énoncer la loi de Laplace en disant que :

Le travail de la force électromagnétique qui agit sur l'élément de courant $\vec{ds}$, pendant un déplacement au cours duquel cet élément coupe le flux d'induction $d\varphi$, est :

$$d\mathfrak{T} = i\,d\varphi,$$

le flux $d\varphi$ étant compté positivement quand le déplacement s'effectue vers la gauche pour un observateur placé sur l'élément $\vec{ds}$ dans le sens du courant et regardant dans la direction du champ magnétique.

Dans ce paragraphe et les deux paragraphes suivants, nous appliquerons ces formules en faisant $\mu_0 = 1$, c'est-à-dire en supposant toutes les grandeurs mesurées en u. é. m. : H en gauss, $d\varphi$ en maxwells, ds en centimètres, f en dynes, $d\mathfrak{T}$ en ergs; si l'intensité est donnée par sa valeur i_a en ampères, nous introduirons la valeur en u. é. m. $i = i_a/10$.

La loi de Laplace peut être appliquée, soit au calcul de la force qui s'exerce sur un élément de courant, soit au calcul de la résultante et du moment résultant du système de forces qui s'exerce sur un circuit fermé. Elle permet quelquefois, dans ce dernier cas, des calculs plus simples que l'évaluation du flux total. Si l'on considère par exemple la balance de Cotton (*fig.* 267) on voit que la force qui s'exerce sur l'élément CD est nulle, parce que le champ est nul ; les forces qui s'exercent sur les arcs AC et BD passent par l'axe O ; la force qui s'exerce sur l'élément AB est normale à cet élément, et égale à Hil. Le moment résultant de toutes les forces par rapport à l'axe O se réduit au moment HilR de cette dernière force; c'est le résultat trouvé, par le calcul du flux, au paragraphe 215.

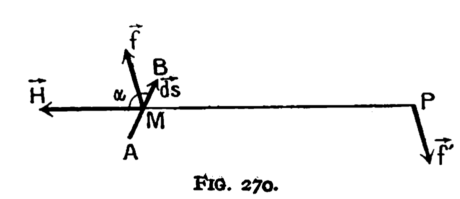


FIG. 270.

Considérons un élément de courant AB $= ds$ (*fig.* 270) et une masse magnétique $+ 1$ placée en P à une distance r de l'élément de courant. Calculons, par la loi de Biot et Savart, la force $f' = \frac{i\,ds}{r^2} \sin\alpha$ exercée par l'élément AB sur le pôle P, et, par la loi de Laplace, la force $f = i\,ds\,.\,\mathrm{H}\sin\alpha = \frac{i\,ds\,\sin\alpha}{r^2}$ exercée par le pôle P sur l'élément AB. Ces deux forces sont perpendiculaires au plan PAB et forment un couple : elles ne sont pas égales et directement opposées, et ne satisfont pas au principe de l'action et de la réaction. Il n'y a là rien d'extraordinaire, puisque la loi de Biot et Savart n'a aucune signification physique ; la considération du champ produit par l'élément AB, indépendamment du champ produit par le reste du circuit, est dénuée de sens. Les actions qui ont une existence réelle sont les actions mutuelles d'un circuit fermé et d'un pôle d'aimant ; elles sont évidemment représentées par deux forces égales et directement opposées, puisqu'elles sont équivalentes aux actions qui s'exercent entre le pôle P et les masses magnétiques portées par les faces du feuillet équivalent au courant, et sont par suite les résultantes d'actions élémentaires newtoniennes, satisfaisant au principe de l'action et de la réaction.

Des remarques analogues peuvent être faites sur les expressions auxquelles

conduit l'application des lois de Biot et Savart et de Laplace pour représenter l'action mutuelle de deux éléments de courants *ds*, *ds'*. Ici les forces trouvées peuvent ne pas avoir même direction et ne pas être égales. On peut chercher à trouver une expression de la force élémentaire qui satisfasse au principe de l'égalité de l'action et de la réaction ; c'est un exercice de calcul sur les systèmes de forces qui sont équivalents pour des circuits fermés. Il ne présente aucun intérêt physique, et l'expression trouvée ne correspond pas plus à la réalité que la loi de Biot et Savart, puisque la seule réalité physique est l'action d'un circuit fermé sur un élément de courant.

218. Expériences. — Il est facile de montrer expérimentalement l'action d'un champ magnétique sur un élément de courant, et de vérifier que la force a bien la direction indiquée par la loi de Laplace. Plaçons horizontalement un aimant en fer à cheval NS, et, entre les pôles de cet aimant, suspendons un fil de cuivre vertical OA, mobile en tous sens autour du point O, dont l'extrémité inférieure plonge dans une rigole pleine de mercure. Si l'on fait passer un courant dans le fil OA, le fil se déplace perpendiculairement au champ magnétique, dans le sens prévu par la règle d'Ampère (*fig.* 271). Si

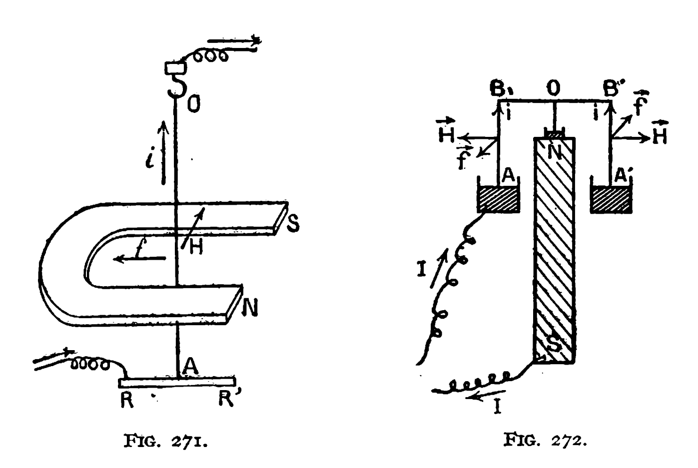


FIG. 271. FIG. 272.

l'on renverse le sens du courant ou si l'on retourne l'aimant de façon à changer le sens du champ, le sens du déplacement change.

On peut réaliser une expérience analogue, dans laquelle on obtient une rotation continue, par le dispositif suivant, dû à Faraday (*fig.* 272). Un aimant vertical supporte, par une pointe qui plonge dans un godet de mercure, un petit cadre rectangulaire OBAB'A' ; le courant arrive par la rigole circulaire AA' remplie de mercure, se bifurque dans les branches et sort par l'axe O. Les forces qui s'exercent sur les deux côtés du cadre forment un couple, qui fait tourner l'équipage, dans le cas de la figure, dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre ; on renverse le sens de la rotation en changeant le sens du courant. La rotation peut durer indéfiniment ; lorsque le courant a fait un tour complet autour du pôle N, le travail des forces électromagnétiques est le même que si le pôle avait fait un tour

autour du courant ; si m est la masse magnétique du pôle et I le courant total, ce travail est égal, d'après le théorème d'Ampère, à $4\pi Im$. L'appareil peut fournir indéfiniment du travail : nous verrons dans un prochain chapitre comment l'énergie correspondante est fournie par la source qui entretient le courant.

L'expérience réussit encore si l'on remplace le cadre rectangulaire par une boîte métallique formée d'un fond plat BB′ et d'une paroi cylindrique ABA′B′ dont le bord AA′ plonge tout entier dans la rigole. L'effet des forces électromagnétiques n'est pas de faire tourner le courant autour de l'axe NS à l'intérieur de la matière métallique qui constitue le cylindre, mais de faire tourner le cylindre lui-même. *Nous devons considérer les forces électromagnétiques comme appliquées à la matière conductrice parcourue par un courant.*

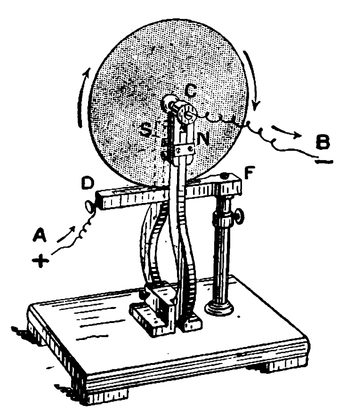


FIG. 273.

Citons encore l'expérience de la roue de Barlow (*fig.* 273). Un disque de cuivre, mobile autour d'un axe horizontal C, plonge très légèrement, par son bord inférieur, dans une rigole DF contenant du mercure ; il se met en mouvement lorsqu'il est parcouru par un courant, qui, dans le cas de la figure, arrive par le mercure et sort par l'axe de rotation. On remarquera l'analogie de cette expérience et de la première des expériences décrites ; la modification effectuée par la substitution du disque plein au fil OA peut être rapprochée de la modification faite à l'expérience de Faraday par la substitution d'un cylindre métallique au cadre rectangulaire. L'expérience de la roue de Barlow montre également que les forces électromagnétiques sont appliquées à la matière conductrice.

L'expérience de la roue de Barlow peut être faite en remplaçant l'aimant par un solénoïde, assez grand pour qu'on puisse placer la roue à l'intérieur normalement à son axe. Le champ magnétique H peut alors être uniforme tout le long du rayon a, et la force électromagnétique f qui s'exerce sur le courant i de longueur a est $f = \text{H}ia$. Elle est appliquée au milieu de l'élément de courant, et son moment par rapport à l'axe de rotation est $\Gamma = f\frac{a}{2} = \frac{\text{H}ia^2}{2}\cdot$ L'appareil constitue un véritable moteur électrique, dont nous venons de calculer le couple moteur ; lorsqu'il a fait un tour, les forces électromagnétiques ont fourni un travail $\mathfrak{T} = 2\pi\Gamma = \pi \text{H}ia^2$; on peut l'utiliser à élever un poids suspendu à un fil qui s'enroule autour de l'axe de rotation. Nous verrons dans un prochain chapitre comment l'énergie correspondant à ce travail est fournie par la source qui entretient le courant dans la roue mobile.

219. Action d'un courant sur lui-même. — Un élément d'un circuit parcouru par un courant est toujours placé dans un champ magnétique, qui est le champ créé par le circuit lui-même. Il est donc soumis à une force électromagnétique, et, si le circuit est déformable, les éléments mobiles tendent à se déplacer par rapport aux autres.

Considérons, pour plus de simplicité, un circuit plan. Les lignes de force du champ magnétique qu'il crée traversent toutes dans le sens positif la surface limitée par le courant : *quel que soit le sens du courant*, cette surface reçoit toujours le flux par sa face négative, et elle est traversée par un flux d'autant plus grand qu'elle est plus grande. D'après la loi générale du paragraphe 213, *le circuit tend à se déformer* de façon à recevoir le plus grand flux possible par sa face négative, c'est-à-dire *de façon à augmenter sa surface*. C'est ce qu'on montre par une expérience due à Ampère : le courant d'un accumulateur arrive à deux rigoles parallèles RR′ remplies de mercure et réunies par un pont AB (*fig.* 274), formé d'un fil de fer flottant sur le mercure; lorsque l'on ferme le circuit de l'accumulateur, quel que soit le sens du courant, on voit l'équipage mobile glisser sur le mercure et s'éloigner des bornes d'arrivée MN.

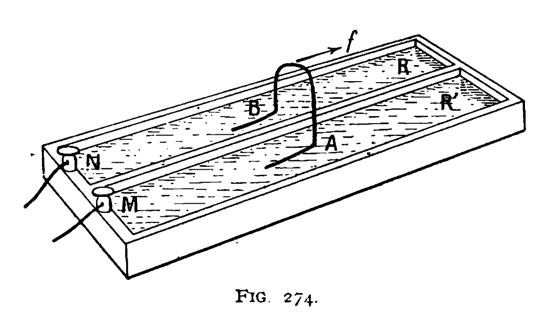


FIG. 274.

On comprendra immédiatement cette expérience en assimilant le circuit extensible à un feuillet replié sur lui-même (*fig.* 275). Les trois portions de feuillet superposées dans l'espace *mnab* n'exercent l'une sur l'autre aucune force parallèle au plan du courant; elles créent, à l'extérieur de cet espace, un champ identique à celui d'un feuillet simple. Le flux créé par les feuillets MN*ab* pénètre par la face positive dans le feuillet *ab*AB : cette dernière partie tend à se déplacer de façon à diminuer la valeur absolue de ce flux, et à s'écarter des premières. Le feuillet flexible se dépliera complètement, et, de même, l'équipage mobile AB de l'expérience d'Ampère s'éloignera le plus possible des bornes d'arrivée MN.

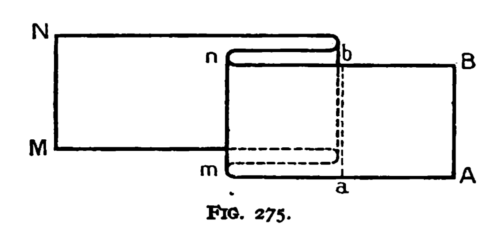


FIG. 275.

Le champ magnétique créé par un courant en un point quelconque est proportionnel à l'intensité de ce courant; la force qui agit sur un élément de courant est proportionnelle au champ magnétique et à l'intensité du courant dans l'élément. La force qui agit sur un élément de circuit déformable, sous l'action du courant même qui parcourt ce circuit, est proportionnelle au carré de l'intensité du courant; cette proportionnalité à une puissance paire de l'intensité indique que, comme nous l'avons déjà dit, le sens de la force ne change pas lorsqu'on change le sens du courant.

Le calcul de la force à partir des dimensions géométriques est en général assez compliqué (cf. § 230); on peut le faire simplement dans le cas où la partie mobile et la partie fixe du circuit forment toutes deux des circuits presque fermés, et peuvent être traitées pratiquement comme des circuits fermés. Ce sera le cas, par exemple, pour l'appareil qu'on constitue en réunissant en série le grand solénoïde C et la petite bobine intérieure C′ de la

figure 269 (§ 216), de façon à constituer un seul circuit parcouru par un même courant. Il est inutile, pour calculer les forces qui s'exercent sur la bobine mobile, de calculer le flux total qui la traverse ; il suffit de calculer la partie variable de ce flux, c'est-à-dire le flux envoyé par la bobine fixe. Autrement dit, on peut appliquer directement la formule du paragraphe 216, en y faisant $i' = i$: la bobine C′ est soumise à un couple dont le moment est $\Gamma = \mathcal{M}'H \sin\theta = 4\pi n N'S'i^2 \sin\theta$. Nous verrons (chap. XXVI) que ce dispositif est celui d'un électrodynamomètre usuel ; remarquons aussi qu'il est identique, dans son principe, à celui d'un moteur-série (§ 431) ; dans l'un comme dans l'autre de ces appareils, on utilise l'action d'un courant sur lui-même, et les forces ne changent pas de sens quand on change le sens du courant : ils peuvent être employés en courant alternatif.

CHAPITRE XXII

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION

I. — *LOIS GÉNÉRALES DE L'INDUCTION*

220. Expériences fondamentales. — Les phénomènes d'induction ont été découverts par Faraday en 1831. On peut résumer les conditions dans lesquelles ces phénomènes se produisent par l'énoncé suivant :

Lorsqu'on fait varier, par un procédé quelconque, le flux d'induction magnétique qui traverse un circuit fermé conducteur, ce circuit est le siège d'un courant, dit **courant induit.**

Le sens de ce courant est donné par la **loi de Lenz :**

Le sens du courant induit est tel que le flux qu'il produit à travers le circuit qu'il parcourt tende à s'opposer à la variation de flux qui lui donne naissance.

Passons rapidement en revue diverses expériences correspondant aux divers procédés de modification du flux d'induction. Dans toutes ces expériences, un galvanomètre est intercalé dans le circuit ; sa déviation décèle l'existence du courant induit, et indique le sens de ce courant.

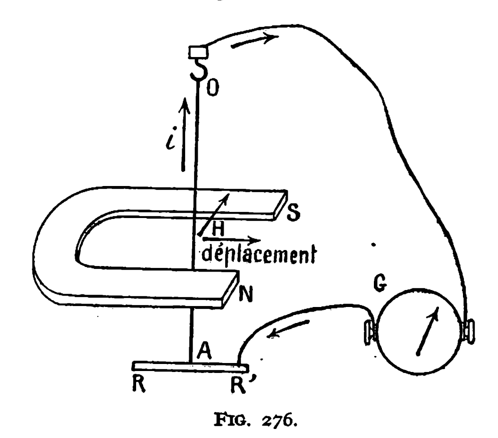


FIG. 276.

La modification du flux peut être produite par le déplacement d'un élément mobile du circuit dans un champ magnétique. On peut employer le dispositif de la première expérience du paragraphe 218 : les bornes du galvanomètre sont reliées à l'axe O et au mercure RR' (*fig.* 276), le déplacement du fil produit une variation du flux à travers le circuit égale au flux coupé par l'élément mobile. Déplaçons le fil de gauche à droite : le flux qui traverse le circuit d'avant en arrière diminue ; le courant induit doit produire un flux dirigé, à travers le circuit, d'avant en arrière ; il va, dans le fil AO de A vers O. Remarquons que la force électromagnétique exercée par le champ H sur le courant induit est dirigée, d'après la loi de Laplace, en sens inverse du déplacement : elle tend à s'opposer au mouvement. C'est là une conséquence générale de la loi de Lenz (cf. § 240), dont on peut donner un second énoncé.

valable dans tous les cas où les courants induits sont produits par des déplacements :

Le déplacement relatif d'un circuit fermé et d'un système d'aimants ou de courants produit un courant induit dirigé de telle façon que les forces qui résultent de son existence s'opposent au mouvement.

On peut dire que les courants induits correspondent à une sorte d'inertie électromagnétique, qui s'oppose, par les forces qu'elle produit, aux variations de flux, comme l'inertie de la matière s'oppose, par les forces d'inertie, aux variations de vitesse.

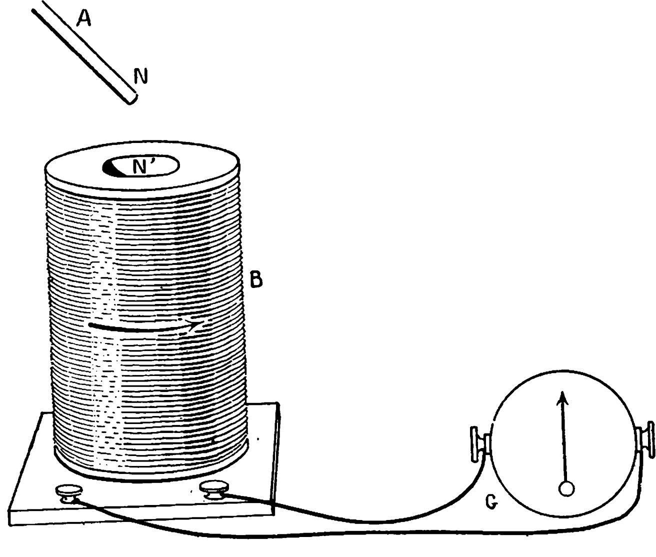


Fig. 277.

On peut observer des courants induits en approchant une bobine d'un aimant, ou au contraire en approchant l'aimant de la bobine. Si on approche l'aimant A de la bobine B (*fig.* 277), le flux qui traverse la bobine de haut en bas augmente ; le courant induit doit produire, à l'intérieur de la bobine, un champ dirigé vers le haut : son sens est celui de la flèche. La bobine parcourue par le courant induit est équivalente à un aimant N'S', qui repousse le barreau NS, et s'oppose à son mouvement.

L'aimant NS peut être remplacé par le solénoïde équivalent, c'est-à-dire par une seconde bobine B' parcourue par un courant constant : on obtient les mêmes phénomènes. Mais on peut aussi faire varier le flux envoyé par la bobine B' à travers la bobine B en faisant varier l'intensité du courant qui parcourt la bobine B'. Si la bobine B' est placée à l'intérieur de la bobine B (*fig.* 278), et si l'on fait passer l'intensité du courant qui la parcourt de la valeur 0 à la valeur i', il se produit dans la bobine B un courant induit i, dont le flux s'oppose au flux créé par B', dont le sens est par conséquent opposé à celui du courant i'. Au moment où l'on coupe le courant i', on observe, au contraire, un courant induit de même sens que le courant i'.

On peut encore augmenter le flux d'induction envoyé par B′ à travers le circuit B en enfonçant, à l'intérieur de la bobine B′ parcourue par le courant constant i', un noyau F de fer doux : on observe à ce moment un courant in-

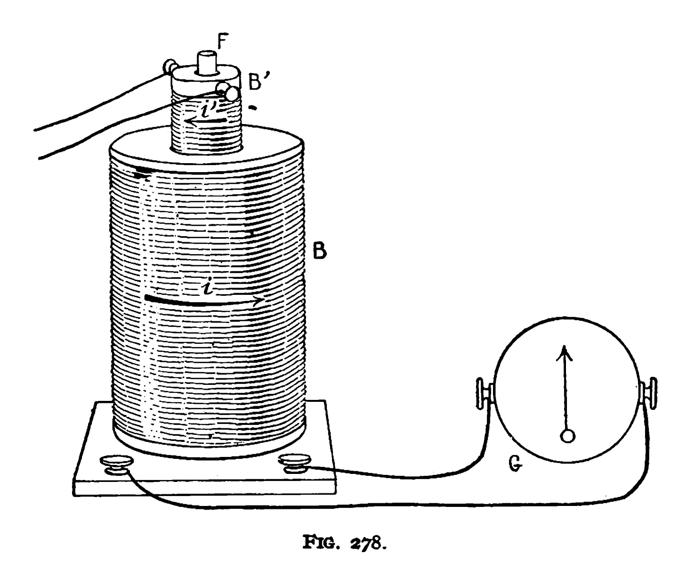


FIG. 278.

duit de même sens que celui qui correspond à l'établissement du courant i'. De même, si l'on enroule sur la culasse d'un électro-aimant (*fig.* 279) une bobine B de quelques spires, et si, laissant le courant magnétisant constant, on ferme le circuit magnétique de l'électro-aimant par une armature AA′ de fer doux, on constate dans la bobine B un courant induit de même sens que celui qui correspond à la fermeture du courant magnétisant. On a diminué la réluctance du circuit magnétique sans changer la force magnétomotrice, et par là même on a augmenté le flux d'induction qui traverse la bobine induite.

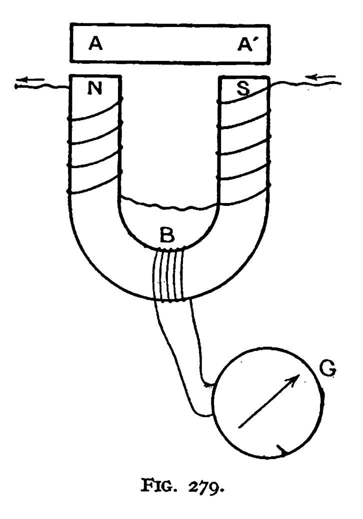


FIG. 279.

Ces dernières expériences montrent que le vecteur qui doit intervenir dans le calcul du flux est le vecteur induction magnétique, et non le vecteur champ magnétique. C'était d'ailleurs évident *a priori*, et la loi générale de l'induction n'a de sens que si l'on considère le flux d'induction : le flux de force du champ magnétique à travers un circuit n'est pas défini, il peut dépendre de la surface choisie pour le calculer, tandis que le flux d'induction ne dépend que du contour qui limite cette surface. Nous savons d'ailleurs que, dans le système d'unités élec-

tromagnétiques, le vecteur induction est égal à 1/100.000 près au vecteur champ magnétique pour l'air et la plupart des substances.

221. Courants de Foucault. — Dans les expériences décrites jusqu'ici, le circuit où se développaient les courants induits était un circuit linéaire. Si l'on déplace une masse conductrice dans un champ magnétique, il se développera de même des courants induits dans cette masse conductrice : ce sont les **courants de Foucault.** D'après la loi de Lenz, ils sont soumis à des forces qui s'opposent au mouvement : on le constate facilement en faisant tourner un disque de cuivre, normal au champ, entre les pôles d'un électro-aimant. Tant qu'il ne passe pas de courant dans les bobines de l'électro, il suffit d'un effort très faible pour faire tourner rapidement le disque ; dès qu'on excite l'électro-aimant, le disque est arrêté, et on ne parvient à le faire tourner lentement qu'avec un effort considérable.

Nous verrons tout à l'heure que l'intensité des courants induits dans un circuit donné est proportionnelle à la vitesse de variation du flux à travers ce circuit. Les courants de Foucault parcourent, à l'intérieur du disque de cuivre, des circuits définis par les lignes de courant qui leur correspondent ; leur intensité est proportionnelle à la vitesse de variation du flux à travers ces circuits et par suite à la vitesse de rotation du disque ; il en est de même des forces qui s'exercent sur eux. Les forces électromagnétiques qui agissent sur le disque constituent des *forces d'amortissement* proportionnelles à la vitesse et dirigées en sens inverse de la vitesse. Elles sont employées à ce titre dans un certain nombre d'appareils : pour amortir le mouvement d'un équipage mobile, il suffit de lui fixer un disque de cuivre qui tourne entre les branches d'un aimant en fer à cheval.

Les courants de Foucault se produisent également lorsqu'une masse métallique fixe est soumise à un champ magnétique variable. Dans l'un comme dans l'autre cas, la masse métallique s'échauffe, les courants induits y dissipent de l'énergie par effet Joule ; ce phénomène se produit dans le fer de l'induit des dynamos, de la carcasse des transformateurs, etc., et réduit le rendement de ces appareils. On diminue l'énergie dissipée en constituant ces masses de fer par des tôles empilées, séparées l'une de l'autre par un isolant, papier ou vernis, et disposées de façon que le champ magnétique leur soit constamment parallèle ; dans une dynamo, par exemple, elles sont perpendiculaires à l'axe de rotation. Les circuits conducteurs qu'on peut constituer dans la masse métallique sont alors des circuits plans, parallèles au champ magnétique ; ils ne sont jamais traversés par aucun flux d'induction, et ne peuvent être le siège d'aucun courant induit. On supprimerait totalement les courants de Foucault si l'on pouvait employer un nombre infiniment grand de tôles infiniment minces.

222. Loi fondamentale de l'induction. — Les quelques exemples que nous avons donnés montrent que, dans l'étude des courants induits, nous aurons à considérer des courants dont l'intensité varie d'un instant à l'autre. Nous admettrons que toutes les lois que nous avons établies pour les courants continus restent valables, à chaque instant, dans le cas des courants variables. — Nous admettrons que l'intensité du courant à l'instant t, $i = \frac{dq}{dt}$, est la

même en tous les points du circuit. — Nous admettrons que le circuit parcouru à l'instant t par le courant d'intensité i crée, à cet instant, les mêmes champs magnétiques et subit les mêmes forces que le feuillet équivalent. — Nous admettrons qu'on peut appliquer, à chaque instant, les lois d'Ohm et de Joule : dans un conducteur AB de résistance r, on a à chaque instant, entre les valeurs $V_A - V_B$ de la différence de potentiel aux extrémités, e de la force électromotrice, et i de l'intensité du courant, la relation $V_A - V_B + e = ri$; pendant le temps dt, l'énergie électrique créée par la f. é. m. e est $ei\,dt$, l'énergie dissipée par effet Joule est ri^2dt. — De même, nous admettrons qu'on peut appliquer à chaque instant la loi de Faraday, et que la quantité d'électrolyte décomposée pendant le temps dt est toujours proportionnelle à la quantité d'électricité $dq = i\,dt$ qui a traversé le circuit pendant ce temps.

Remarquons d'ailleurs que toutes ces hypothèses ne sont pas toujours valables. Nous avons déjà signalé qu'on ne peut admettre la constance de l'intensité du courant aux différents points d'un circuit que si l'on néglige les capacités des conducteurs qui le constituent (§ 136) ; nous verrons plus tard que le champ magnétique se propage avec une vitesse finie à partir du circuit qui le produit (chap. XXXI), et que la résistance d'un conducteur peut être plus grande pour les courants variables que pour les courants continus (§ 322). Mais ces phénomènes ne se manifestent que pour des courants très rapidement variables, et nous pourrons, sans erreur appréciable, appliquer à chaque instant les lois des courants continus à des courants lentement variables.

L'étude expérimentale des courants induits a conduit à donner l'énoncé suivant de la loi fondamentale de l'induction :

Un circuit traversé par un flux Φ variable est le siège d'une f. é. m. d'induction e proportionnelle à la dérivée $\frac{d\Phi}{dt}$ du flux par rapport au temps ; cette f. é. m. ne dépend ni de la résistance du circuit ni de l'intensité du courant qui le parcourt, et le coefficient de proportionnalité de e à $\frac{d\Phi}{dt}$ ne dépend que des unités choisies.

Nous choisirons sur le circuit un sens positif suivant lequel nous compterons les f. é. m. et les courants. Nos conventions habituelles nous fixent alors le sens positif de la normale à une surface limitée par le circuit, suivant lequel nous devons compter les flux : c'est le sens du flux produit par un courant positif. Si $\frac{d\Phi}{dt}$ est positif, cela veut dire que la variation de flux $d\Phi$ pendant le temps dt est positive ; d'après la loi de Lenz, le courant induit doit produire un flux négatif et être dirigé dans le sens négatif du circuit. La formule qui exprime la loi fondamentale de l'induction devra contenir le signe —. L'expérience montre de plus que, *si les différentes grandeurs sont exprimées dans un système d'unités satisfaisant à la relation de coordination $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$ (§ 133), son coefficient est égal à l'unité.* On a :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Dans la pratique, on mesure souvent la f. é. m. en volts, tandis que le flux Φ

reste mesuré en maxwells. L'unité pratique de flux vaut 10^8 maxwells (§ 134) et un flux Φ maxwells vaut $10^{-8}\Phi$ u. é. m. La f. é. m. en volts est :

$$e_v = -\ 10^{-8} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Nous n'indiquerons pas de vérification expérimentale de la loi fondamentale de l'induction. Elle est constamment utilisée pour le calcul des générateurs d'électricité, ainsi que dans un grand nombre de mesures, dont nous étudierons quelques-unes : ces calculs et ces mesures en fournissent une vérification permanente.

Comme exemple de son application, considérons un circuit plan, d'aire S, tournant d'un mouvement uniforme, avec une vitesse angulaire ω, autour d'un axe $z'z$; supposons-le placé dans un champ uniforme, champ magnétique terrestre ou champ d'un solénoïde, dont la composante normale à l'axe $z'z$ est $\vec{H}$ (*fig.* 280). Prenons un sens positif sur le circuit, et soit $\vec{ON}$ la normale au plan du circuit. Si l'on choisit convenablement l'origine des temps, l'angle des deux vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{ON}$ est ωt, et le flux d'induction qui traverse le circuit est, en u. é. m., $\Phi = HS \cos \omega t$: la f. é. m. d'induction est $e = -\, d\Phi : dt = HS\omega \sin \omega t = 2\pi\nu HS \sin 2\pi\nu t$, en désignant par ν le nombre de tours par seconde. Le circuit est le siège d'une f. é. m. sinusoïdale, dont la valeur maximum est : $e_0 = HS\omega = 2\pi\nu HS$. Ce dispositif peut être considéré comme le schéma de tous les générateurs industriels. Nous aurons d'autre part l'occasion de décrire des expériences de détermination de l'ohm, dans lesquelles on l'a utilisé : on a mesuré la valeur de e_0 (§ 272), ou la valeur du champ magnétique créé par les courants produits par la f. é. m. e (§ 271) : le fait que de telles expériences ne conduisent pas à des contradictions est une vérification expérimentale extrêmement précise de la loi fondamentale de l'induction.

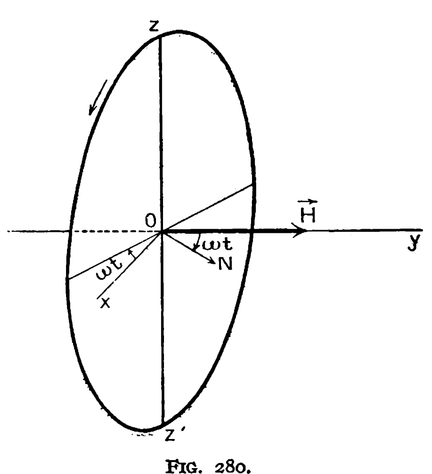


FIG. 280.

223. Quantité d'électricité induite. — Un circuit fermé, de résistance r, dans lequel existe à l'instant t une f. é. m. d'induction $e = -\, d\Phi\,/\,dt$, est parcouru par un courant induit dont l'intensité i est donnée par la loi d'Ohm :

$$i = -\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Pendant le temps dt, ce courant transporte la quantité d'électricité $dq = i\,dt = -\frac{d\Phi}{r}\cdot$ Entre les instants t_1 et t_2 où le circuit est traversé par

les flux Φ_1 et Φ_2, il transporte la quantité totale d'électricité :

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i\,dt = \int_{t_1}^{t_2} - \frac{d\Phi}{r} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r},$$

La quantité d'électricité transportée par les courants induits est égale au quotient de la diminution du flux d'induction à travers le circuit par la résistance totale du circuit.

Cette expression suppose les flux Φ_1 et Φ_2, la quantité d'électricité q et la résistance r mesurés dans un même système d'unités. Si les flux Φ sont mesurés en maxwells, tandis que les quantités d'électricité q_c sont mesurées en coulombs et les résistances r_0 en ohms, il faut remplacer les flux par leurs valeurs $10^{-8}\Phi$ en unités pratiques, et on obtient :

$$q_c = 10^{-8} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r_0}.$$

Les flux Φ_1 et Φ_2 sont les flux totaux qui traversent le circuit aux instants t_1 et t_2 ; ils comprennent les flux créés par le courant lui-même. On n'a pas à tenir compte de cette dernière partie du flux si l'on applique la formule entre deux instants t_1 et t_2 auxquels le courant induit est nul. Si l'on produit une variation brusque du flux d'induction qui commence à l'instant t et est terminée à l'instant $t + \theta$, la quantité d'électricité q est celle qui a parcouru le circuit depuis l'instant $t_1 < t$ jusqu'à l'instant $t_2 > t + \theta$ (cf. § 228).

Nous verrons plus tard comment on peut mesurer la quantité d'électricité q à l'aide d'un galvanomètre balistique (§ 258) ou d'un fluxmètre (§ 260) : ces appareils permettent de mesurer les variations du flux d'induction qui traverse une bobine b placée entre leurs bornes, et par suite les variations du champ magnétique auquel elle est soumise. Nous allons en indiquer quelques applications, en faisant tous les calculs en u. é. m.

Pour mesurer, par exemple, la composante verticale Z du champ magnétique terrestre, on emploie une bobine b à spires horizontales, qu'on retourne face pour face : si la surface totale des spires est S, les deux flux d'induction qui traversent la bobine sont $\Phi_1 = ZS$ et $\Phi_2 = - ZS$, et la quantité d'électricité induite est $q = \frac{2ZS}{r}$. On mesure de même la composante horizontale en plaçant les spires de la bobine verticales et perpendiculaires au plan du méridien magnétique ; la mesure du rapport des déviations dans les deux expériences permet de calculer l'inclinaison. On obtient d'ailleurs plus de précision dans la mesure de l'inclinaison (cf. § 100) par une méthode de zéro, en cherchant à orienter l'axe de rotation de façon que les courants induits soient nuls pour une rotation quelconque : cet axe est alors parallèle au champ magnétique terrestre.

De même, pour mesurer le champ H d'un électro-aimant, on emploie une bobine b de petites dimensions, placée dans l'entrefer, normalement au champ ; si S est sa surface totale, elle est traversée par le flux d'induction

$\Phi_1 = HS$. On la fait sortir brusquement du champ, par l'action d'un ressort, qui l'écarte suffisamment pour que le flux Φ_2 qui la traverse dans la nouvelle position soit nul ; la quantité d'électricité qui a parcouru le circuit est $q = \frac{HS}{r}$. La déviation du galvanomètre balistique ou du fluxmètre est proportionnelle à q, donc à H ; on étalonne l'appareil en répétant la même opération avec la même bobine et avec un champ magnétique connu, qu'on peut produire à l'aide d'une bobine étalon parcourue par un courant mesuré en valeur absolue.

On peut employer une méthode analogue pour la mesure de l'induction dans un barreau de fer. La figure 281 représente l'appareil d'Hopkinson, utilisé pour la mesure de la perméabilité du fer. Il comporte un circuit magnétique fermé, constitué par l'éprouvette aa' du métal à essayer, et un cadre massif de fer doux PQ de réluctance négligeable. La réluctance du circuit magnétique se réduit à celle de la partie de l'éprouvette comprise entre les bords intérieurs du cadre, $\frac{1}{\mu}\frac{l}{s}$, et si les bobines magnétisantes BB' comportent N spires et sont parcourues par un courant d'intensité i, le flux d'induction est $\Phi = 4\pi N i \frac{\mu s}{l}$. L'éprouvette aa' se compose de deux parties appliquées l'une sur l'autre par des faces bien planes ; on tire l'une d'elles, et la bobine induite b', sollicitée par un fil élastique, saute hors du champ de l'appareil : elle est alors parcourue, si elle comporte n spires, par une quantité d'électricité $q = \frac{n\Phi}{r}$, qu'on mesure au galvanomètre balistique ou au fluxmètre.

Le même appareil peut servir à tracer la courbe d'hystérésis d'un barreau aa', en répétant l'expérience pour différentes valeurs du courant i ; l'emploi d'un circuit magnétique fermé fait qu'on n'a nulle part de magnétisme libre, et qu'il n'y a pas de champ démagnétisant : le champ magnétique H est proportionnel à l'intensité i du courant magnétisant, et l'induction B à la déviation du galvanomètre balistique ou du fluxmètre. On peut aussi laisser le barreau fixe, et procéder par augmentations ou diminutions successives de i, en mesurant à chaque fois la variation de B correspondante.

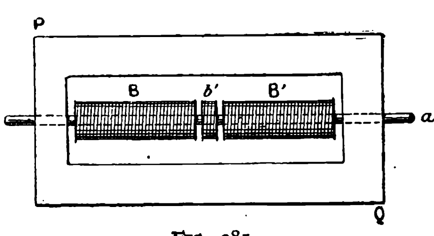


FIG. 281.

II. — *EXPRESSIONS ANALYTIQUES*

224. Force électromotrice d'induction élémentaire : conducteur mobile. — Considérons d'abord les phénomènes d'induction qui se produisent dans un circuit qui se déplace, en totalité ou en partie, dans un champ magnétique constant. La variation $d\Phi$ du flux d'induction qui traverse le circuit

est égale (§ 118) au flux qu'il coupe dans son déplacement ; c'est la somme des flux $d\varphi$ coupés par ses divers éléments. La f. é. m. d'induction totale qui existe dans le circuit, $e = - d\Phi / dt$, peut être considérée comme la somme de f. é. m. d'induction élémentaires :

$$de = -\frac{d\varphi}{dt},$$

existant dans chacun des éléments du circuit.

Les sens positifs suivant lesquels doivent être comptés la f. é. m. *de* et le flux $d\varphi$ sont liés par la règle établie au paragraphe 118. *Le flux* $d\varphi$ *coupé par l'élément* $\overrightarrow{AB}$ *est positif si le déplacement s'effectue vers la gauche pour un observateur placé sur l'élément dans le sens positif et regardant dans la direction du champ magnétique. La f. é. m. d'induction est alors négative, c'est-à-dire dirigée de* B *vers* A. C'est le cas de la figure 282 : on y voit immédiatement que le flux qui traverse le circuit C de bas en haut augmente quand l'élément AB vient en A'B', et que le sens de la f. é. m. induite donné par la loi de Lenz est bien le sens $\overrightarrow{BA}$. Les techniciens emploient souvent, au lieu de la règle que nous venons de rappeler, la **règle des trois doigts de la main gauche :** l'index étant dirigé dans le sens du champ magnétique, et le médius dans le sens du déplacement, le pouce indique le sens de la f. é. m. induite.

Les f. é. m. élémentaires que nous venons de calculer ont une existence réelle : lorsqu'un circuit C comporte un seul élément mobile AB, il est évident, d'une part que la f. é. m. qui apparaît dans le circuit est localisée à l'endroit où est localisé le déplacement qui lui donne naissance, c'est-à-dire dans l'élément AB, et d'autre part que la variation du flux qui traverse le circuit est égale au flux coupé par cet élément.

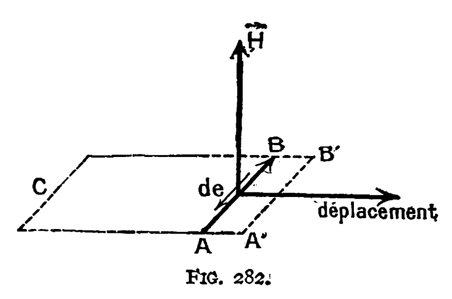


FIG. 282.

L'élément mobile AB constitue un générateur, de f. é. m. *de*, et si sa résistance est $d\rho$, la différence de potentiel entre ses extrémités, donnée par la loi d'Ohm, est égale à $de - i\, d\rho$. Si l'élément AB existe seul, autrement dit si l'on déplace un conducteur isolé dans un champ magnétique, il constitue un générateur en circuit ouvert : le courant i qui le parcourt est nul, et la différence de potentiel entre ses extrémités est égale à la f. é. m. d'induction créée dans l'élément, $de = - d\varphi / dt$. L'existence de ces différences de potentiel peut être mise en évidence expérimentalement, et on peut constater *qu'un condensateur dont les armatures sont reliées aux extrémités de l'élément mobile se charge.* C'est cette expérience qu'on répète lorsqu'on mesure, avec un voltmètre électrostatique, la différence de potentiel aux bornes d'une dynamo dont le circuit d'induit est ouvert.

225. Force électromotrice d'induction élémentaire : champ variable. — Considérons maintenant un circuit C immobile, dans lequel des

courants sont induits par un champ magnétique variable. Le vecteur induction $\vec{B}$ dérive toujours d'un potentiel-vecteur $\vec{A}$ (§ 120), et le flux d'induction Φ à travers une surface Σ limitée par le contour C est égal à la circulation du vecteur $\vec{A}$ le long de ce contour :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B}\,\vec{dS} = \int_{C} \vec{A}\,\vec{ds}.$$

Les valeurs des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ en un point M dépendent, non seulement des coordonnées xyz du point M, mais encore du temps t. Le contour d'intégration C étant fixe, on peut calculer la f. é. m. d'induction dans le circuit par la relation :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \int_{C} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,\vec{ds} = -\int_{C}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}\,dx + \frac{\partial A_y}{\partial t}\,dy + \frac{\partial A_z}{\partial t}\,dz\right).$$

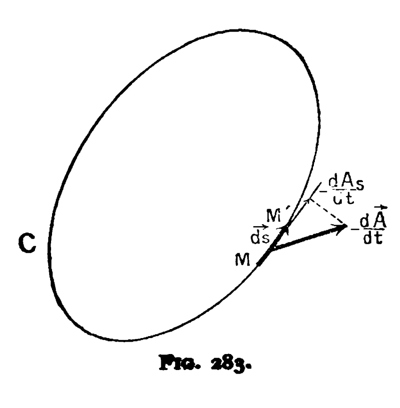


FIG. 283.

Elle peut être considérée comme la somme de f. é. m. élémentaires produites dans chaque élément du circuit ; *la f. é. m. d'induction de dans l'élément* $\vec{MM'} = \vec{ds}$ (*fig.* 283) *est égale au produit scalaire des deux vecteurs* $\vec{ds}$ *et* $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, *c'est-à-dire au produit de la longueur ds de l'élément par la projection* $-\frac{\partial A_s}{\partial t}$ *du vecteur* $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ *sur l'élément :*

$$e = \int_{C} de, \qquad de = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,\vec{ds} = -\frac{\partial A_s}{\partial t}\,ds.$$

D'après la définition même de la f. é. m., lorsqu'une quantité d'électricité q parcourt l'élément MM' $= ds$ dans le sens de la f. é. m., son énergie augmente d'une quantité $q \cdot de$, qu'on peut considérer comme le travail d'une force $q\frac{de}{ds}$, pendant le déplacement ds : on peut dire que la charge q est soumise, pendant qu'elle parcourt l'élément ds, à une force $q\frac{de}{ds}$, c'est-à-dire à un champ électrique $E_s = \frac{de}{ds}$. De même que nous avons identifié la f. é. m. d'une pile avec les différences de potentiel de contact des différents milieux qui la constituent, de même nous identifierons la f. é. m. d'induction dans

un conducteur linéaire avec le champ électrique E_s, parallèle à ce conducteur, d'intensité :

$$E_s = \frac{de}{ds} = -\frac{\partial A_s}{\partial t}.$$

Un conducteur linéaire immobile, placé dans un champ magnétique variable, dont le vecteur induction dérive du potentiel-vecteur $\vec{A}$, *est soumis à un champ électrique, égal à la composante, suivant le conducteur, du vecteur* $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Sous l'action de ce champ électrique, les charges électriques, qui existent en quantités indéfinies dans le conducteur MM', vont se mettre en mouvement. S'il fait partie d'un circuit fermé, il s'établira un courant dans ce circuit, et la différence de potentiel dV entre les extrémités MM' du conducteur sera donnée par la loi d'Ohm : $dV = de - i\,d\rho$.

Elle peut d'ailleurs être nulle. Prenons, par exemple, un circuit circulaire, placé dans le champ uniforme d'un solénoïde, normalement à ce champ, et produisons-y des courants induits en faisant varier le courant du solénoïde. Les f. é. m. d'induction sont évidemment réparties uniformément tout le long du circuit ; leur somme e est égale à la chute de potentiel ohmique totale ρi correspondant à la résistance totale ρ du circuit, et, pour chaque élément MM', la f. é. m. élémentaire de est égale à la chute de potentiel ohmique $i\,d\rho$ correspondante : la différence de potentiel entre les points MM', $dV = de - i\,d\rho$ est nulle. Tous les points du circuit sont au même potentiel, bien qu'il soit parcouru par un courant électrique, et ne soit par suite pas en équilibre électrostatique.

Si au contraire l'élément conducteur MM' est isolé à ses deux extrémités, il ne peut être parcouru par aucun courant. L'action du champ électrique d'induction déplacera bien les charges électriques qui y sont contenues, mais ce déplacement cessera, avant qu'il y ait eu une quantité appréciable d'électricité transportée, lorsqu'il aura apporté aux divers points du conducteur des charges électrostatiques suffisantes pour créer, entre ses extrémités, une différence de potentiel électrostatique $dV = de$, et pour créer, dans l'élément conducteur, un champ $E'_s = -\frac{dV}{ds}$ égal et opposé au champ d'induction $\frac{de}{ds}$. On pourra dire que l'élément MM' est

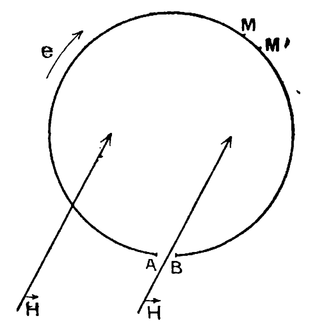


FIG. 284.

en équilibre électrostatique, puisque les charges électriques qu'il contient ne sont soumises à aucune force, et pourtant tous ses points ne sont pas au même potentiel. De même, si nous reprenons le circuit circulaire dans le champ uniforme variable, et si nous y ménageons une coupure AB (*fig.* 284), il s'établit entre les extrémités A et B une différence de potentiel $V_B - V_A = e$; le potentiel créé par les charges réparties sur la surface du conducteur croît régulièrement de A à B. Il existe des différences de potentiel

entre les divers points du conducteur, et pourtant il n'est parcouru par aucun courant, il paraît être en équilibre électrostatique.

226. Induction dans la masse d'un conducteur. — Les quelques indications que nous venons de donner suffisent à montrer que, dans un conducteur immobile soumis à un champ magnétique variable, il n'est plus possible d'appliquer les lois ordinaires de l'électrostatique. De même que, pour étendre ces lois à l'étude des conducteurs non homogènes, il faut introduire des différences de potentiel de contact qui s'ajoutent aux différences de potentiel newtoniennes créées par les charges libres, de même, pour les étendre aux conducteurs placés dans des champs magnétiques variables, il faut introduire un champ électrique d'induction, qui s'ajoute au champ électrostatique qu'on calcule, par la loi de Coulomb, à partir des charges électriques.

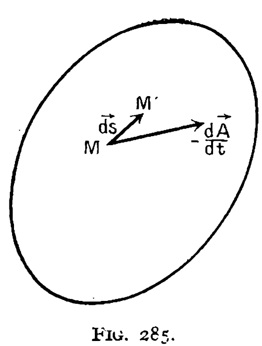


FIG. 285.

Si nous considérons, dans la masse d'un conducteur, un segment de droite $\vec{ds} = \vec{MM'}$ (*fig.* 285), nous avons vu qu'une charge électrique + 1 qui se déplace suivant MM' acquiert une énergie égale au travail, $-\frac{\partial A_s}{\partial t}\, ds$, de la composante, suivant le déplacement, du vecteur $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Quelle que soit la direction du déplacement $\vec{ds}$, ce travail peut être considéré comme étant le travail du vecteur $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ dans le déplacement $\vec{ds}$: on peut dire qu'il existe, au point M, un champ électrique d'induction $\vec{E}_i$ représenté par le vecteur $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Ce champ se superpose au champ électrostatique newtonien, $\vec{E}_e = -\vec{\text{grad}}\, V$, créé par les charges électriques réparties dans le conducteur et à sa surface, si bien que le champ électrique total au point M est :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_e = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}\, V.$$

C'est la valeur du champ total $\vec{E}$ qui détermine la force, $\vec{f} = \vec{E} q$, agissant sur une charge électrique placée en M ; c'est ce champ total qu'il faut introduire dans l'expression de la loi d'Ohm, $\vec{i} = \sigma\vec{E}$, pour calculer le courant qui circule dans le conducteur (1).

Il importe de remarquer que le champ électrique total $\vec{E}$, au contraire du champ électrostatique $\vec{E}_e$, ne dérive pas d'un potentiel. La relation

(1) Dans le cas d'un conducteur mobile, il faudra encore ajouter un terme représentant la f. é. m. d'induction correspondant au flux coupé par chaque élément dans son déplacement.

$E_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ peut en effet s'écrire :

$$\text{rot}\,\vec{E_i} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

puisqu'on a, par définition, $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$, et que la possibilité, pour le calcul des dérivées partielles, d'intervertir l'ordre des dérivations, donne l'identité $\text{rot}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\vec{A}$.

Puisque le champ électrostatique E_e, correspondant à la loi de Coulomb, dérive d'un potentiel, son rotationnel est nul. On a donc $\text{rot}\,\vec{E} = \text{rot}\,\vec{E_i}$, et la relation précédente peut s'écrire avec le champ électrique total :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\,\text{rot}\,\vec{E}.$$

227. Relation de Maxwell-Faraday. — Lorsqu'on place un conducteur dans une région de l'espace où existe un champ magnétique variable, il existe, en un point M de ce conducteur, un champ électrique d'induction, que nous venons de calculer. Le vecteur qui le représente est indépendant des grandeurs qui caractérisent le conducteur : nous n'avons fait aucune hypothèse sur sa nature, et on ne fait intervenir sa conductibilité que lorsque l'on veut calculer les courants produits par le champ électrique. Nous n'avons donc aucune raison de lier l'existence du champ électrique en M au fait qu'il existe, autour du point M, un milieu conducteur. Nous admettrons que, *dans une région quelconque de l'espace où existe un champ magnétique variable, il existe un champ électrique d'induction, que l'on peut calculer par les relations du paragraphe précédent, quelle que soit la nature du milieu qui occupe cette région, que ce soit un conducteur, un diélectrique ou le vide.*

Nous savons déjà qu'en toute région de l'espace où existe un champ électrique variable, il existe un champ magnétique (§ 208) : les deux phénomènes, champ électrique variable, champ magnétique variable, nous apparaissent ainsi comme liés l'un à l'autre. La théorie de Maxwell, qui étudie les conditions de leur propagation, et représente par eux les ondes lumineuses, n'est autre chose que l'étude des relations qui existent entre eux. La première des équations fondamentales de cette théorie est la relation de Maxwell-Ampère (§ 187). La seconde est la dernière des relations établies au paragraphe précédent ; pour rappeler à la fois qu'elle est due à Maxwell et qu'elle exprime la loi de l'induction découverte par Faraday, nous l'appellerons **la relation de Maxwell-Faraday.**

Pour mieux faire comprendre sa signification, nous allons en donner une démonstration directe à partir de la loi fondamentale de l'induction. Considérons une courbe fermée C, et évaluons la circulation le long de cette courbe du champ électrique $\vec{E}$. C'est l'énergie fournie par les forces électriques lorsque l'unité de quantité d'électricité parcourt la courbe fermée C ; d'après la

définition même de la f. é. m., c'est la f. é. m. totale e qui existe dans ce circuit :

$$e = \int_C \vec{E}\,\vec{ds}.$$

Cette f. é. m. totale est donnée, en désignant par Φ le flux du vecteur induction $\vec{B}$ à travers une surface Σ limitée par le contour C, par :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_\Sigma \vec{B}\,\vec{dS},$$

et l'on a :

$$\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,\vec{dS} = -\int_C \vec{E}\,\vec{ds}.$$

La circulation du vecteur $-\vec{E}$ *le long d'une courbe fermée quelconque est égale au flux du vecteur* $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ *à travers une surface limitée par cette courbe.* On sait (§ 120) que cette propriété est celle qui définit le rotationnel d'un vecteur, et elle peut s'exprimer par la relation symbolique :

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E},$$

qui résume les trois équations :

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

La relation de Maxwell-Faraday, comme la relation de Maxwell-Ampère, est valable dans tous les milieux, quelle que soit leur nature. La forme que nous en avons donnée suppose essentiellement, comme la forme de la loi fondamentale de l'induction que nous avons utilisée, que le système d'axes choisi est le système d'axes à gauche, défini par les règles d'Ampère ou de Maxwell, et que les grandeurs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont mesurées dans un système d'unités satisfaisant à la relation de coordination $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$. Nous indiquerons au paragraphe 245 *bis* la forme que prennent les relations de Maxwell dans d'autres systèmes d'unités.

CHAPITRE XXIII

INDUCTION PAR LES COURANTS VARIABLES

I. — *INDUCTION MUTUELLE ET SELF-INDUCTION*

228. Induction mutuelle de deux circuits. — Nous savons que les actions mutuelles de deux circuits C_1 et C_2 parcourus par des courants peuvent être calculées à l'aide d'une quantité M, dite **inductance mutuelle** (§§ 125 et 216); elle ne dépend que des paramètres géométriques qui définissent les deux circuits, et peut être calculée par la formule de Neumann $M = \mu_0 \iint_{C_1, C_2} \frac{\overrightarrow{ds_1}\,\overrightarrow{ds_2}}{r}$, ou par des procédés plus simples dont nous avons donné un exemple au paragraphe 216 pour le cas de deux bobines.

Calculons les f. é. m. d'induction qui prennent naissance dans le circuit C_2 lorsqu'on déplace les deux circuits l'un par rapport à l'autre, ou lorsque l'on fait varier l'intensité du courant qui parcourt le circuit C_1. Désignons par M la valeur de l'inductance mutuelle des deux circuits à l'instant t, et par i_1 l'intensité du courant dans le circuit C_1 à cet instant : le flux envoyé par le circuit C_1 à travers le circuit C_2 est (§ 216) : $\Phi = Mi_1$, et la f.é.m. d'induction produite dans le circuit C_2 par les variations de ce flux est :

$$e_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\,(Mi_1)}{dt}.$$

Si les circuits sont immobiles, M est constant, et on a :

$$e_2 = -M\frac{di_1}{dt}.$$

Si de même, les deux circuits étant immobiles, on fait varier le courant i_2 qui parcourt le circuit C_2, cette variation produit, dans le circuit C_1, une f. é. m. d'induction qu'on calcule à l'aide du même coefficient M :

$$e_1 = -M\frac{di_2}{dt}.$$

Il importe de remarquer que le flux $\Phi = Mi_1$ n'est pas le flux total qui traverse le circuit C_2, mais seulement la portion de ce flux qui est créée par le

courant i_1 : la f. é. m. e_2 ne représente pas la f. é. m. totale qui existe dans le circuit C_2, mais seulement celle qui est créée par les variations du courant i_1. On réalise une expérience dans laquelle cette f. é. m. intervient seule par le procédé déjà indiqué au paragraphe 223. A l'instant o, le circuit C_1 est parcouru par un courant permanent i_1, et le circuit C_2, qui ne contient aucune f. é. m., n'est parcouru par aucun courant; à l'instant t, on coupe brusquement le courant i_1; au bout d'un temps très court θ, il s'établit un nouvel état de régime permanent, dans lequel les deux circuits ne sont parcourus par aucun courant. Entre les instants $t_1 < t$ et $t_2 > t + \theta$, le flux d'induction à travers le circuit C_2 a varié de $\Phi_1 = Mi_1$ à $\Phi_2 = 0$; si sa résistance est r_2, ce circuit a été parcouru par une quantité d'électricité $q = \frac{Mi_1}{r_2}$, que l'on peut mesurer avec un galvanomètre balistique ou un fluxmètre; cette mesure fournit une mesure de l'inductance mutuelle M des deux circuits.

229. Self-induction. — Un circuit parcouru par un courant d'intensité i est traversé par un flux Φ créé par ce courant lui-même; comme le champ en chaque point est proportionnel à i, il en est de même du flux Φ. Nous pouvons poser :

$$\Phi = Li.$$

Le coefficient L s'appelle la **self-inductance** du circuit. Avec les conventions de signe définies par la règle d'Ampère, il est essentiellement positif, quel que soit le sens de parcours choisi sur le circuit, car le flux Φ et le courant i sont toujours de même signe.

Une self-inductance et une inductance mutuelle sont définies toutes deux par le rapport du flux d'induction qui traverse une surface donnée au courant qui le crée en parcourant un circuit fixe; ce sont deux grandeurs de même espèce. La valeur de la self-inductance ne dépend que des paramètres géométriques qui caractérisent le circuit. *L'unité de self-inductance est la même que l'unité d'inductance mutuelle : dans le système électromagnétique, ses dimensions sont les mêmes que celles de l'unité de longueur* (§ 126).

Si le flux Φ vient à varier, il apparaît dans le circuit une *force électromotrice de self-induction :*

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt}.$$

Le cas le plus important est celui d'un circuit indéformable parcouru par un courant variable; la self-inductance est alors constante, et on a :

$$e = -L\frac{di}{dt}.$$

La f. é. m. de self-induction dans un circuit fixe est proportionnelle à la dérivée du courant par rapport au temps, et tend, conformément à la loi de Lenz, à produire un courant qui s'oppose à la variation du courant dans le circuit.

L'existence des phénomènes de self-induction a été montrée expérimentalement par Faraday, au moyen du dispositif représenté par la figure 286.

Le courant d'une pile P peut se partager entre une bobine L, comportant un grand nombre de spires et ayant par suite une self-inductance considérable, et un galvanomètre G, dont la self-inductance est faible. Lorsque le régime permanent est atteint, le galvanomètre G est parcouru par un courant i_g, et son aiguille subit une certaine déviation α : on place une petite cale contre cette aiguille, de façon à la maintenir à la déviation α lorsqu'on coupe le courant. Si on le rétablit, en fermant l'interrupteur I, l'aiguille subit une impulsion qui lui donne une déviation supérieure à α : le courant dans la bobine L passant de 0 à i, il y existe une f. é. m. de self-induction e_f, qui produit, dans la bobine, un courant en sens inverse de i, et, dans le galvanomètre, un courant i_f de même sens que i_g : c'est l'*extra-courant de fermeture.*

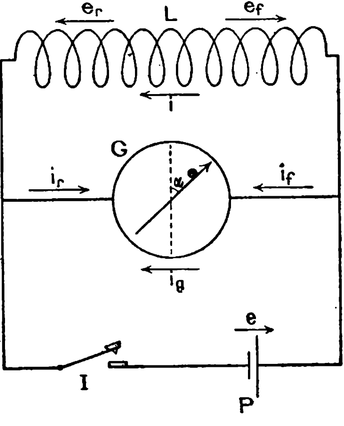


Fig. 286.

Dans une seconde expérience, on place la cale de façon qu'elle maintienne l'aiguille au zéro lorsque le galvanomètre est parcouru par le courant i_g. On coupe le courant en ouvrant l'interrupteur I : l'aiguille subit alors une impulsion en sens inverse de la déviation α. Le courant dans la bobine L passant de i à 0, il y existe une f. é. m. de self-induction e_r ; elle produit, dans la bobine, un courant de même sens que i, et dans le galvanomètre, un courant i_r en sens inverse de i_g: c'est l'*extra-courant de rupture.*

Lorsqu'on coupe un circuit, le flux tombe à zéro en un temps Δt très court : il s'y développe une f. é. m. d'induction $e = \Phi / \Delta t$ très élevée, qui établit entre les deux bords de la coupure une différence de potentiel suffisante pour faire jaillir une étincelle à travers l'air qui les sépare. C'est **l'étincelle de rupture.** On l'observe facilement quand on interrompt le courant d'un électro-aimant ; elle peut amorcer entre les pièces de l'interrupteur un arc électrique, et détériorer les contacts : aussi doit-on éviter de couper brusquement le circuit d'un électro-aimant.

Enfin, on montre l'existence des f. é. m. de self-induction dues à la variation du coefficient L en constituant le circuit par une couronne de fil souple, qu'on peut aplatir entre les mains. Le courant qui la parcourt est mesuré par un galvanomètre ; on observe, au moment où l'on diminue la surface, une augmentation de son intensité : la f. é. m. d'induction produit un courant qui tend à s'opposer à la variation de flux, donc à compenser la diminution de la surface par une augmentation de l'intensité.

230. Calcul des self-inductances. — La self-inductance d'un circuit peut se calculer en u. é. m. par des procédés analogues à ceux qu'on emploie pour le calcul des inductances mutuelles. Considérons, par exemple, un solénoïde, de section S et de longueur l, à l'intérieur duquel le champ est uniforme et égal à $4\pi ni$; une de ses spires est traversée par un flux $4\pi nSi$, et

l'ensemble des N spires est traversé par un flux $\Phi = 4\pi n\text{NS}i$; sa self-inductance est :

$$\text{L} = \frac{\Phi}{i} = 4\pi n\text{NS} = \frac{4\pi\text{N}^2\text{S}}{l}.$$

Cette valeur n'est qu'une valeur approchée; le champ ne reste pas uniforme jusqu'aux sections extrêmes de la bobine, et il n'est pas non plus uniforme dans toute l'étendue d'une section. Il existe, au voisinage des spires, des lignes de force fermées qui entourent chaque conducteur (§ 184, *fig.* 218); la circulation du champ magnétique le long d'une d'entre elles est $4\pi i$, et si son rayon moyen est r, le champ moyen correspondant est $2i/r$; il augmente indéfiniment lorsque r diminue. D'une manière générale, le calcul du flux conduit, pour un circuit formé de conducteurs linéaires, à une valeur infinie; si l'on veut appliquer la formule de Neumann $\iint_{\text{C, C}'} \frac{\overrightarrow{ds}\,\overrightarrow{ds'}}{r}$, en confondant les deux contours d'intégration C et C', les éléments voisins donnent des termes infinis. Il est nécessaire d'introduire dans le calcul le diamètre du fil qui constitue le circuit, et de tenir compte du fait qu'un filet conducteur de section infiniment petite $d\text{S}$ n'est parcouru que par un courant d'intensité infiniment petite $di = i_1 d\text{S}$: on trouve alors des champs magnétiques finis, même à l'intérieur du conducteur.

Le calcul de la self-inductance d'un circuit de forme simple, par exemple d'une bobine circulaire à enroulement régulier, à partir de ses dimensions géométriques, est donc possible : c'est là une **mesure absolue** de ce coefficient. On a pu, dans les grands laboratoires métrologiques, construire des **étalons de self-inductance** en enroulant quelques centaines de spires de gros fil de cuivre sur un cylindre de marbre, et déterminer à quelques millionièmes près leur self-inductance, qui est de l'ordre de 0,01 à 0,05 henry (§ 232), par des mesures purement géométriques. Mais le calcul n'est valable que pour une loi donnée de répartition du courant et ces étalons ne doivent être employés qu'avec des courants lentement variables, à cause des modifications de la répartition du courant qui se produisent en haute fréquence (§ 322).

Lorsqu'on introduit un noyau de fer doux dans une bobine, on augmente la valeur du flux d'induction qui la traverse, et par conséquent on augmente les phénomènes de self-induction. Mais, comme l'induction dans le fer n'est pas proportionnelle au champ magnétique, le flux d'induction Φ n'est pas proportionnel au courant i : la définition de la self-inductance n'a plus de sens. Il est pourtant extrêmement important, pour tous les appareils industriels, de pouvoir calculer, ne serait-ce que grossièrement, le flux en fonction du courant. On définira la self-inductance d'un enroulement en évaluant le rapport $\text{L} = \Phi/i$ pour la valeur du flux qui correspond aux conditions normales de fonctionnement, et on admettra qu'il conserve la même valeur quand le courant et l'aimantation varient.

Les calculs auxquels on est ainsi conduit sont les mêmes que ceux qu'on doit faire pour l'application du théorème des circuits magnétiques (§ 199), et comportent les mêmes approximations; ils donnent des résultats acceptables pour des aciers doux à hystérésis très faible et des aimantations nettement inférieures à la saturation. Si l'enroulement se compose de N spires,

et si la réluctance du circuit magnétique est R, le flux qui traverse une spire est $\frac{4\pi Ni}{R}$, le flux total qui traverse le circuit est $\Phi = \frac{4\pi N^2 i}{R}$, et sa self-inductance est $L = \frac{\Phi}{i} = \frac{4\pi N^2}{R}$.

231. Self-inductance d'une portion de circuit. — La définition de la self-inductance n'a de sens que pour un circuit fermé : lorsque nous parlons de la self-inductance d'une bobine, nous supposons implicitement que les deux extrémités de son enroulement sont réunies. Dans la pratique, la bobine fait partie d'un circuit comportant une source et des conducteurs extérieurs plus ou moins longs; en toute rigueur, le flux Φ qui la traverse dépend de la forme de l'ensemble du circuit. Mais, pour un courant donné, il est approximativement le même que si les deux bornes de la bobine étaient reliées directement et l'approximation est d'autant meilleure qu'on réduit davantage la surface limitée par le reste du circuit, par exemple par l'emploi de conducteurs torsadés. Le rapport $L = \Phi/i$ peut être considéré comme la self-inductance de la portion de circuit constituée par la bobine.

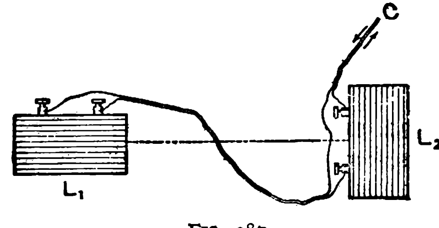
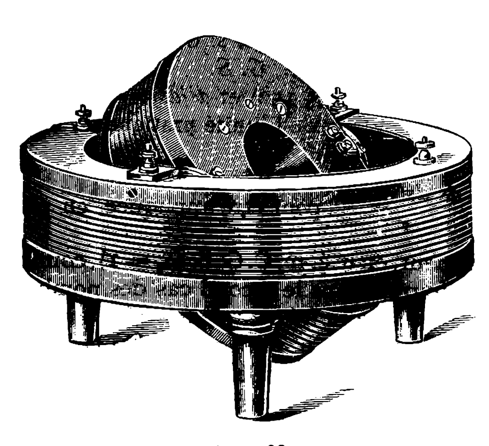


FIG. 287.

Considérons de même deux bobines, de self-inductances L_1 et L_2, disposées de telle façon que, lorsqu'une seule d'entre elles est parcourue par un courant, l'autre n'est traversée par aucun flux; elles seront, par exemple, très loin l'une de l'autre, ou encore disposées symétriquement et à angle droit (*fig.* 287). Réunissons-les en série, autant que possible en employant des fils torsadés, de façon que la surface du circuit C ainsi constitué se réduise à celle des bobines. Lorsque le circuit C est parcouru par un courant d'intensité i, la première bobine est traversée par un flux $L_1 i$, la seconde par un flux $L_2 i$, et l'ensemble du circuit par un flux $\Phi = (L_1 + L_2)i$. La self-inductance de l'ensemble du circuit est $L = \Phi/i = L_1 + L_2$; c'est la somme des self-inductances de ses différentes parties.


FIG. 288.

Il faut bien remarquer qu'il n'en est ainsi que parce que l'inductance mutuelle des deux bobines L_1 et L_2 est nulle. Si les bobines sont placées l'une au-dessus de l'autre, le flux Φ comprend, outre les flux $L_1 i$ et $L_2 i$ que chaque

bobine produit à travers elle-même, les deux flux Mi que chacune d'elles produit à travers l'autre; suivant la disposition des bobines et le sens des circuits, ces flux s'ajoutent aux précédents ou s'en retranchent, et la valeur de L peut être supérieure ou inférieure à la somme $L_1 + L_2$. C'est ainsi que, dans la double bobine représentée par la figure 288, les valeurs de L_1 et L_2 sont 0,27 et 0,18 henry (1 henry $= 10^9$ u. é. m.), leur somme est 0,45 henry, et la self de l'ensemble peut varier, lorsqu'on tourne la bobine inférieure de 180 degrés, de 0,23 à 0,67 henry. Cet appareil constitue une bobine de self-induction réglable; un cercle gradué donne à chaque instant l'angle des deux bobines, et un étalonnage préalable permet de connaître la valeur de la self-inductance correspondant à chaque valeur de l'angle.

232. Unités d'inductance. — Les relations $\Phi = Mi$ et $e = -d\Phi/dt$ dont nous sommes partis sont valables dans tous les systèmes d'unités qui satisfont à la relation de coordination $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$; on peut donc, dans tous ces systèmes, utiliser au calcul des f. é. m. de self-induction et d'induction mutuelle les deux formules :

$$e = -L\frac{di}{dt}, \qquad e = -M\frac{di}{dt}.$$

La première d'entre elles définit l'unité d'inductance à partir des unités de f. é. m. et d'intensité de courant : c'est la self-inductance d'un circuit dans lequel la f. é. m. d'induction est égale à l'unité de f. é. m. quand l'intensité du courant varie d'une quantité égale à l'unité d'intensité par unité de temps.

Supposons qu'on ait $e = 1$ u. é. s. $= c$ u. é. m. (§ 151) et $di/dt = 1$ u. é. s. $= 1/c$ u. é. m. : on a $L = 1$ u. é. s. $= c^2$ u. é. m. *L'u. é. s. C. G. S. d'inductance est $c^2 = 9.10^{20}$ fois plus grande que l'u. é. m. C. G. S.*

Faisons maintenant $e = 1$ volt $= 10^8$ u. é. m. (§ 152) et $di/dt = 1$ amp/sec $= 10^{-1}$ u. é. m.; on a $L = 1$ henry $= 10^9$ u. é. m. L'**unité pratique d'inductance**, appelée le **henry**, *vaut 10^9 u. é. m. C. G. S.*

La formule de Neumann, $M = \mu_0 \int \frac{ds\, ds' \cos \varepsilon}{r}$, peut être appliquée, en prenant le centimètre comme unité de longueur, en u. é. m. C. G. S. ($\mu_0 = 1$), comme en u. é. s. ($\mu_0 = 1/c^2 = 1/9 \,.\, 10^{20}$) : elle fournit dans le second cas des nombres $9 \,.\, 10^{20}$ plus petits, correspondant bien à une unité $9 \,.\, 10^{20}$ fois plus grande.

Remarquons que la valeur du coefficient μ_0 en u. é. s. résulte de la détermination expérimentale du rapport c, de sorte que ce n'est qu'en u. é. m. que la formule de Neumann fournit des mesures absolues à partir de mesures géométriques.

On a d'ailleurs aussi des mesures absolues en unités pratiques, puisque ces unités sont définies à partir des u. é. m. C. G. S. On peut appliquer la formule de Neumann en unités pratiques, en mesurant les longueurs en mètres et faisant $\mu_0 = 10^{-7}$ (§ 134) : on obtient pour $ds\, ds'/r$ des valeurs 100 fois plus petites et pour L une valeur 10^9 fois plus petite qu'en u. é. m. C. G. S., ce qui correspond bien au fait que le henry vaut 10^9 u. é. m. C. G. S.

Le henry constitue une self-induction pratiquement réalisable. Les constructeurs fournissent des séries de bobines étalonnées, dont les self-inductances

vont de 0,01 à 10 henrys. La figure 289 représente une telle bobine, formée de spires de fil de cuivre enroulées sur une carcasse d'acajou; le diamètre intérieur de l'enroulement est environ 5 centimètres, son diamètre extérieur 14 centimètres, et sa hauteur 4 centimètres. Sa self-inductance est 1 henry, et sa résistance environ 100 ohms.

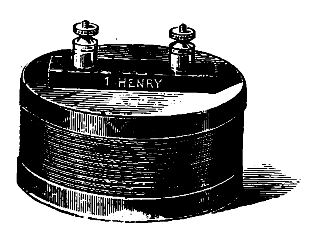
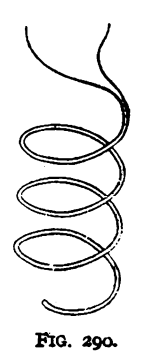


FIG. 289.

Lorsqu'une bobine comporte un noyau de fer, sa self-inductance peut facilement être de l'ordre de plusieurs henrys : c'est ainsi que la self d'un récepteur Morse ordinaire est de l'ordre d'une dizaine d'henrys; elle varie d'ailleurs quand les déplacements de l'armature modifient la réluctance du circuit magnétique.

Un circuit de transport d'énergie, formé de deux fils de cuivre de 4 millimètres de diamètre placés à 1 mètre l'un de l'autre, a une self-inductance de 2,6 millihenrys par kilomètre de ligne double. Une ligne télégraphique de mêmes dimensions, dont les conducteurs sont en fer, peut avoir une self-inductance dix fois plus élevée, à cause de l'aimantation des conducteurs.

La self-induction diminue si l'on réduit la surface du circuit en rapprochant les deux fils : avec deux fils de cuivre au contact, c'est-à-dire séparés par une épaisseur d'isolant négligeable, la self n'est plus que de 0,38 millihenrys par kilomètre. C'est avec des circuits de ce genre qu'on constitue les bobines des boîtes de résistances; le fil est replié sur lui-même, avant d'être enroulé sur la bobine, suivant le schéma de la figure 290. La self-induction d'une telle bobine peut presque toujours être négligée, tout au moins tant qu'elle n'est pas parcourue par des courants de haute fréquence. L'inconvénient de ce dispositif est que les deux fils voisins forment les armatures d'un condensateur, dont la capacité n'est pas toujours négligeable; on obtient un meilleur résultat en employant un fil simple, et en enroulant les différentes couches alternativement dans un sens et dans l'autre : de telles bobines ont une capacité et une self-inductance assez faibles pour pouvoir servir à des mesures avec des courants téléphoniques.


FIG. 290.

II. — *ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS*

233. Etude du régime variable dans un circuit. — Considérons un circuit fermé, isolé dans l'espace, formé par des conducteurs de capacité négligeable, de résistance totale r, de self-inductance L, contenant un générateur de f. é. m. e. Pour appliquer la loi d'Ohm à l'instant t, il faut ajouter à la f. é. m. du générateur la f. é. m. de self-induction $-\mathrm{L}\,di/dt$, et on obtient la relation :

$$e - \mathrm{L}\frac{di}{dt} = ri \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{L}\frac{di}{dt} + ri = e$$

Les différentes grandeurs peuvent être exprimées en u. é. m., en u. é. s. ou en unités pratiques (volts, ampères, secondes, ohms, henrys). *Toutes les formules que nous allons établir sont valables à la fois dans le système électromagnétique, dans le système électrostatique et dans le système pratique.*

L'équation obtenue est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec second membre. L'intégrale générale est :

$$i = \frac{e}{r} + Ae^{-\frac{rt}{L}}.$$

Elle est la somme de deux termes : le premier, e/r, est une solution particulière qui représente le régime permanent du courant dans le circuit. Le second, $Ae^{-\frac{rt}{L}}$, est la solution générale de l'équation sans second membre, et représente la partie variable du courant : sa diminution avec le temps est représentée, en posant $L/r = \tau$, par l'exponentielle $e^{-\frac{t}{\tau}}$. L'intensité variable est divisée par $e = 2{,}72$ chaque fois qu'il s'est écoulé un temps $t = \tau$; elle est réduite au millième de sa valeur initiale après un temps $t = \tau$ Log 1.000 $= 6{,}9\ \tau$.

Le temps $\tau = L/r$, qui caractérise la rapidité de la décroissance du courant variable, s'appelle la **constante du temps** du circuit. Pour des enroulements sans noyau de fer, il est toujours très faible : pour une bobine à grande self-induction, telle que celle de la figure 289 ($L = 1$ henry, $r = 100$ ohms), il est de l'ordre du centième de seconde. Il n'a de valeurs appréciables que pour des enroulements à noyau de fer doux, et peut atteindre plusieurs secondes pour de gros électro-aimants [1]; il ne faut d'ailleurs pas oublier que, dans ce cas, les calculs que nous faisons ici ne représentent qu'une première approximation, la self-inductance d'un enroulement à noyau de fer n'ayant pas de valeur bien définie (§ 230).

Pour passer à l'étude des différents cas particuliers, il suffit de déterminer la valeur du coefficient A d'après les conditions initiales. Étudions d'abord la période d'établissement du courant dans le circuit : à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On a, pour $t = 0$, $i = 0$; on a donc $A = -e/r$, et l'intensité à l'instant t est, en posant $e/r = i_0$:

$$i = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

L'intensité du courant n'atteint théoriquement la valeur de régime i_0 qu'au bout d'un temps infini (*fig.* 291); pratiquement elle atteint très vite une valeur qui en diffère extrêmement peu; elle n'en diffère plus que de 1/1.000 au bout d'un temps égal à $6{,}9\ \tau$.

(1) On constate facilement que le courant d'un électro-aimant met un temps appréciable à s'établir lorsqu'on étudie les phénomènes magnéto-optiques, tels que la polarisation rotatoire magnétique d'une substance placée entre les pièces polaires. Si les nicols sont primitivement à l'extinction, le rétablissement de la lumière, quand on ferme le circuit de l'électro, est assez lent pour qu'on suive nettement l'augmentation progressive du champ.

La quantité d'électricité transportée par le courant entre les instants zéro et t est :

$$q = \int_0^t i\,dt = i_0 t + i_0 \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) = q_0 - \frac{Li_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Elle est inférieure à la quantité d'électricité $q_0 = i_0 t$ qui serait transportée dans le même temps par le courant de régime i_0 ; la différence $q_0 - q$, représentée sur la figure 291 par l'aire hachurée, tend vers Li_0 / r quand le temps t

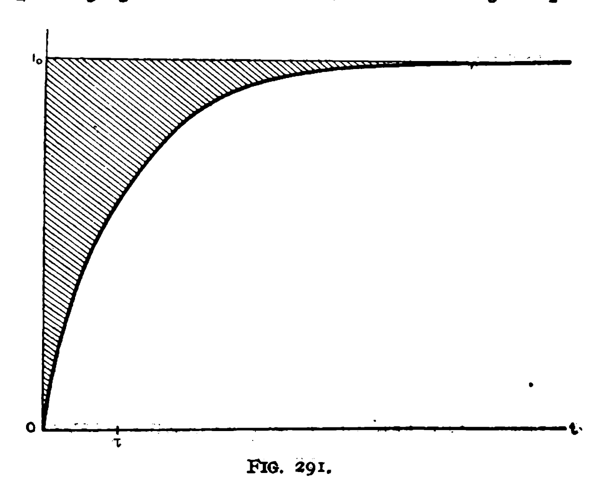


FIG. 291.

augmente indéfiniment, et n'en diffère pas de 1/1.000 quand t est supérieur à 6,9 τ. Nous retrouvons là un résultat connu : lorsque le flux qui traverse le circuit varie de 0 à $\Phi_0 = Li_0$, le courant induit transporte une quantité d'électricité $- \Phi_0 / r = - Li_0 / r$.

Étudions maintenant la période de disparition du courant. Si l'on ouvre l'interrupteur I, le courant est supprimé brusquement, la f. é. m. d'induction est très grande, et il se produit en général une étincelle de rupture, dont la durée et la résistance sont mal connues. Nous supposerons qu'on supprime le courant en supprimant la f. é. m. e à l'instant $t = 0$, par exemple en court-circuitant la source. Nous devons faire dans l'équation générale $e = 0$, et l'intégrale générale devient $i = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$; si l'intensité du courant part, à l'instant $t = 0$, de la valeur $i = i_0$, on aura (*fig.* 292) :

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La quantité d'électricité transportée entre les instants zéro et t (quantité représentée par l'aire hachurée de la figure 292) est :

$$q = \int_0^t i\,dt = - i_0\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) = \frac{Li_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Lorsque t est suffisamment grand, elle est égale à Li_0/r, c'est-à-dire à Φ_0/r.

Si, dans un circuit fermé, de self-inductance L et de résistance r constantes, on produit, pendant un temps θ, une f. é. m. e, la quantité totale d'électricité

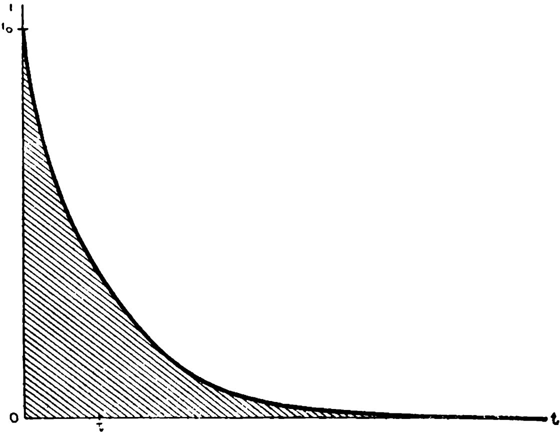


FIG. 292.

qui parcourt le circuit a la même valeur, $q_0 = i_0\theta$, que s'il n'y avait pas de phénomènes d'induction. La quantité d'électricité Li_0 / r, transportée en moins lors de l'établissement du courant, est transportée en plus après la suppression de la f. é. m. : c'est ce que montrent immédiatement l'égalité des deux courbes des figures 291 et 292, et l'égalité des aires qu'elles limitent. C'est par suite de cette égalité qu'il est possible, comme nous l'avons déjà montré au paragraphe 223, de mesurer, à l'aide du galvanomètre balistique ou du fluxmètre, le flux magnétique produit par un aimant ou un circuit extérieur, sans avoir à tenir compte de la self-induction du circuit constitué par le galvanomètre et la bobine exploratrice.

234. Décharge d'un condensateur. — Nous venons de voir que l'existence des f. é. m. de self-induction conduit, pour un circuit fermé, à remplacer la loi d'Ohm, $e = Ri$, par l'équation $e = Ri + L\frac{di}{dt}$. De même, si l'on considère un conducteur AB, de résistance R et de self-inductance L, ne contenant pas de f. é. m. autre que les f. é. m .de self-induction, et parcouru par un courant d'intensité i allant de A vers B, le'xpressoin de la loi d'Ohm, $V_A - V_B = Ri - e$ (§ 159), devient :

$$V_A - V_B = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

Appliquons cette équation à l'étude de la décharge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur AB (*fig.* 293). Soit $+ q$ la charge de l'armature A à l'instant t ; on a :

$$V_A - V_B = \frac{q}{C}, \qquad i = -\frac{dq}{dt}, \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2},$$

et l'expression de la loi d'Ohm devient :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Cette relation, comme celles dont elle a été déduite, peut être employée en mesurant les différentes grandeurs en u. é. m., en u. é. s, ou en unités pratiques.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son intégrale générale contient deux constantes arbitraires, dont on fixera les valeurs d'après les conditions initiales : à l'instant $t=0$ où l'on établit la communication entre les deux armatures, on a $q = q_0$ et $i = 0$.

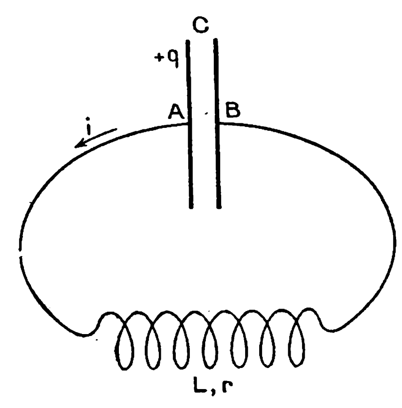


FIG. 293.

Pour calculer l'intégrale générale, on doit d'abord résoudre l'équation caractéristique :

$$Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0.$$

La forme de l'intégrale dépend de la nature des solutions de l'équation caractéristique, c'est-à-dire du signe de la quantité $R^2 - 4\frac{L}{C}$. Nous allons rappeler sommairement les principales propriétés de l'intégrale dans les différents cas ; nous aurons d'ailleurs l'occasion d'y revenir lorsque nous étudierons le mouvement d'un galvanomètre (chap. XXV). Signalons en passant **que la self-inductance joue ici le rôle** que jouera le moment **d'inertie** dans l'équation du mouvement et que la résistance joue le rôle des forces d'amortissement. Les f. é. m. de self-induction prolongent le courant après la disparition de la f. é. m. qui lui a donné naissance, comme l'inertie d'un organe mobile prolonge son mouvement après la suppression de la force qui l'a créé ; la résistance dissipe de l'énergie par effet Joule, comme les forces d'amortissement transforment de l'énergie en chaleur par frottement.

PREMIER CAS : $R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$: *la résistance est grande, ou la self-induction faible.* L'équation caractéristique a deux racines réelles négatives, $-\alpha$ et $-\beta$, et l'intégrale générale est :

$$q = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}, \qquad i = -\frac{dq}{dt} = A\alpha e^{-\alpha t} + B\beta e^{-\beta t}.$$

En tenant compte des conditions initiales (pour $t = 0$, $i = 0$ et $q = q_0$), on trouve :

$$q = q_0\frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \qquad i = q_0\frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}).$$

Si l'on a $\beta > \alpha$, on a toujours $e^{-\beta t} < e^{-\alpha t}$; *q et i sont toujours du signe de* q_0, et tendent vers zéro lorsque t augmente indéfiniment ; les courbes qui les représentent ont la forme indiquée par la figure 294.

Dans le cas particulier où la self-induction du circuit est négligeable, l'équa-

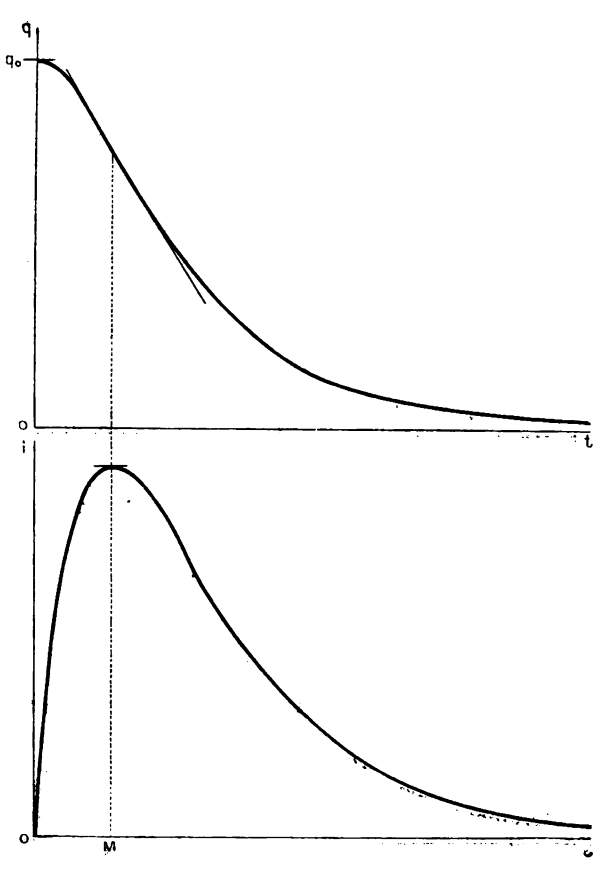


Fig. 294.

tion différentielle se réduit à $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$; on peut appliquer les formules précédentes, en remarquant que, lorsque L tend vers zéro, l'une des racines de l'équation caractéristique tend vers $-\infty$, et l'autre vers $-\frac{1}{CR}$. En faisant $\beta = \infty$ et $\alpha = \frac{1}{CR} = \frac{1}{\tau}$, on obtient :

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad i = \frac{q_0}{CR} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La période OM de courant croissant (*fig.* 294) est réduite à zéro : il n'y a

pas de self empêchant le courant de décharge de s'établir instantanément. La charge et le courant décroissent exponentiellement, avec la constante de temps $\tau = CR$.

Deuxième cas : $R^2 - 4\frac{L}{C} = 0$: l'équation caractéristique a une racine double, $\alpha = -\frac{R}{2L}$; en tenant compte des conditions initiales, on trouve :

$$q = q_0 (1 + \alpha t)\, e^{-\alpha t}, \qquad i = q_0 \alpha^2 t e^{-\alpha t}.$$

Les courbes ont la même forme que dans le cas précédent ; on démontre

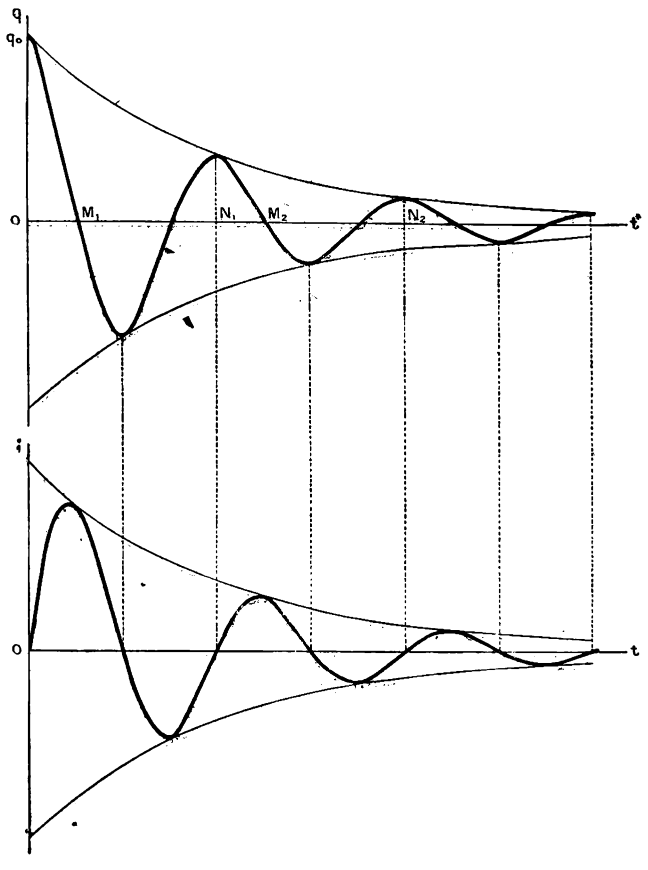


Fig. 295.

que, pour les mêmes valeurs de L et de C, elles tendent plus rapidement vers zéro (cf. § 248).

Troisième cas : $R^2 - 4\frac{L}{C} < 0$: *la résistance est faible.* L'équation carac-

téristique a deux racines imaginaires — $\lambda \pm \omega\sqrt{-1}$: l'intégrale est de la forme :

$$q = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi).$$

La charge et l'intensité du courant sont représentées par des fonctions sinusoïdales amorties ; elles oscillent (*fig.* 295) entre les valeurs correspondant à deux courbes exponentielles symétriques, de constante de temps $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2L}{R}$. L'intervalle de deux points tels que M_1M_2 ou N_1N_2 est la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Dans le cas où la résistance est assez faible pour que R^2 soit négligeable devant $4L/C$, la quantité $\omega = \frac{1}{2L}\sqrt{4\frac{L}{C} - R^2}$ peut être prise égale à $\frac{1}{\sqrt{LC}}$; il s'établit dans le circuit des oscillations peu amorties, de période :

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Cette période, $T = 2\pi\sqrt{LC}$, est dite la **période propre** du circuit.

Nous reviendrons plus tard (chap. XXX) sur l'étude des oscillations électriques ainsi produites. Signalons simplement que leur existence a été montrée en 1858 par Feddersen, en examinant au miroir tournant l'étincelle de décharge d'un condensateur ; leur fréquence peut être mesurée en comptant le nombre de traits lumineux observés, chaque trait lumineux correspondant à l'une des alternances du courant : les résultats expérimentaux sont entièrement d'accord avec les formules théoriques (cf. § 312).

235. Courants dérivés. — Supposons que les courants induits, produits par exemple par la variation du flux magnétique envoyé par un aimant à travers une bobine C, se partagent entre deux conducteurs dérivés AP_1B, AP_2B (*fig.* 296), de résistances r_1, r_2 et de self-inductances L_1, L_2.

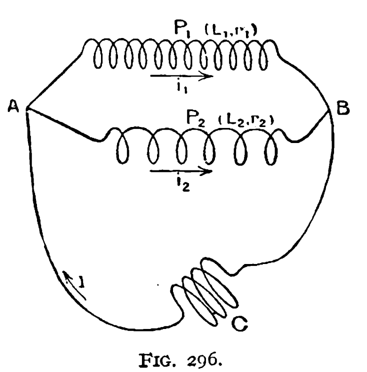


FIG. 296.

Les portions de circuit AP_1B et AP_2B ne sont pas placées dans le champ magnétique de l'aimant ; mais nous pouvons supposer qu'il existe des inductions mutuelles entre les différents conducteurs ACB, AP_1B et AP_2B ; pour simplifier le calcul, nous ne tiendrons compte que de l'induction mutuelle entre les deux derniers, et nous désignerons par M le coefficient correspondant.

Si nous désignons par i_1 et i_2 les intensités des courants qui parcourent à l'instant t les deux conducteurs dérivés, on a, en appliquant la loi d'Ohm à ces deux conducteurs :

$$V_A - V_B = r_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = r_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}.$$

Nous allons calculer les quantités d'électricité, $q_1 = \int_{t_1}^{t_2} i_1 dt$ et $q_2 = \int_{t_1}^{t_2} i_2 dt$, qui traversent les conducteurs entre les instants t_1 et t_2, pris l'un avant et l'autre après la variation du flux dans la bobine C. On a :

$$r_1 \int_{t_1}^{t_2} i_1 dt + L_1 \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_1}{dt} dt + M \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_2}{dt} dt = r_2 \int_{t_1}^{t_2} i_2 dt + L_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_2}{dt} dt + M \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_1}{dt} dt.$$

Si, aux instants t_1 et t_2, les intensités i_1 et i_2 sont nulles, on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{di_1}{dt} dt = \Big[i_1 \Big]_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_2}{dt} dt = 0;$$

la relation se réduit à :

$$r_1 q_1 = r_2 q_2.$$

La quantité totale d'électricité qui parcourt le circuit C *se partage entre les deux conducteurs dérivés suivant la même loi qu'un courant continu.*

Cette loi permet de calculer la quantité d'électricité qui traverse un galvanomètre balistique shunté : le pouvoir multiplicateur du shunt est le même que pour les courants continus. Il importe d'ailleurs de remarquer que le rapport de la déviation à la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre n'est pas nécessairement le même avec et sans shunt ; il ne conserve la même valeur que si l'introduction du shunt ne modifie pas l'amortissement du galvanomètre ; cette condition est en général suffisamment réalisée pour les appareils à aimant mobile, elle ne l'est presque jamais pour les appareils à cadre mobile (§ 255).

236. Pont de Wheatstone. — L'étude expérimentale du régime variable dans le pont de Wheatstone peut être employée pour la comparaison des self-inductances et des inductances mutuelles, soit entre elles, soit avec des capacités. Nous décrirons, comme exemple, le montage qui permet la mesure du rapport de deux self-inductances.

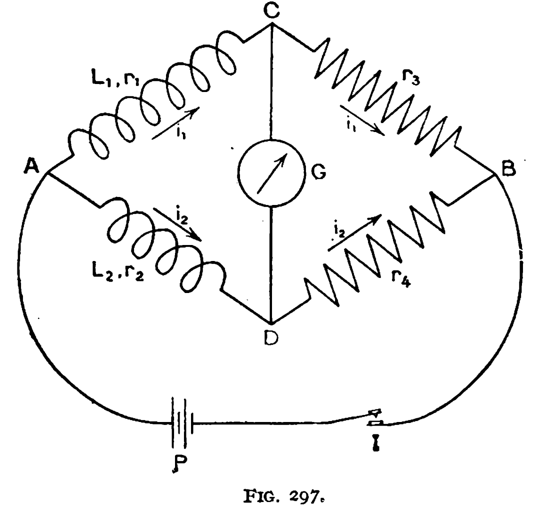


FIG. 297.

Les deux bobines à comparer, de selfs L_1, L_2 et de résistances r_1, r_2, sont placées dans deux branches contiguës, par exemple AC et AD (*fig.* 297) ; les deux

autres branches sont constituées par des résistances r_3, r_4 non inductives et on dispose les appareils de façon qu'il n'y ait pas d'induction mutuelle entre les divers conducteurs. Supposons le pont réglé de telle sorte que, soit en régime permanent, soit à l'ouverture ou à la fermeture de l'interrupteur I, il ne passe jamais aucun courant dans le galvanomètre G. A un instant t quelconque, les branches AC et CB sont parcourues par un même courant d'intensité i_1, les branches AD et DB par un même courant d'intensité i_2, et les points C et D sont au même potentiel. En exprimant l'égalité, à l'instant t, des différences de potentiel $V_A - V_C$ et $V_A - V_D$ d'une part, $V_C - V_B$ et $V_D - V_B$ d'autre part, on obtient les relations :

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 = L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2, \qquad r_3 i_1 = r_4 i_2.$$

De la seconde, on tire :

$$i_2 = \frac{r_3}{r_4} i_1, \qquad \frac{di_2}{dt} = \frac{r_3}{r_4} \frac{di_1}{dt},$$

et ces valeurs, portées dans la première, donnent :

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 = L_2 \frac{r_3}{r_4} \frac{di_1}{dt} + r_2 \frac{r_3}{r_4} i_1.$$

Pour que l'équilibre soit établi en régime permanent ($di_1/dt = 0$, $i_1 \neq 0$), il faut que les coefficients des termes en i_1 soient égaux; pour qu'il soit aussi établi en régime variable ($di_1/dt \neq 0$), il faut que les coefficients des termes en di_1/dt le soient aussi; on doit avoir :

$$r_1 = r_2 \frac{r_3}{r_4}, \qquad L_1 = L_2 \frac{r_3}{r_4}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{L_1}{L_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}.$$

L'expérience consiste à régler l'équilibre, d'abord pour le régime permanent, puis pour le régime variable. Il est commode d'employer comme bobine de comparaison L_2 une bobine réglable, telle que celle que représente la figure 288 ; on réalise l'équilibre pour le régime variable en agissant sur la self de cette bobine ; comme cette opération ne modifie pas sa résistance, elle ne détruit pas l'équilibre, préalablement obtenu, pour le régime permanent.

On a avantage, pour équilibrer le pont en régime variable, à employer un régime périodiquement variable, obtenu en remplaçant la pile P par une source de courant alternatif de fréquence musicale, et à remplacer le galvanomètre G par un téléphone sensible. On rapprochera ce montage de celui que nous avons décrit au paragraphe 85 (*fig.* 103) pour la comparaison de deux capacités, et de celui que nous décrirons au paragraphe 300 (*fig.* 357) pour la comparaison d'une capacité et d'une self-inductance.

III. — *BOBINE D'INDUCTION*

237. Description. — La bobine d'induction, quelquefois appelée bobine de Ruhmkorff, du nom du premier constructeur qui l'a réalisée (1851), se compose de deux enroulements, dits *primaire et secondaire*, ayant un noyau

de fer doux commun (*fig.* 298). On aimante le noyau en envoyant dans le circuit primaire un courant continu ; un interrupteur le coupe brusquement : le noyau se désaimante, et la variation du flux d'induction produit dans le secondaire une f. é. m. qui peut être considérable, si la variation est très brusque et le nombre de spires secondaires très grand.

Le noyau est constitué par un faisceau de fils de fer doux, isolés les uns des autres par du vernis : il faut en effet éviter la production de courants de Foucault, qui échaufferaient le noyau et ralentiraient la décroissance du flux d'induction.

Le circuit primaire est enroulé autour du noyau ; sa self-inductance est assez faible pour que le courant s'y établisse rapidement, et qu'on puisse par suite mettre en jeu une grande puissance par la multiplication des interruptions.

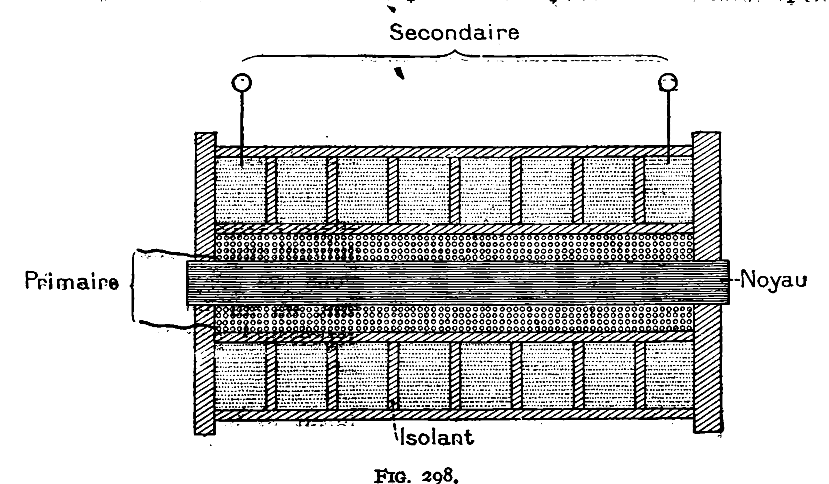


Fig. 298.

Il comporte un nombre restreint de spires, quelques centaines au plus, dans lesquelles doit passer un courant assez intense pour aimanter fortement le noyau ; le fil qui le constitue est du gros fil de cuivre, de 2 à 3 millimètres de diamètre ; sa résistance totale est de l'ordre d'une fraction d'ohm, et on peut y faire passer, sans échauffement exagéré, des courants qui atteignent, pour les bobines puissantes, plusieurs dizaines d'ampères.

Le circuit secondaire est enroulé autour du circuit primaire ; il peut comporter un nombre de spires de l'ordre de 10.000, représentant plusieurs dizaines de kilomètres de fil ; il est constitué par du fil de cuivre fin, d'un à deux dixièmes de millimètre de diamètre, et sa résistance peut être de plusieurs dizaines de milliers d'ohms. La principale difficulté de construction provient de la nécessité de réaliser entre les différentes spires un isolement suffisant. Dans les enroulements ordinaires, on enroule une couche de fil d'une extrémité à l'autre de la bobine, puis on revient en arrière ; la spire qui termine la seconde couche est enroulée directement au-dessus de la première spire de la première couche, alors qu'elle en est séparée, dans le circuit, par toutes les spires contenues dans les deux couches. Lors de la rupture du circuit primaire, il existe, entre ces deux spires, une différence de potentiel égale à la

somme de toutes les f. é. m. induites dans les spires intermédiaires ; elle est d'autant plus grande que la bobine est plus longue, et peut suffire à percer l'épaisseur d'isolant qui entoure le fil. Dans les bobines puissantes, on assure l'isolement en enroulant le secondaire en bobines courtes (*galettes*), disposées les unes à la suite des autres ; on les sépare par des cloisons isolantes suffisamment épaisses pour supporter la différence de potentiel qui peut exister entre deux bobines voisines (*fig.* 298) ; elles sont également soigneusement isolées du primaire.

238. Fonctionnement. — Il est difficile de donner une théorie complète du fonctionnement de la bobine d'induction, car l'étincelle de rupture du courant primaire le prolonge dans des conditions qu'il est impossible de préciser. Nous pouvons néanmoins représenter schématiquement par des courbes (*fig.* 299) l'allure des variations du courant primaire et de la f. é. m. secondaire, en supposant que le circuit secondaire n'est parcouru par aucun courant.

A l'instant A, l'interrupteur ferme le circuit primaire, et le courant s'y établit suivant la loi habituelle, représentée par la courbe ABD; à l'instant *b*, l'interrupteur le coupe : l'intensité tombe à zéro, suivant une loi que nous ne pouvons pas préciser, mais, en tous cas, en un temps θ très court, représenté par la longueur *b*C. Le fonctionnement de l'interrupteur se répète ensuite de la même façon, et la courbe se reproduit en $A_1B_1C_1$, etc. Les variations du flux d'induction dans le noyau suivent les variations du courant primaire, et lui sont plus ou moins proportionnelles, suivant les qualités du fer et le degré de saturation atteint : en première approximation, la f. é. m. induite dans le secondaire, qui est proportionnelle à $-d\Phi/dt$, est représentée par le coefficient angulaire de la tangente à la courbe du courant primaire. Dans la période A*b* d'établissement, la courbe AB monte lentement, on a une f. é. m. négative et relativement faible en valeur absolue (courbe A'B') ; dans la période BC de courant rapidement décroissant, on a au contraire une f. é. m. positive et très grande (courbe B'C').

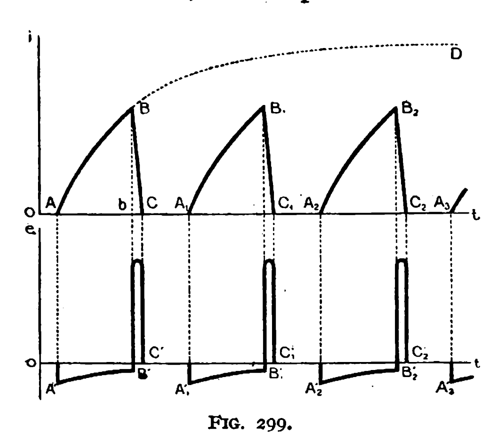


Fig. 299.

Si l'on ferme le circuit secondaire par une très grande résistance, elle est parcourue par des courants alternativement négatifs et positifs, qui transportent des quantités d'électricité dont la somme algébrique est nulle. Si l'on considère en effet deux instants, tels que ceux qui correspondent aux points A et A_1, le flux a repris la même valeur, et, d'après une des relations fondamentales de l'induction, la quantité totale d'électricité qui a traversé le circuit induit entre ces deux instants est nulle ; il y a une compensation exacte entre la quantité d'électricité négative transportée, dans la période A'B', par un courant peu intense et de longue durée, et la quantité d'électricité positive transportée, pendant la période B'C', par un courant de courte durée, mais

beaucoup plus intense. Il est d'ailleurs facile de le montrer expérimentalement : il suffit de réunir par deux conducteurs de grande résistance, par exemple des cordes mouillées, les deux bornes de la bobine aux bornes d'un galvanomètre, ou d'un milliampèremètre, pour constater que l'appareil reste au zéro lorsque la bobine fonctionne normalement ; si on manœuvre l'interrupteur à la main, assez lentement pour observer séparément l'effet de l'établissement et de la rupture du courant primaire, on constate qu'on obtient des impulsions égales et de sens contraires.

Il est facile toutefois d'obtenir des courants redressés. Si l'on ménage dans le circuit une coupure de quelques millimètres, correspondant à un potentiel explosif de l'ordre de 10.000 volts, la différence de potentiel induite à la rupture est seule capable de donner une étincelle à travers cette coupure : on le vérifie facilement en manœuvrant l'interrupteur à la main. Le circuit induit peut être considéré comme ouvert dans la période A'B', comme fermé dans la période B'C' ; il est parcouru par un courant toujours de même sens, et, si les ruptures sont assez rapprochées, le milliampèremètre prend une déviation permanente, comme si ce courant était continu.

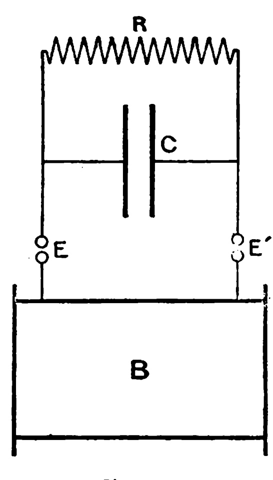


FIG. 300.

Le même dispositif peut être employé pour charger un condensateur C (*fig.* 300) à travers des étincelles EE' de quelques millimètres. Si on réunit ses deux armatures par une résistance non inductive R, assez grande pour donner une valeur élevée à la constante de temps $\tau = CR$ du circuit de décharge, elle est parcourue par un courant presque continu : il s'établit un état de régime, dans lequel la bobine restitue au condensateur, à chaque rupture du primaire, la charge qu'il a perdue à travers la résistance depuis la rupture précédente.

On voit que les bobines d'induction peuvent, au même titre que les machines électrostatiques, être considérées comme des sources de courant continu à potentiel très élevé ; elles sont d'un emploi beaucoup plus commode, et peuvent fournir des courants beaucoup plus intenses. C'est pourquoi elles ont été les seules sources employées dans les applications, telles que la production des rayons X, jusqu'au jour où le perfectionnement des redresseurs de courants alternatifs a permis des montages de plus grande puissance ; elles continuent d'ailleurs à être employées pour les installations moyennes.

239. Interrupteurs. — Désignons par Φ le flux d'induction qui traverse le noyau au moment de la rupture, par θ la durée de la rupture : la f. é. m. moyenne pendant la rupture est, par spire du secondaire, Φ / θ. *Elle est d'autant plus grande que θ est plus petit, c'est-à-dire que la rupture est plus brusque et l'étincelle primaire plus vite éteinte.*

D'autre part, dans l'emploi de la bobine, la quantité d'électricité recueillie est d'autant plus grande, et le courant obtenu est d'autant plus intense, que les interruptions sont plus fréquentes. Les perfectionnements apportés aux interrupteurs ont cherché surtout à réduire la durée de la rupture, et, acces-

soirement, à réduire les autres intervalles Ab et CA$_1$. Remarquons que, lorsque l'on réduit la durée Ab, le courant primaire est coupé bien avant d'avoir atteint sa valeur maxima : pour maintenir à la même valeur le courant bB et le flux Φ correspondant, il suffit d'augmenter la f. é. m. de la source qui alimente le primaire.

Les premiers interrupteurs étaient des **trembleurs**, analogues à ceux des sonneries électriques, attirés directement par le noyau de la bobine. On les utilise encore pour les petites bobines, employées, par exemple, en Électricité Médicale. La figure 301 en représente un modèle un peu perfectionné : la palette de fer doux P attirée par le noyau vient frapper la lame L, légère et flexible, et rompt en l'entraînant le contact ab; elle cesse alors d'être attirée, et est rappelée en arrière par le ressort R. La rupture se produit au moment où la palette P a déjà une vitesse notable; les contacts de platine ab s'éloignent rapidement l'un de l'autre, et leur distance devient très vite assez grande pour que l'étincelle de rupture s'éteigne.

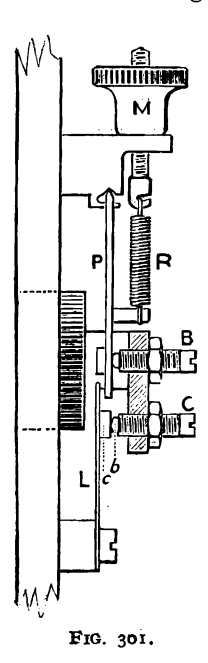


Fig. 301.

On améliore le fonctionnement de la bobine en réunissant les deux bords ab de la coupure aux armatures d'un **condensateur** de l'ordre du microfarad. S'il s'établit entre eux une différence de potentiel, c'est en effet que la f. é. m. d'induction produit dans le fil primaire un mouvement des charges électriques, qui viennent charger les extrémités du fil (§ 225) : si elles doivent charger un condensateur, la différence de potentiel s'élève plus lentement, et son accroissement peut être assez retardé pour que les contacts ab se soient éloignés à une distance telle que l'étincelle ne jaillisse plus. Mais il ne faut pas que la capacité du condensateur soit trop grande : il forme en somme avec l'enroulement primaire un circuit oscillant, et la période des oscillations qui y prennent naissance est d'autant plus grande que la capacité est plus grande. Le temps qui s'écoule entre l'instant de la rupture, où la charge du condensateur est nulle, et l'instant où le courant s'annule est voisin d'un quart de période : s'il est supérieur à la durée de l'étincelle de rupture sans condensateur, le condensateur est plus nuisible qu'utile. On ne doit pas employer de condensateur avec les interrupteurs modernes à grande fréquence; il est au contraire indispensable avec les interrupteurs type trembleur, et permet avec eux d'obtenir au secondaire des longueurs d'étincelle allant jusqu'à 30 centimètres, avec des fréquences de 10 à 20 par seconde.

Pour obtenir des f. é. m. secondaires plus fortes, il faut remplacer les trembleurs à contacts solides par des **interrupteurs à mercure.** Les uns comportent une tige verticale animée d'un mouvement alternatif au cours duquel elle plonge dans un bain de mercure; une couche d'alcool ou de pétrole disposée sur le mercure diminue l'étincelle de rupture; le mouvement de la tige peut être commandé par un électro à courant indépendant, ou mieux par une petite dynamo. Dans d'autres, une petite turbine produit, au centre d'un cylindre vertical de matière isolante, un jet de mercure horizontal; l'ajutage d'où il sort est entraîné d'un mouvement de rotation rapide, et le jet de mer-

cure établit le contact primaire lorsqu'il vient rencontrer des colonnes métalliques disposées dans le cylindre ; l'appareil est entièrement rempli de gaz d'éclairage, qui donne une étincelle de rupture très réduite. Ces derniers interrupteurs sont fréquemment employés dans les installations médicales de rayons X : ils permettent de couper des courants primaires de plusieurs dizaines d'ampères avec des fréquences de 100 à 200 par seconde, et d'obtenir au secondaire des étincelles de plus d'un mètre, ou des courants de plusieurs milliampères.

Enfin, on emploie dans les laboratoires l'**interrupteur électrolytique de Wehnelt.** Il est constitué par un vase de plomb C formant cathode (*fig.* 302), rempli d'un électrolyte, qui est le plus souvent une solution de sulfate de magnésium, et par une tige de platine A formant anode, protégée par un tube de verre T qui ne laisse libre qu'une longueur de quelques millimètres. La chaleur dégagée par le passage du courant produit autour de l'anode une gaîne isolante de vapeur, qui l'interrompt brusquement ; il se rétablit dès que la vapeur s'est condensée. La figure 302 reproduit un modèle disposé de telle sorte que tout l'électrolyte du vase V (4 à 5 litres) soit mis en mouvement par les différences de densité qui résultent de l'élévation de température au voisinage de l'anode, et participe à l'échauffement. Il peut fonctionner avec une source de f. é. m. égale à 120 volts, et couper des courants de 12 à 15 ampères avec une fréquence de l'ordre de 1.000 à 2.000 par seconde.

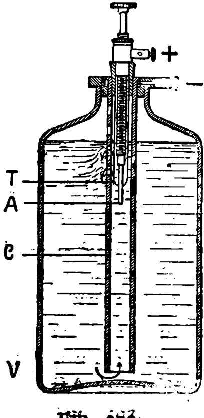


Fig. 302.

Il importe de remarquer que, quelle que soit la rapidité de la rupture, il existe une limite qu'il n'est pas possible de dépasser pour la différence de potentiel aux bornes du secondaire. Nous verrons, dans le prochain chapitre, que, lors de la rupture du courant d'intensité i dans le primaire de self-inductance L, l'énergie disponible est $\frac{1}{2}Li^2$; quand la capacité C du secondaire est chargée avec la différence de potentiel V, l'énergie apparue est $\frac{1}{2}CV^2$: on a nécessairement $CV^2 < Li^2$. Il est d'ailleurs difficile d'appliquer cette relation ; la charge du secondaire est répartie tout le long de son enroulement, et la capacité diffuse C n'est pas calculable ; de même l'existence du noyau de fer ne permet pas de donner un sens précis à la self L.

CHAPITRE XXIV

ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

I. — *CIRCUITS MOBILES DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE INVARIABLE*

240. Corrélation des phénomènes d'induction et des phénomènes électromagnétiques. — Considérons un élément conducteur AB placé dans un champ magnétique invariable et parcouru par un courant d'intensité i ; supposons-le mobile : entre les instants t et $t + dt$, il coupe un flux $d\varphi$, que nous compterons positivement dans le sens défini aux paragraphes 118 et 217. Les forces électromagnétiques auxquelles il est soumis fournissent, dans ce déplacement, un travail $d\mathcal{C} = i\,d\varphi$ (§ 217). D'autre part, pendant le temps dt, l'élément AB est le siège d'une f. é. m. d'induction $e = -d\varphi / dt$; d'après la définition même de la f. é. m., cela veut dire qu'il est créé dans l'élément une énergie électrique $dw = ei\,dt = -i\,d\varphi = -d\mathcal{C}$.

Si le flux coupé $d\varphi$ est positif, les forces électromagnétiques fournissent un travail $d\mathcal{C}$ positif : le conducteur AB est un moteur, susceptible, par exemple, de soulever un poids au cours du déplacement envisagé ; la f. é. m. est négative : c'est une force contre-électromotrice, et le conducteur AB absorbe, au cours de son déplacement, l'énergie électrique $-dw = d\mathcal{C}$. Si le flux $d\varphi$ est négatif, le travail $d\mathcal{C}$ est négatif ; c'est un travail résistant : l'opérateur fournit le travail $-d\mathcal{C}$ pour effectuer le déplacement du conducteur, malgré les forces électromagnétiques ; le conducteur mobile est un générateur, et il produit l'énergie électrique $dw = -d\mathcal{C}$.

Il y a donc corrélation complète entre les phénomènes d'induction et les phénomènes électromagnétiques : *quand on déplace un circuit ou une portion quelconque d'un circuit parcouru par un courant dans un champ magnétique invariable, il y a transformation intégrale du travail fourni contre les forces électromagnétiques en énergie électrique, si l'appareil fonctionne comme générateur ; de l'énergie électrique en travail si l'appareil fonctionne comme moteur.* On passe de l'un à l'autre fonctionnement en changeant le signe de l'expression $i\,d\varphi$; si l'on maintient le sens du courant constant, on doit changer le signe du flux coupé $d\varphi$: *le fonctionnement comme moteur et le fonctionnement comme générateur correspondent, pour un même sens du courant, aux deux sens de déplacement opposés.*

Il convient d'ailleurs de remarquer que l'énergie électrique $ei\,dt$ n'est pas égale à l'énergie disponible aux bornes de la portion de circuit AB dans le

fonctionnement comme générateur, ni à l'énergie totale qui lui est fournie dans le fonctionnement comme moteur. Dans l'un et l'autre cas, il faut, pour passer à l'énergie aux bornes, tenir compte de l'énergie dissipée par effet Joule : la transformation intégrale de l'énergie électrique en énergie mécanique, ou réciproquement, ne peut être réalisée qu'en se plaçant dans les conditions de la réversibilité, c'est-à-dire pour des intensités de courant infiniment petites (§ 158).

Le théorème que nous venons de démontrer est souvent employé dans la pratique, pour calculer le travail mécanique absorbé par une dynamo génératrice ou la force contre-électromotrice d'un moteur électrique. Il est facile de réaliser des expériences montrant la corrélation qu'il indique : c'est ainsi que le déplacement d'un fil vertical entre les branches d'un aimant en fer à cheval (*fig.* 271, § 218 et *fig.* 276, § 220) nous a servi à montrer l'existence d'une part des forces électromagnétiques et d'autre part des phénomènes d'induction ; de même, on peut obtenir des f. é. m. d'induction en déplaçant la bobine mobile de la figure 266 (§ 214). De même encore, on peut obtenir des courants induits à l'aide de la roue de Barlow (*fig.* 273, § 218), qu'on fait tourner à la main, ou par un petit moteur. On fait d'abord traverser la roue par le courant d'une pile, elle tourne dans un certain sens, et est le siège d'une force contre-électromotrice d'induction qui absorbe une quantité d'énergie électrique équivalente au travail mécanique fourni par la roue ; on retire la pile, on ferme le circuit de la roue sur un galvanomètre, et on la fait tourner en sens inverse du sens précédent : on constate l'existence d'un courant induit de même sens que le courant primitif. Si l'intensité du courant est i, le rayon de la roue a, le champ magnétique H et le nombre de tours par seconde ν, le couple électromagnétique fournit par seconde un travail $\mathcal{T} = \pi a^2 \nu H i$ (§ 218) ; la f. é. m. d'induction est $e = \mathcal{T} / i = \pi a^2 \nu H$. Nous décrirons plus loin des mesures (détermination de l'ohm) faites en mesurant cette f. é. m. : le fait qu'elles ne conduisent pas à des contradictions est une vérification de la formule que nous venons d'établir.

241. Énergie mutuelle des feuillets et des courants. — Si le champ magnétique invariable dans lequel on déplace un circuit C parcouru par un courant est créé par un système d'aimants permanents A, il n'y a pas d'autres échanges d'énergie entre le milieu extérieur et le système constitué par les aimants A et le courant C que ceux que nous venons d'envisager ; leur somme algébrique est nulle, puisqu'on a à chaque instant $d\mathcal{T} + dw = 0$, et au total, on ne recueille aucune énergie en écartant indéfiniment le courant des aimants. *L'énergie mutuelle d'un courant et d'un système d'aimants est nulle.*

Supposons maintenant que le champ magnétique soit créé par un second circuit C' fixe et parcouru par un courant d'intensité constante i' ; dans la position actuelle du circuit C, les deux circuits ont une inductance mutuelle M, et le courant i' envoie à travers le circuit C un flux $\Phi = Mi'$. Supposons que les deux circuits aient été d'abord infiniment éloignés, puis que nous ayons approché le circuit C du circuit C', en maintenant constantes les intensités des courants i et i'. Dans ce déplacement, le flux augmente de 0 à Φ, les forces électromagnétiques fournissent un travail $\mathcal{T} = i\Phi = Mii'$; en même temps nous recueillons dans le circuit C une énergie électrique $w = -\mathcal{T}$. Mais le déplacement du circuit C en face du circuit C' produit

dans ce dernier une f. é. m. d'induction : si de l'instant t à l'instant $t + dt$, l'inductance mutuelle varie de M à $M + dM$, le flux envoyé par le courant i à travers le circuit C′ varie de $\Phi' = Mi$ à $\Phi' + d\Phi' = (M + dM)i$, et la f. é. m. d'induction y est $e' = -\frac{dM}{dt}i$. Il apparaît dans le circuit fixe C′ une énergie électrique $dw' = e'i'dt = -ii'dM$; la symétrie de cette expression suffit à montrer qu'elle est égale à l'énergie dw qui apparaît, pendant le même temps dt, dans le circuit mobile C ; lorsque ce dernier vient d'une position infiniment éloignée à la position C, il apparaît, dans le circuit C′, une énergie électrique $w' = w = \int_0^M -ii'dM = -Mii' = -\mathcal{T}$.

L'énergie totale W fournie par le milieu extérieur, dans le déplacement qui amène le premier circuit de l'infini à la position C, est l'**énergie mutuelle des deux courants ;** c'est la somme, changée de signe, du travail $\mathcal{T}$ et des énergies électriques w et w' :

$$W = -\mathcal{T} - w - w' = -\mathcal{T} + 2\mathcal{T} = \mathcal{T} = Mii'.$$

Si l'on veut exprimer les forces électromagnétiques qui agissent sur le circuit C′ à partir de l'énergie, il suffit d'écrire que $\mathcal{T}$ est le travail de ces forces : leur résultante suivant Ox, par exemple, est :

$$X = \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = ii'\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Rapprochons de ces formules celles qui ont été établies pour les feuillets (§§ 125 et 127). L'énergie mutuelle de deux feuillets se réduit au travail $-\mathcal{T}$ fourni contre les forces magnétiques pour rapprocher l'un de l'autre les deux feuillets, primitivement infiniment éloignés :

$$W' = -\mathcal{T} = -\frac{MUU'}{\mu_0^2},$$

et les forces magnétiques qui agissent sur l'un d'eux sont données par :

$$X = \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial x} = -\frac{\partial W'}{\partial x} = \frac{UU'}{\mu_0^2}\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Dans tous les cas, on peut, pour le calcul des forces et de leurs travaux, remplacer les courants par les feuillets équivalents ($U = \mu_0 i$) : c'est l'hypothèse fondamentale dont nous sommes partis. *Mais on n'a jamais le droit de faire cette substitution pour le calcul de l'énergie, non plus que dans l'expression des forces à partir de l'énergie : l'énergie mutuelle de deux feuillets est* $-MUU'/\mu_0^2$, *celle d'un feuillet et d'un courant est nulle, celle de deux courants est* $+ Mii'$. La différence provient de ce que la substitution d'un courant à un feuillet met en jeu, par suite des phénomènes d'induction, une énergie supplémentaire dont il faut tenir compte : on peut comparer les calculs développés ici à ceux qui ont été faits en Électrostatique (§§ 65 et 66) pour les déplacements des conducteurs à charges constantes et à potentiels constants.

II. — *CIRCUITS FIXES PARCOURUS PAR DES COURANTS D'INTENSITÉ VARIABLE*

242. Énergie d'un courant. — Reprenons l'équation qui donne l'intensité i du courant en régime variable, dans un circuit de résistance r, de **self-inductance** L, contenant un générateur de f. é. m. e (§ 233) :

$$e = L\frac{di}{dt} + ri.$$

Exprimons à l'aide de cette équation l'énergie électrique $dU = ei\,dt$ fournie par le générateur entre les instants t et $t + dt$:

$$dU = ei\,dt = Li\,di + ri^2dt.$$

Une partie de cette énergie, $dQ = ri^2dt$, est transformée en chaleur dans le conducteur ; mais l'autre partie, $dW = Li\,di$, ne réapparaît pas immédiatement : elle est emmagasinée par le courant, et constitue une énergie potentielle d'une nouvelle espèce, que nous appellerons l'**énergie électromagnétique du courant.** Lorsque l'intensité passe de la valeur 0 à la valeur i, l'énergie totale ainsi emmagasinée est :

$$W = \int dW = \int_0^i Li\,di = \frac{1}{2}Li^2.$$

Pour créer un courant d'intensité i dans un circuit de self-inductance L, *il faut dépenser une énergie* $\frac{1}{2}Li^2$, *qui représente l'énergie du courant. Elle sera restituée lors de sa suppression.*

Si on le supprime en mettant le générateur en court-circuit, l'énergie électromagnétique est transformée en énergie calorifique par l'extra-courant de rupture. On a en effet, à chaque instant, $ri = -L\,di\,/\,dt$, et le calcul de l'énergie Q dissipée par effet Joule donne :

$$Q = \int_0^\infty ri^2dt = \int_i^0 -Li\,di = \frac{1}{2}Li^2.$$

Si l'on supprime le courant en ouvrant le circuit, les deux extrémités du conducteur forment un condensateur, qui se charge avec une forte différence de potentiel : l'énergie électromagnétique se transforme en énergie électrostatique.

Considérons de même la décharge d'un condensateur de capacité C à travers un circuit L, r (*fig.* 303). Nous avons, à chaque instant, entre la différence de potentiel V aux armatures du condensateur, sa charge q, et l'intensité i du courant, les relations :

$$V = L\frac{di}{dt} + ri, \qquad i = -\frac{dq}{dt},$$

d'où :

$$V\,dq + Li\,di + ri^2dt = 0.$$

Dans cette expression, $V\,dq$ est l'accroissement dW' de l'énergie électrostatique du condensateur, correspondant à l'élévation à un potentiel V de la charge dq ; $Li\,di$ est l'accroissement dW de l'énergie électromagnétique du courant ; ri^2dt est l'énergie dQ dissipée par effet Joule, et l'équation $dW' + dW + dQ = 0$ exprime la conservation de l'énergie dans la décharge du condensateur.

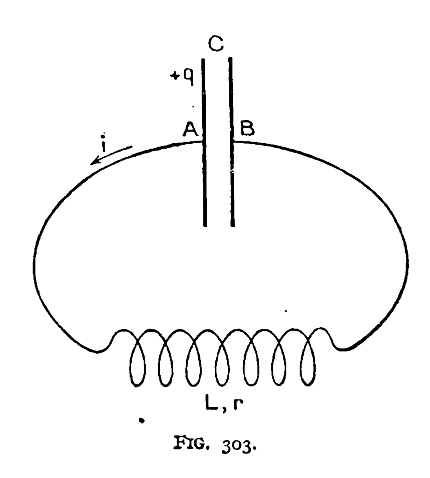


FIG. 303.

Supposons la décharge oscillante : nous aurons alternativement transformation de l'énergie électrostatique en énergie électromagnétique, et de l'énergie électromagnétique en énergie électrostatique. A l'instant où la charge du condensateur est maximum, le courant est nul, et l'énergie est entièrement sous la forme électrostatique ; sa valeur est $W'_m = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$. A l'instant où la charge du condensateur est nulle, l'énergie est entièrement sous la forme électromagnétique ; sa valeur est $W_m = \frac{1}{2}Li_0^2$. Si la résistance est négligeable, le courant est alors maximum, et la transformation est complète ; on a : $W_m = W'_m$; sinon, il y a eu de l'énergie dissipée en chaleur, et chacun des maxima W_m et W'_m est inférieur au précédent.

On peut comparer ces transformations de l'énergie à celles qui se produisent dans le mouvement d'un système oscillant, par exemple d'un pendule. Quand le pendule est à son élongation maximum, son énergie est tout entière de l'énergie potentielle, la masse du pendule se trouvant au point où le potentiel de gravitation est maximum : on rapprochera l'énergie électrostatique de cette énergie potentielle mécanique. Quand le pendule passe par sa position d'équilibre, avec une vitesse angulaire ω, l'énergie est entièrement sous forme d'énergie cinétique : on rapprochera de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}I\omega^2$ l'énergie électromagnétique $\frac{1}{2}Li^2$ que possède l'électricité en mouvement ; on lui donne quelquefois le nom d'*énergie électrocinétique*. Enfin si le pendule est soumis à des forces de frottement dont le moment par rapport à l'axe est $f\omega$, elles transforment en chaleur une énergie $f\omega^2dt$; on rapprochera cette énergie dissipée par les forces d'amortissement de l'énergie ri^2dt dissipée par effet Joule. Ces considérations énergétiques nous conduisent encore à comparer, d'une part les forces d'inertie et les f. é. m. de self-induction (cf. § 234), d'autre part les frottements et l'effet Joule.

243. Énergie d'un système de courants. — Nous nous bornerons au cas de deux circuits en présence, C_1 et C_2, parcourus par des courants d'in-

tensités i_1 et i_2 : les calculs s'étendraient sans difficulté au cas d'un nombre quelconque de circuits. Nous désignerons par r_1 et r_2 les résistances des deux circuits, par L_1 et L_2 leurs self-inductances, par M leur inductance mutuelle. Pour créer chacun des courants i_1 et i_2 dans les circuits C_1 et C_2, supposés infiniment éloignés l'un de l'autre, il faut dépenser les énergies $W_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$ et $W_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$; pour rapprocher ensuite l'un de l'autre les deux courants, il faut dépenser l'énergie $W_{12} = M i_1 i_2$ (§ 241). *L'énergie électromagnétique totale* W *du système des deux courants est la somme de l'énergie propre de chacun des deux courants et de leur énergie mutuelle :*

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

L'expression de l'énergie mutuelle W_{12} que nous venons d'utiliser a été obtenue en évaluant l'énergie dépensée dans le déplacement d'un circuit parcouru par un courant d'intensité constante ; dans ce déplacement, il n'y a pas de phénomènes de self-induction, et il n'y a à tenir compte que des énergies d'induction mutuelle et du travail des forces électromagnétiques. On peut aussi obtenir directement l'expression de l'énergie totale W, en calculant l'énergie dépensée pour créer les courants i_1 et i_2 dans les circuits C_1 et C_2 maintenus immobiles : les forces électromagnétiques n'effectuent alors aucun travail, mais il faut tenir compte de l'énergie mise en jeu par les phénomènes de self-induction.

Les équations relatives au régime variable dans les deux circuits sont, en désignant par e_1 et e_2 les f. é. m. des générateurs qui y produisent les courants :

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_1 i_1, \qquad e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2.$$

Elles fournissent l'équation des échanges d'énergie :

$$e_1 i_1 dt + e_2 i_2 dt = L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M(i_1 di_2 + i_2 di_1) + r_1 i_1^2 dt + r_2 i_2^2 dt.$$

Désignons par dU l'énergie totale, $e_1 i_1 dt + e_2 i_2 dt$, fournie par les deux générateurs pendant le temps dt, par dQ l'énergie $r_1 i_1^2 dt + r_2 i_2^2 dt$ transformée en chaleur dans les deux circuits, par dW_1 l'énergie électromagnétique $L_1 i_1 di_1$ emmagasinée par le premier, par dW_2 l'énergie électromagnétique $L_2 i_2 di_2$ emmagasinée par le second ; le dernier terme, $dW_{12} = M(i_1 di_2 + i_2 di_1) = M\, d(i_1 i_2)$, représente la variation de l'énergie mutuelle des deux circuits. On a :

$$dU = dW_1 + dW_2 + dW_{12} + dQ.$$

Lorsque les deux intensités passent des valeurs o aux valeurs i_1 et i_2, les deux circuits restant immobiles et le coefficient M conservant une valeur constante, l'énergie dépensée et emmagasinée à l'état d'énergie électromagnétique dans le système est :

$$W = \int_0^{i_1, i_2} (dU - dQ) = \int_0^{i_1} dW_1 + \int_0^{i_2} dW_2 + \int_0^{i_1 i_2} dW_{12},$$

d'où :

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

On dépense bien au total la même quantité d'énergie pour créer les courants i_1 et i_2 dans le système des circuits C_1 et C_2, qu'on les crée dans les circuits immobiles ou qu'on rapproche les circuits après les avoir créés.

Nous avons démontré ce résultat en utilisant, par la relation $w = w' = -\mathfrak{E}$ employée au paragraphe 241, la corrélation des phénomènes électromagnétiques et des phénomènes d'induction. Inversement, on peut le considérer comme une conséquence nécessaire du principe de la conservation de l'énergie, et en déduire la corrélation des phénomènes électromagnétiques et des phénomènes d'induction : *la loi fondamentale de l'induction,* $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, *apparaît alors comme une conséquence du principe de l'énergie et de l'hypothèse fondamentale d'Ampère.*

244. Localisation de l'énergie électromagnétique. — Nous avons admis en Electrostatique (§ 64) que l'énergie électrostatique d'un système de conducteurs chargés était répartie dans tout l'espace soumis au champ électrique ; l'élément de volume dv, placé en un point où le champ électrique est $\vec{E}$ et le pouvoir inducteur spécifique ε, possède l'énergie $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{8\pi} dv$. Nous admettrons de même que l'*énergie électromagnétique d'un système de courants est répartie dans tout l'espace, et qu'un élément de volume dv, en un point où le champ magnétique est $\vec{H}$ et la perméabilité μ, contient l'énergie* $\frac{\mu\mu_0 H^2}{8\pi} dv$. Nous allons montrer que cette expression est équivalente à celles que nous avons établies précédemment.

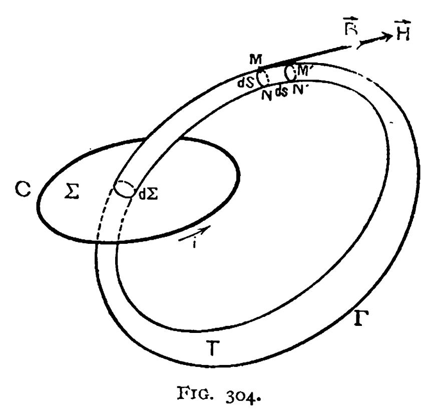


Fig. 304.

Considérons d'abord le cas d'un circuit unique, de self-inductance L, parcouru par un courant i, et évaluons l'intégrale $\iiint \frac{\mu\mu_0 H^2}{8\pi} dv$, étendue à tout l'espace soumis au champ magnétique. Décomposons-le en éléments de volume à l'aide des tubes d'induction ; soit T un tel tube (*fig.* 304), et MNM'N' un élément de ce tube, de longueur ds, de section dS et de volume $dv = ds\, dS$. Le vecteur $\vec{B}$ au point M est tangent à l'élément $\vec{ds}$ de la ligne d'induction Γ et normal à la section dS du tube ; il est égal à $\mu\mu_0 H$ (§ 190), et l'élément différentiel $\mu\mu_0 H^2 dv$ peut s'écrire $\vec{B}\,\vec{dS} \times \vec{H}\,\vec{ds}$. Le flux $d\Phi = \vec{B}\,\vec{dS}$ est le même pour toutes les sections du tube d'induction T, quels que soient les milieux qu'il traverse : d'autre part, d'après le théorème d'Ampère, la circulation $\int_\Gamma \vec{H}\,\vec{ds}$ est égale à $4\pi i$, quels que soient également les mi-

lieux traversés. En calculant l'intégrale pour le volume limité par le tube d'induction T, on obtient :

$$\int_{T} \frac{\mu\mu_0 H^2}{8\pi} dv = \frac{\vec{B}\,\vec{dS}}{8\pi} \int_{\Gamma} \vec{H}\,\vec{ds} = \frac{1}{8\pi} \cdot d\Phi \,.\, 4\pi i = \frac{1}{2}\, i\, d\Phi.$$

Le flux $d\Phi$ est celui qui traverse un élément $d\Sigma$ découpé par le tube T sur une surface Σ limitée par le contour du courant. Si l'on fait la somme des flux $d\Phi$ pour tous les tubes d'induction, on obtient le flux total $\Phi = Li$ envoyé par le courant à travers la surface Σ. On a, en étendant la première intégrale à tout l'espace soumis au champ magnétique du courant :

$$\iiint \frac{\mu\mu_0 H^2}{8\pi} dv = \frac{1}{2}\, i \iint_{\Sigma} d\Phi = \frac{1}{2} L i^2,$$

et l'intégrale calculée représente bien l'énergie électromagnétique du courant i.

Considérons maintenant un système de deux courants i_1, i_2, et évaluons à nouveau l'intégrale $\iiint \frac{\mu\mu_0 H^2}{8\pi} dv$. Le champ $\vec{H}$ est la résultante des champs $\vec{H}_1$ et $\vec{H}_2$ créés par les deux courants, et on a (*fig.* 305) :

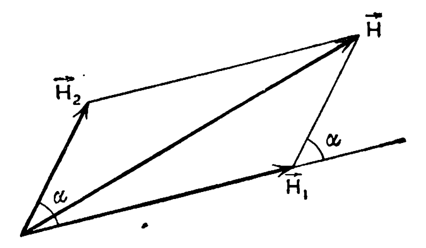


FIG. 305.

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 + 2H_1H_2 \cos\alpha = H_1^2 + H_2^2 + 2\vec{H}_1\vec{H}_2.$$

On a donc :

$$\iiint \frac{\mu\mu_0 H^2}{8\pi} dv = \iiint \frac{\mu\mu_0 H_1^2}{8\pi} dv + \iiint \frac{\mu\mu_0 H_2^2}{8\pi} dv + \iiint \frac{\mu\mu_0 \vec{H}_1\vec{H}_2}{4\pi} dv.$$

D'après le calcul précédent, les deux premières intégrales représentent les énergies propres $W_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$ et $W_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$ des deux courants. Reste à évaluer la dernière intégrale : nous décomposerons l'espace en éléments de volume au moyen des tubes d'induction T_1 du champ magnétique $\vec{H}_1$ créé par le premier courant (*fig.* 306) et nous aurons, par un raisonnement analogue au précédent :

$$\mu\mu_0 \vec{H}_1\vec{H}_2 dv = \vec{B}_1\, \vec{H}_2 dS\, ds = B_1 dS \,.\, \vec{H}_2\vec{ds} = d\Phi_1 .\, \vec{H}_2\vec{ds};$$

$$\int_{T_1} \frac{\mu\mu_0 \vec{H}_1\vec{H}_2}{4\pi} dv = \frac{d\Phi_1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \vec{H}_2\vec{ds}.$$

Deux cas peuvent se présenter. Ou le tube T_1 et le flux $d\Phi_1$ qu'envoie le courant i_1 à travers ce tube ne traversent pas une surface Σ_2 limitée par le contour C_2, et la circulation $\int_{\Gamma_1} \vec{H}_2 \vec{ds}$ est nulle. Ou ils la traversent, et elle est égale à $4\pi i_2$; la somme des flux $d\Phi_1$ correspondant aux tubes d'induction de cette espèce est le flux $\Phi_1 = Mi_1$ envoyé par le courant i_1 à travers le circuit C_2. On a finalement, la première intégrale étant étendue à tout l'espace :

$$\iiint \frac{\mu\mu_0 \vec{H}_1 \vec{H}_2}{4\pi} dv = \frac{4\pi i_2}{4\pi} \iint_{\Sigma_2} d\Phi_1 = Mi_1 i_2.$$

L'intégrale $\iiint \frac{\mu\mu_0 \vec{H}_1 \vec{H}_2}{4\pi} dv$ représente bien l'énergie mutuelle $W_{12} = Mi_1 i_2$ des deux courants, et l'intégrale $\iiint \frac{\mu\mu_0 H^2}{8\pi} dv$ représente bien l'énergie électromagnétique totale $W = W_1 + W_2 + W_{12}$ du système des deux courants.

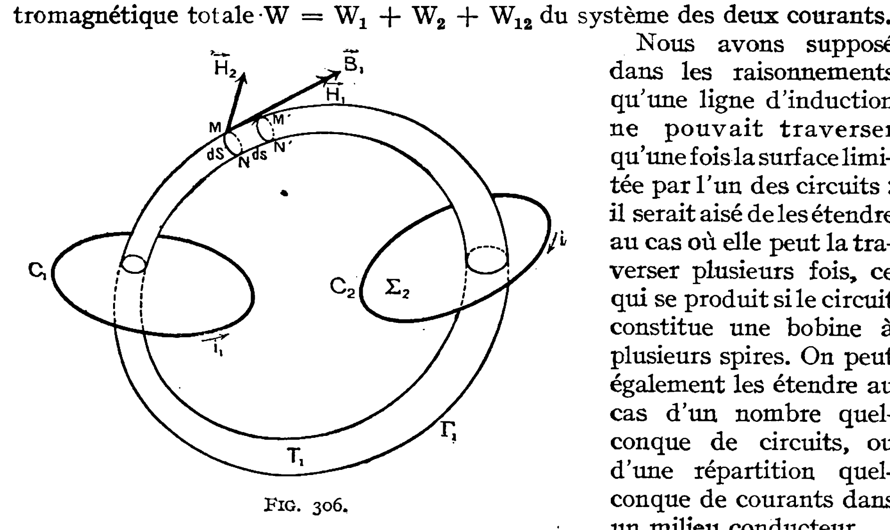


Fig. 306.

Nous avons supposé dans les raisonnements qu'une ligne d'induction ne pouvait traverser qu'une fois la surface limitée par l'un des circuits : il serait aisé de les étendre au cas où elle peut la traverser plusieurs fois, ce qui se produit si le circuit constitue une bobine à plusieurs spires. On peut également les étendre au cas d'un nombre quelconque de circuits, ou d'une répartition quelconque de courants dans un milieu conducteur.

Les calculs ne peuvent démontrer qu'une équivalence mathématique ; mais, pour les mêmes raisons qu'en Électrostatique, nous admettrons qu'elle correspond à une réalité physique. En une région quelconque du champ d'un courant i, nous pouvons placer un circuit conducteur, et, lors de la rupture du courant i, y recueillir de l'énergie par le courant induit qui s'y produit : il faut bien supposer que l'énergie se trouve là où l'on peut la recueillir. Si le courant i est le courant de décharge d'un condensateur, il existe en chaque point à la fois un champ magnétique et un champ électrique, et chaque élément de volume contient à la fois une énergie électrostatique $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{8\pi} dv$ et une énergie électromagnétique $\frac{\mu\mu_0 H^2}{8\pi} dv$; si la décharge est oscillante, ces énergies

subissent des variations périodiques. La théorie de Maxwell (cf. chap. XXXI) a pour objet l'étude de la propagation de cette énergie, et elle conduit à lui identifier l'énergie lumineuse : l'importance des résultats ainsi obtenus est une justification remarquable de l'hypothèse de la localisation de l'énergie dans le milieu.

245. Énergie dissipée par hystérésis. — Tous les calculs que nous avons développés supposent que les valeurs de la self-inductance et de l'inductance mutuelle des circuits sont définies, et qu'en chaque point du milieu la perméabilité a une valeur définie, indépendante de la valeur actuelle et des valeurs antérieures du champ. Ils n'ont plus de sens lorsque la région de l'espace soumise au champ magnétique contient du fer.

Dans tous les cas, si un courant produit à l'instant t, à travers le circuit qu'il parcourt, un flux d'induction Φ, il existe dans ce circuit une f. é. m. de self-induction $-d\Phi / dt$. Si la résistance du circuit est r, et s'il contient un générateur de f. é. m. e, l'intensité i du courant à l'instant t est donnée par :

$$e = \frac{d\Phi}{dt} + ri.$$

L'énergie fournie par le générateur pendant le temps dt est :

$$dU = ei\,dt = i\,d\Phi + ri^2dt,$$

et la quantité $i\,d\Phi$ représente la partie de cette énergie qui n'est pas consommée par effet Joule dans le conducteur. Mais il est difficile de pousser le calcul plus loin : le flux d'induction Φ n'est pas proportionnel à l'intensité i du courant, et, d'autre part, une partie de l'énergie $i\,d\Phi$ est transformée en chaleur dans le fer par hystérésis.

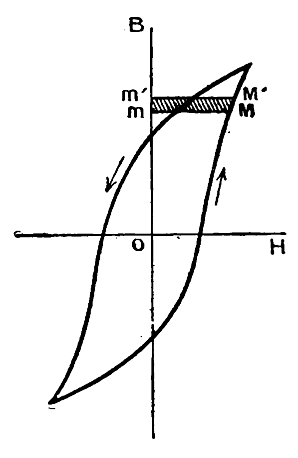


FIG. 307.

Plaçons-nous dans le cas simple d'un enroulement comportant N spires réparties uniformément le long d'un circuit magnétique fermé constitué par un tore de fer. Si l est la longueur du tore, le champ magnétique en un point du fer est, d'après le théorème d'Ampère, $H = 4\pi Ni/l$; si S est sa section, le flux Φ est donné, à partir de l'induction B, par l'expression $\Phi = NBS$. L'énergie $i\,d\Phi$ dépensée dans le fer peut se mettre sous la forme $\frac{Hl}{4\pi N} \times NS\,dB = \frac{vH\,dB}{4\pi}$, en désignant par v le volume lS ; l'énergie dw dépensée par unité de volume du fer est $\frac{H\,dB}{4\pi}$, et on peut la calculer à l'aide de la courbe d'hystérésis, tracée avec H et B comme coordonnées (*fig.* 307) : la quantité $H\,dB$ y est représentée par l'aire mm'MM'. Si l'on fait varier le courant de $-i_0$ à $+i_0$, puis de $+i_0$ à $-i_0$, de façon à décrire le cycle complet, l'énergie totale w dépensée par unité de volume du fer est positive,

et égale au quotient par 4π de l'aire du cycle. Comme on est revenu à un état final identique à l'état initial, l'énergie potentielle a repris la même valeur ; l'énergie w a été dissipée sous forme de chaleur.

Ramenons cette expression à celle du paragraphe 197. On a $B = \mu_0 H + 4\pi I$; l'énergie dissipée par unité de volume et par cycle d'hystérésis est, les intégrales étant prises le long de la courbe qui représente ce cycle :

$$w = \frac{1}{4\pi}\int H\,dB = \frac{1}{4\pi}\int \mu_0 H\,dH + \int H\,dI.$$

La première intégrale est nulle pour un cycle fermé, puisque l'élément différentiel est une différentielle exacte $d\,(\mu_0 H^2/2)$; la seconde représente l'aire du cycle d'hystérésis construit avec H et I comme coordonnées.

245 *bis*. Travail électromagnétique et loi de l'induction dans un système d'unités quelconque. — Nous avons supposé jusqu'ici que les diverses grandeurs électriques et magnétiques étaient mesurées dans un système d'unités satisfaisant à la relation de coordination $\mathbf{c}^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$. Si nous abandonnons cette restriction, nous devons prendre, pour exprimer l'équivalence entre le feuillet de puissance U et le courant d'intensité i, la relation (§ 132) :

$$\mu_0 i = c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,U.$$

Les raisonnements des paragraphes 213 et 217 donnent alors pour le *travail des forces électromagnétiques* et pour la *force élémentaire* les valeurs :

$$\mathcal{T} = \frac{i\,(\Phi_2 - \Phi_1)}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \qquad \vec{f} = \frac{i\,\vec{ds}}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \wedge \mu_0\vec{H}.$$

L'équivalence entre le travail électromagnétique et l'énergie électrique est un fait, indépendant des unités employées. On a toujours (§ 240) $ei\,dt = -d\mathcal{T}$, et l'expression que nous venons d'écrire du travail fournit l'expression de la *loi fondamentale de l'induction :*

$$e = -\frac{1}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{d\Phi}{dt}.$$

On prend quelquefois, comme relation conventionnelle reliant l'unité de flux d'induction magnétique à l'unité de force électromotrice, la formule $e = -d\Phi/dt$: on voit que cette convention de coordination entre les unités magnétiques et les unités électriques est équivalente à celle que l'on adopte en posant $\mathbf{c}^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$, ou (§ 189) $\int \vec{H}\,\vec{ds} = 4\pi i$.

Si nous introduisons, dans le raisonnement du paragraphe 227, la valeur que nous venons d'obtenir pour la f. é. m. d'induction, nous obtenons la *relation de Maxwell-Faraday* sous la forme :

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Quant à l'expression de l'énergie localisée $\mu\mu_0 H^2\,dv/8\pi$, elle ne contient que des grandeurs magnétiques, et est évidemment indépendante du choix des unités électriques.

CINQUIÈME PARTIE

MESURES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE XXV

GALVANOMÈTRES

I. — *MOUVEMENT D'UN SYSTÈME MOBILE AUTOUR D'UN AXE*

246. Formules générales. — Considérons un système matériel mobile autour d'un axe, et soumis à des forces extérieures, sous l'action desquelles il peut prendre une position d'équilibre stable. Nous supposerons que, lorsqu'il est écarté d'un angle θ de sa position d'équilibre, le moment des forces qui tendent à l'y ramener est proportionnel à l'élongation θ. L'angle θ doit être considéré comme une quantité algébrique, comptée positivement dans un certain sens, négativement dans l'autre ; le moment résultant tend à faire mouvoir le corps de la position θ vers la position o : nous le désignerons par $-\mathrm{C}\theta$, C étant une constante positive. Nous supposerons de plus que, lorsque le système se déplace, il est soumis à des forces d'amortissement, dirigées en sens inverse de la vitesse et proportionnelles à la vitesse ; nous représenterons le moment de ces forces par rapport à l'axe par $-f\frac{d\theta}{dt}$, f étant une constante. Enfin, nous désignerons par I le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation.

L'équation du mouvement s'obtient en égalant à la somme des moments des forces appliquées le moment par rapport à l'axe des forces d'inertie, $\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2}$; on a :

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -f\frac{d\theta}{dt} - \mathrm{C}\theta \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + \mathrm{C}\theta = 0,$$

Cette équation s'applique à un très grand nombre de systèmes mobiles ; dans certains cas, par exemple quand il est produit par la torsion d'un fil ou d'un ressort spiral, le couple directeur est proportionnel à l'élongation θ quelle que soit sa valeur, et l'équation s'applique à des oscillations d'amplitude quelconque. Dans d'autres cas, par exemple quand il est produit par l'action de la pesanteur ou d'un champ magnétique, le couple directeur est

proportionnel à sin θ ; on peut remplacer sin θ par θ à condition que l'élongation reste suffisamment petite ; l'équation différentielle linéaire et les formules qu'on en déduit ne sont valables que pour les petites oscillations. De même, si l'amortissement est dû à la résistance de l'air, et si la vitesse devient trop grande, il peut arriver que la résistance croisse plus vite que la vitesse : les formules ne sont alors valables qu'à condition que les vitesses restent suffisamment faibles.

L'intégrale générale de l'équation différentielle du mouvement contient deux constantes arbitraires : on les déterminera par les conditions initiales, élongation et vitesse angulaire à l'instant $t = 0$. Quant à la forme de cette intégrale, on sait qu'elle dépend de la nature des racines de l'équation caractéristique :

$$Ix^2 + fx + C = 0,$$

et, par conséquent, du signe de la quantité $f^2 - 4IC$ (cf. § 234). Si cette quantité est négative, le mouvement est un **mouvement oscillatoire amorti.** Si elle est positive ou nulle, le mouvement ne présente pas d'oscillations, l'appareil est dit **apériodique** ; le cas où elle est nulle correspond à l'**amortissement critique.**

Dans un appareil de mesures, le système mobile est en outre soumis à un couple qui dépend de la quantité à mesurer, et qui est en général indépendant de l'élongation : dans un galvanomètre, il est proportionnel à l'intensité i du courant à mesurer, et il faut ajouter, au moment des forces appliquées, un terme proportionnel à i, que nous désignerons par ki. L'équation du mouvement devient :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + C\theta = ki.$$

Lorsque l'appareil a atteint sa position d'équilibre, $\theta = \alpha$, on a $\frac{d\theta}{dt} = 0$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, donc $C\alpha = ki$: la déviation α est proportionnelle à l'intensité i, et la sensibilité α / i est égale à k / C. La valeur $\theta = \alpha$ peut être considérée comme une intégrale particulière de l'équation avec second membre ; on obtient son intégrale générale en ajoutant à l'intégrale particulière, $\theta = \alpha$, l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Autrement dit, le *mouvement de l'équipage d'un galvanomètre autour de la position de déviation permanente est le même que le mouvement autour de la position du zéro :* nous nous bornerons donc à l'étude de ce dernier.

247. Mouvement oscillatoire amorti. — On a $f^2 - 4IC < 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes, de la forme $-\lambda \pm \omega\sqrt{-1}$. On a :

$$\lambda = \frac{f}{2I}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{4IC - f^2}}{2I} = \sqrt{\frac{C}{I}\left(1 - \frac{f^2}{4IC}\right)},$$

et l'intégrale générale, qui contient les deux constantes arbitraires θ_0 et φ, est :

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi).$$

Elle est représentée par la courbe I de la figure 308 ; après un temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$, le mouvement se reproduit identique à lui-même, à cela près que toutes les élongations sont multipliées par la quantité $e^{-\lambda T}$. Le mouvement est dit **pseudo-périodique** ; T est la **pseudo-période**, et la quantité $\delta = \lambda T$ est le **décrément logarithmique.**

Il est facile de mesurer T et δ. Il suffit de mesurer l'intervalle de temps MM', qui sépare deux passages consécutifs à la position d'équilibre dans le même sens, pour obtenir T ; il suffit de mesurer en valeur relative deux élongations maxima successives de même sens, θ_n et θ_{n+1}, pour en déduire la valeur de δ, par la relation $\delta = \log \theta_n / \theta_{n+1}$,

Ces mesures permettent de déterminer expérimentalement les rapports C / I et f / 2I. Des formules qui fournissent λ et ω en fonction de I, f et C, on tire :

$$\frac{f}{2I} = \lambda = \frac{\delta}{T} \qquad \text{et} \qquad \frac{C}{I} = \omega^2 + \frac{f^2}{4I^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}\right).$$

Il est souvent possible, dans un appareil, de modifier l'amortissement sans changer le moment d'inertie ni le couple directeur. Si l'on supprime les forces d'amortissement, on a $f = 0$, $\lambda = \delta = 0$, le mouvement est un mouvement sinusoïdal, de période $T_0 = 2\pi\sqrt{I / C}$: on caractérise le plus souvent l'appareil en se donnant la valeur de cette période T_0. La pseudo-période T correspondant au fonctionnement réel de l'appareil est, d'après la dernière des équations écrites :

$$T = T_0\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}}.$$

Si l'amortissement est faible, si, par exemple, le rapport θ_n / θ_{n+1} est inférieur à 2 et δ inférieur par suite à 0,7, $\delta^2 / 4\pi^2$ est inférieur à 0,0125. *La pseudo-période* T *diffère très peu de la période* T_0, et on peut écrire :

$$T = T_0\left(1 + \frac{\delta^2}{8\pi^2}\right).$$

Les mesures seront plus commodes et plus rapides si l'amortissement est plus fort ; il est toutefois avantageux, dans les appareils de précision, de ne pas supprimer entièrement les oscillations : leur existence apporte une garantie dans les mesures, et permet d'affirmer qu'il ne s'est pas produit dans l'appareil de frottements accidentels qui l'aient empêché d'atteindre sa déviation normale. Si l'on veut, par exemple, pouvoir faire la lecture de la déviation au 1/100 de sa valeur après deux oscillations complètes, ou au 1/1.000 après trois oscillations, il suffit de choisir un amortissement tel que l'on ait $\theta_{n+1} / \theta_n = 0{,}1$, et $\delta = 2{,}3$: le rapport $\delta^2 / 4\pi^2$ est voisin de 1/8, et la pseudo-période T n'excède pas la période T_0 de 1/15 de sa valeur.

248. Mouvement apériodique. — On a $f^2 > 4IC$. L'équation caractéristique a deux racines réelles négatives, $-\lambda_1$ et $-\lambda_2$, et l'intégrale générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$\theta = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Elle est représentée par la courbe II de la figure 308.

Si l'on augmente l'amortissement f, sans modifier les valeurs de I et de C, le produit $\lambda_1\lambda_2$, qui est égal à C / I, reste constant, et la différence $\lambda_1 - \lambda_2$, qui est égale à $\frac{\sqrt{f^2 - 4IC}}{I}$, croît : l'un des coefficients, λ_1, est supérieur à la quantité $\lambda_0 = \sqrt{C / I}$ et croît constamment, l'autre, λ_2, est inférieur à λ_0 et décroît. Le terme $e^{-\lambda_2 t}$ diminue toujours moins rapidement

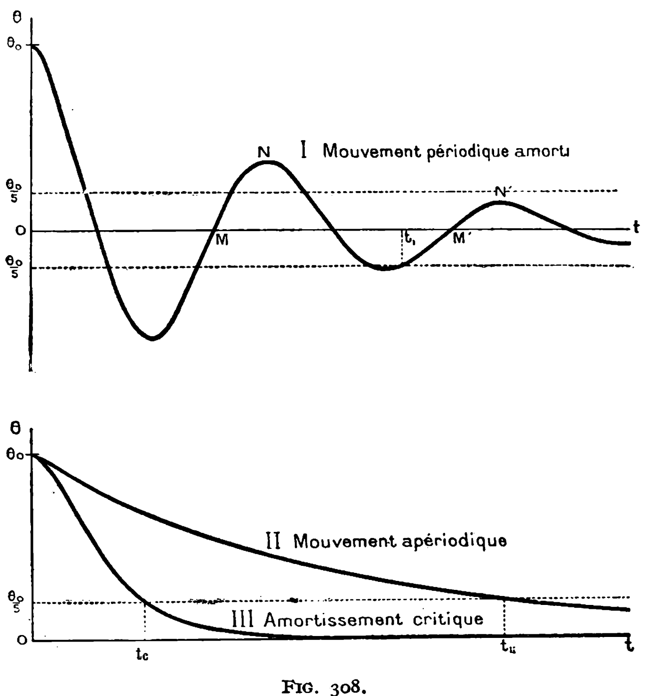


FIG. 308.

avec le temps que l'exponentielle $e^{-\lambda_0 t}$, et il diminue d'autant moins rapidement que l'amortissement est plus fort et λ_2 plus petit. Pour de très grandes valeurs de l'amortissement, λ_2 est presque nul, et l'exponentielle $e^{-\lambda_2 t}$ diminue très lentement : les mouvements du système mobile sont très ralentis, et il met très longtemps à atteindre sa position d'équilibre. Il est préférable de ne pas employer de tels amortissements dans des appareils de mesure : les mesures sont trop longues, et on ne sait jamais si le mouvement est terminé ; des frottements accidentels peuvent empêcher le système d'atteindre sa position d'équilibre, sans qu'on puisse s'en apercevoir.

Si l'amortissement est l'amortissement critique ($f^2 = 4IC$), l'équation caractéristique admet une racine double, $-\lambda_0 = -\sqrt{C / I}$; l'intégrale générale est :

$$\theta = (A + Bt)\, e^{-\lambda_0 t}.$$

Elle est représentée par la courbe III de la figure 308.

Le retour à la position d'équilibre dépend de la décroissance de l'exponentielle $e^{-\lambda_0 t}$; d'après la remarque faite précédemment, il est plus rapide que pour un amortissement supérieur. Il est également plus rapide que pour un amortissement inférieur : dans le mouvement oscillatoire amorti $(f < 2\sqrt{IC})$, le coefficient λ de l'exponentielle $e^{-\lambda t}$ est égal à f / 2I, et inférieur à $\lambda_0 = \sqrt{C / I}$. *Pour une valeur donnée de la période* $T_0 = 2\pi\sqrt{I / C}$, *l'amortissement critique est celui qui donne le retour le plus rapide à la position d'équilibre.* C'est ce que montrent les trois courbes de la figure 308, qui correspondent aux mêmes valeurs de I et de C, et à des valeurs différentes de f, et sur lesquelles on a marqué les instants t_I, t_{II} et t_c auxquels l'élongation est réduite à 1/5 de sa valeur initiale. C'est là la raison pour laquelle on emploie assez souvent l'amortissement critique dans les appareils de mesures courantes.

Étudions, pour cet amortissement, un cas particulier de mouvement. A l'instant $t = 0$, l'équipage mobile est à sa position d'équilibre, et possède une vitesse angulaire ω_0. Déterminons les constantes A et B en écrivant que, pour $t = 0$, on a $\theta = 0$ et $d\theta / dt = \omega_0$. On obtient $A = 0$, $B = \omega_0$, et l'équation du mouvement est :

$$\theta = \omega_0 t e^{-\lambda_0 t}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 (1 - \lambda_0 t) e^{-\lambda_0 t}.$$

Le mouvement est représenté par la courbe de la figure 309. La vitesse angulaire $d\theta/dt$ change de signe à l'instant $t = 1/\lambda_0$; l'élongation est alors

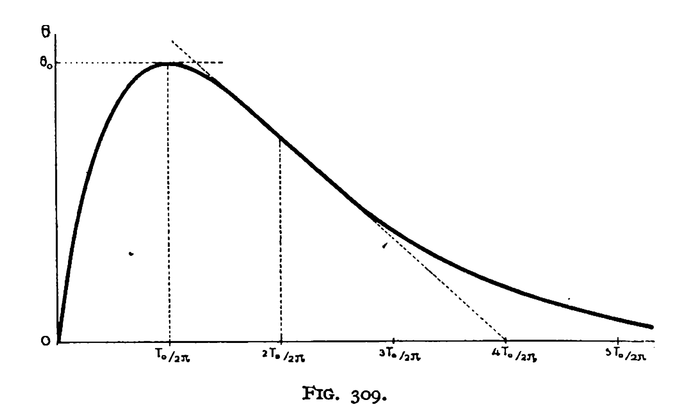


FIG. 309.

maximum, et égale à : $\theta_0 = \omega_0 / \lambda_0 e$. Soit T_0 la période des oscillations de l'équipage mobile lorsque l'amortissement est supprimé. On a :

$$\frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I}{C}} = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Avec l'amortissement critique, l'élongation maximum θ_0 *est atteinte au bout du temps* $\frac{T_0}{2\pi}$ *et est égale à* $\frac{1}{e} \cdot \frac{T_0}{2\pi} \cdot \omega_0$.

Comparons ce résultat à celui qu'on obtiendrait en supprimant complètement l'amortissement. L'équation du mouvement satisfaisant aux conditions initiales données est alors $\theta = \frac{T_0}{2\pi} \omega_0 \sin \frac{2\pi t}{T_0}$: *sans amortissement, l'élongation* ***maximum*** θ'_0 *est atteinte au bout du temps* $t' = \frac{T_0}{4}$ *et sa valeur est* $\theta'_0 = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \omega_0$. Elle est $e = 2{,}72$ fois plus grande que celle qui correspond à l'amortissement critique, et est atteinte au bout d'un temps $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ fois plus long.

II. — *GALVANOMÈTRES A AIMANT MOBILE*

249. Boussole des tangentes. — Nous prendrons, comme type le plus simple du galvanomètre à aimant mobile, la **boussole des tangentes** (*fig.* 310). Le courant dont on veut déterminer l'intensité i traverse un cadre circulaire B de rayon a, comportant N spires, orienté dans le plan du méridien magnétique ; au centre se trouve une aiguille aimantée ns, mobile sur un pivot, dont les rotations peuvent être mesurées par le déplacement d'un index A sur un cadran. Lorsque le cadre n'est parcouru par aucun courant, l'aiguille s'oriente dans la direction de la composante horizontale H du champ magnétique terrestre ; lorsqu'il est parcouru par le courant, il crée au centre un champ Gi proportionnel à l'intensité i, et l'aiguille s'oriente suivant la résultante OP des deux champs H et Gi (*fig.* 311). Elle tourne d'un angle α, donné par :

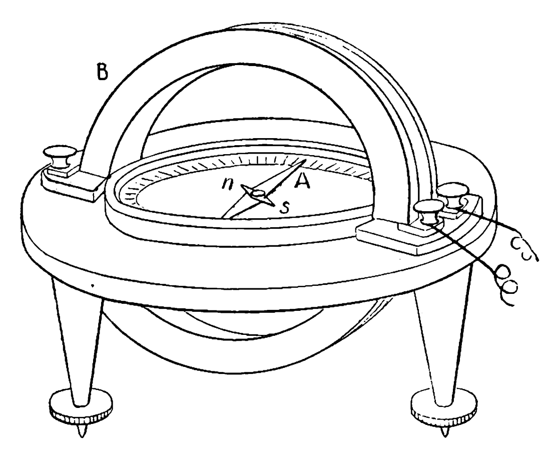


FIG. 310.

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Gi}{H}.$$

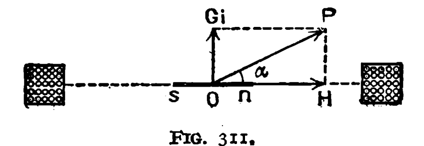


FIG. 311.

L'appareil peut servir à des mesures relatives ; il peut également servir à des mesures absolues en u. é. m. si la composante horizontale H et la constante galvanométrique $G = 2\pi N / a$ sont connues en valeur absolue. Les mesures ne peuvent d'ailleurs jamais être très précises, car il est difficile de lire l'angle α avec précision, et, en ce qui concerne les mesures absolues, il est difficile de connaître H avec une grande précision.

250. Galvanomètre à miroir : sensibilité. — On transforme la boussole des tangentes en un galvanomètre sensible en supprimant le pivot, qui peut toujours introduire des frottements, et en suspendant l'aiguille aimantée à un fil sans torsion, tel qu'un fil de cocon. On mesure les déviations par la méthode optique, au moyen d'un miroir collé sur l'aiguille ; comme on se borne alors à l'observation de faibles déviations, on peut confondre l'angle α avec sa tangente, et prendre pour formule de la déviation $\alpha = Gi / H$.

La **sensibilité du galvanomètre,** $\frac{\alpha}{i}$, est égale à $\frac{G}{H}$, ou $\frac{2\pi N}{aH}$. Il y a intérêt, pour l'augmenter, à diminuer a, c'est-à-dire à laisser au milieu de la bobine un espace vide aussi étroit que possible, dans lequel on place une toute petite aiguille. Il y a intérêt à augmenter N, c'est-à-dire à enrouler sur le cadre plusieurs couches de fil ; il n'y a d'ailleurs pas lieu de les multiplier indéfiniment : l'action d'une spire diminue à mesure que son rayon augmente, et il vient un moment où les avantages qu'on peut retirer de l'addition de nouvelles spires sont plus que compensés par les inconvénients qui résultent de l'augmentation correspondante de la résistance. Enfin il y a avantage à diminuer le champ directeur H : on y parvient en plaçant au-dessus de l'appareil un *aimant correcteur*, qui donne un champ $\vec{H}'$ presque opposé au champ terrestre $\vec{H}$; le champ directeur $\vec{h} = \vec{H} + \vec{H}'$ (*fig.* 312) peut être réduit à une valeur aussi faible qu'on le désire, si l'on règle convenablement la position de l'aimant correcteur. On peut en même temps lui donner une orientation quelconque, ce qui permet de placer le galvanomètre dans une position quelconque par rapport au méridien magnétique.

Il faut bien remarquer qu'en même temps qu'on augmente la sensibilité par la réduction du champ directeur h, on augmente la période des oscillations du galvanomètre. Pour une élongation θ, le couple directeur, dû à l'action du champ h sur un aimant de moment magnétique M, est $Mh \sin \theta$; le couple créé par le champ Gi du courant est $MGi \cos \theta$; pour de petites oscillations, on peut confondre ces expressions avec $Mh\theta$ et MGi : on peut mettre l'équation du mouvement sous la forme générale du paragraphe 246, en prenant $C = Mh$ et $k = MG$. La période est $T_0 = 2\pi \sqrt{I / Mh}$; si, pour des raisons de commodité des lectures, on se donne à l'avance sa valeur, on doit prendre pour champ directeur un champ $h = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \frac{I}{M}$ et la sensibilité est : $\frac{\alpha}{i} = \frac{G}{h} = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{M}{I} \cdot G$. *Lorsqu'on modifie le champ directeur, **la sensibilité** varie proportionnellement au carré de la période.* Le rapport **M/I** doit être aussi grand que possible : il faut prendre des aiguilles courtes, fortement aimantées, et leur donner un volume suffisant pour que le moment d'inertie des organes accessoires, tels que le miroir, soit petit par rapport au leur.

L'inconvénient de la compensation telle que nous venons de la décrire est que les variations accidentelles de la déclinaison peuvent produire des déplacements considérables de la position d'équilibre. Si le champ terrestre passe de la valeur $\vec{H}$ à la valeur $\vec{H}_1$ (*fig.* 312), le champ directeur $\vec{h}$ est rem-

placé par le champ $\vec{h}_1$, et sa direction peut même être assez modifiée pour qu'il en résulte un retournement de l'aiguille. Il est préférable, pour obtenir un zéro stable, de constituer l'équipage mobile par un système astatique *ns*, *n's'* (§ 92), sur lequel l'action du champ terrestre est très faible ; l'aimant correcteur, placé au-dessus de l'appareil, agit inégalement sur les deux aiguilles ; son déplacement permet d'une part d'amener le système dans une position d'équilibre quelconque, d'autre part de faire varier le couple directeur, et, par conséquent, la sensibilité et la période. La bobine galvanométrique doit agir sur une seule des deux aiguilles; on peut augmenter la sensibilité de l'appareil, sans augmenter sa période, en plaçant autour de la seconde aiguille une seconde bobine, disposée de façon que le courant la traverse en sens inverse de la première et que les couples exercés sur les deux bobines soient de même sens (*fig.* 313).

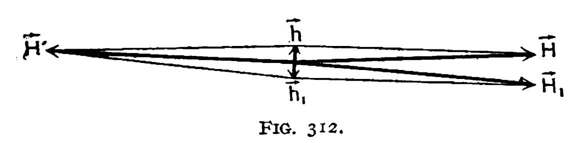


FIG. 312.

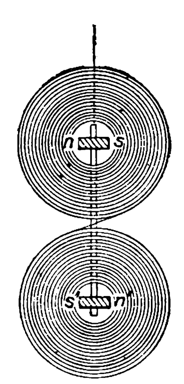


FIG. 313.

251. Galvanomètre de Lord Kelvin (*fig.* 314). — Le galvanomètre de Lord Kelvin (sir William Thomson), qui est à peu près le seul galvanomètre à aimant mobile employé actuellement, tient compte, dans sa construction, des diverses remarques faites au paragraphe précédent. Les aimants sont fixés sur une tige d'aluminium portée par un fil de cocon, d'environ 1 centimètre de longueur ; comme il ne faut pas que leur masse soit faible par rapport à celle du miroir, et que, pour avoir une aimantation forte, il faut leur donner des dimensions transversales petites par rapport à leur longueur (§ 196), on constitue chaque aimant par 4 ou 5 petites aiguilles parallèles, d'environ 8 millimètres de longueur.

L'équipage porte un miroir, dans l'espace vide qui se trouve au centre d'une des bobines, et, au centre de l'autre bobine, une lame mince de mica destinée à augmenter la résistance de l'air et à obtenir un amortissement rapide. L'aimant correcteur NS, qui permet de faire varier la période et la position du zéro, peut être élevé ou abaissé, et peut également tourner autour d'un axe vertical.

Les bobines du galvanomètre sont facilement démontables, et chaque appareil possède une série de bobines interchangeables, qui ont mêmes dimensions et ne diffèrent que par la section du fil qui constitue leur enroulement. Lorsqu'on remplace une bobine B par une bobine B' contenant un fil de section p fois plus petite, et formant par suite p fois plus de spires, on multiplie par p la valeur du champ magnétique créé au centre par un courant d'intensité i, autrement dit on multiplie la sensibilité par p ; en même temps, comme le fil de la bobine B' est p fois plus long et p fois plus fin que celui de la bobine B, on multiplie la résistance par p^2. *Lorsqu'on change les bobines, la sensibilité du galvanomètre varie comme la racine carrée de sa résistance*; on a, c étant une constante. $\alpha / i = c\sqrt{r}$, ou encore $\alpha = c\sqrt{ri^2}$; on peut dire

que, pour un champ directeur et des dimensions de bobines donnés, *la déviation ne dépend que de la puissance ri^2 consommée dans le cadre galvanométrique.*

Le choix des bobines à employer pour une mesure déterminée dépend de la nature de cette mesure. Si le courant est produit par un générateur de f. é. m. e, et si la résistance du générateur et du circuit extérieur est ρ, son intensité est $i = \frac{e}{r + \rho}$. La déviation du galvanomètre est $\alpha = ci\sqrt{r} = \frac{ce}{\sqrt{r} + \frac{\rho}{\sqrt{r}}}$; le dénominateur de cette expression est la somme de deux termes dont le produit est constant; il est minimum, et la déviation est maximum, lorsque ces deux termes sont égaux, c'est-à-dire lorsqu'on a $r = \rho$. *On doit, autant que possible, choisir un galvanomètre dont la résistance soit voisine de la résistance extérieure du circuit.* Si l'on veut mesurer une très faible différence de température à l'aide d'un couple thermo-électrique, dont la résistance est toujours faible, on prendra des bobines peu résistantes, à fil gros et court. Si l'on veut faire des mesures de f. é. m. par la méthode d'opposition, avec un circuit extérieur comprenant des résistances de l'ordre de 10.000 ohms, on prendra des bobines à fil long et fin, ayant une résistance du même ordre.

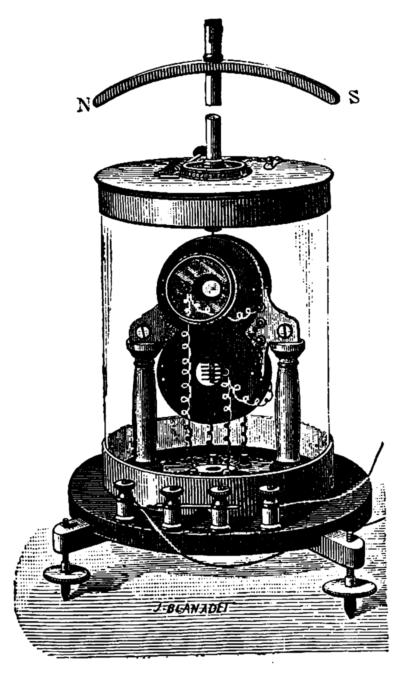


FIG. 314.

Si l'on veut caractériser par un nombre la qualité d'un galvanomètre, il faut tenir compte de ce que l'on peut, par le déplacement de l'aimant correcteur, modifier la sensibilité proportionnellement au carré de la période, et, par le changement des bobines, modifier la sensibilité proportionnellement à la racine carrée de la résistance. On peut, par exemple, convenir de caractériser la sensibilité par le nombre A de divisions dont dévie le spot sur une échelle placée à une distance du miroir égale à 2.000 divisions, quand la période est de 10 secondes, la résistance des bobines de 1 ohm, et le courant de 1 microampère. Pour un courant de i_a ampères, une résistance r ohms des bobines, et une période T_0, la déviation x sera :

$$x = A \cdot 10^6 i_a \cdot \frac{T_0^2}{100} \cdot \sqrt{r}.$$

On peut admettre qu'il est possible, avec une échelle à 2 mètres du miroir,

d'apprécier le 1/10 de millimètre : le plus petit courant mesurable δi_a correspond à $\delta x = 10^{-1}$, et est donné par :

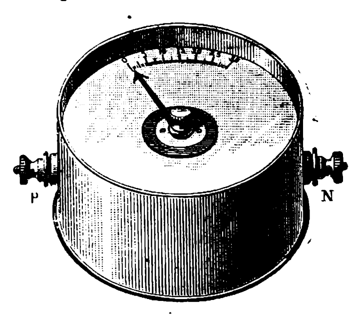
$$\delta i_a = \frac{10^{-5}}{AT_0^2 \sqrt{r}}.$$

On a réalisé des galvanomètres pour lesquels la constante A atteint une valeur de 1.000 et qui comportent des bobines de résistance r = 40.000 ohms ; le plus petit courant observable, avec une période de 10 secondes, est alors :

$$\delta i_a = \frac{10^{-5}}{1\,000 \,.\, 100 \,.\, 200} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-12} \text{ ampère.}$$

Le galvanomètre de Lord Kelvin est un galvanomètre très sensible ; il est particulièrement approprié aux méthodes de zéro, dans lesquelles on a simplement à constater l'existence et le sens d'un courant très faible. Il peut, à la rigueur, être employé à des mesures directes d'intensité, à condition de l'étalonner au préalable avec un courant connu : mais l'étalonnage ne reste valable qu'autant que le champ directeur ne subit pas de modifications.

Pour vérifier l'égalité d'un courant à mesurer i et d'un courant connu i_0, on peut équiper l'appareil en **galvanomètre différentiel** ; les deux courants i et i_0 traversent chacun l'une des bobines, dans un sens tel que leurs actions s'opposent : si les deux bobines et les deux systèmes d'aimants sont identiques, l'appareil reste au zéro lorsque les courants i et i_0 sont égaux. En réalité, cette identité n'est jamais complètement réalisée ; on dispose en série avec le cadre de moindre action une bobine additionnelle de même axe, qu'on peut éloigner ou rapprocher de l'aimant correspondant, et on règle sa position de façon que l'appareil reste au zéro quand tous les enroulements sont traversés par un même courant.



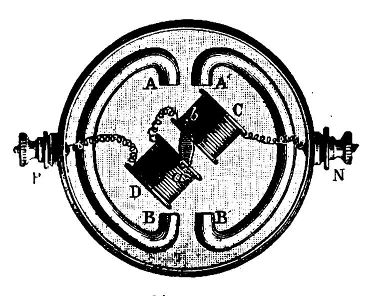


FIG. 315.

252. Ampèremètres et voltmètres à fer mobile. — Les appareils industriels doivent pouvoir être placés dans une position quelconque, et permettre une lecture immédiate de l'intensité du courant. On en a réalisé de multiples modèles ; la figure 315 représente un ampèremètre type Déprez. Le champ directeur, vis-à-vis duquel le champ terrestre est négligeable, est créé par des aimants permanents ABA'B', et l'aimant mobile *ab* est porté par un axe terminé par deux pivots tournant dans des chapes d'agate ; il entraîne une aiguille mobile devant un cadran divisé, sur lequel on lit l'intensité du courant. L'aimant mobile est, en réalité, un barreau de fer doux,

qui s'aimante sous l'influence des champs magnétiques agissants, et s'oriente suivant leur résultante (§ 194). Le système mobile peut porter un amortisseur qui rend son mouvement apériodique, ou presque. Les forces directrices qui agissent sur l'aiguille sont très grandes ; on peut employer pour les ampèremètres de ce type un pivotage peu délicat, et obtenir une grande robustesse jointe à une grande rapidité d'indication.

Dans d'autres appareils, dits **appareils électromagnétiques,** l'aimant directeur est supprimé. Le couple directeur est produit par l'action d'un ressort spiral, et les forces qui produisent la déviation sont celles qui tendent à amener le barreau de fer doux mobile dans la position qui donne la réluctance minimum au circuit magnétique des bobines parcourues par le courant à mesurer. Des dispositifs très variés ont été employés : le ressort R peut par exemple maintenir le barreau *ab* dans une position oblique par rapport aux bobines (*fig.* 316), et le champ du courant tendre à l'orienter suivant leur axe. Pour une position donnée, le moment du couple dû au courant est grossièrement proportionnel au carré de son intensité, et l'équilibre correspond à une déviation sensiblement proportionnelle à i^2. On peut obtenir un mouvement apériodique en adjoignant au système mobile un amortisseur, formé, par exemple, d'une lame d'aluminium qui se déplace à l'intérieur d'une boîte à parois très rapprochées de la lame.

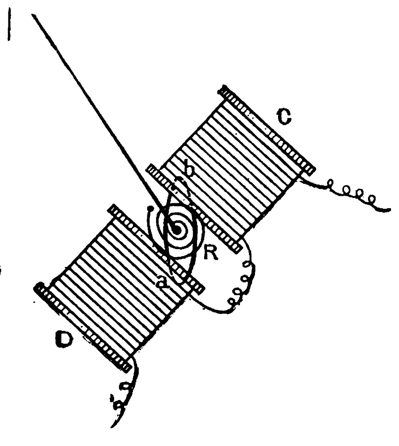


FIG. 316.

Ces appareils sont peu coûteux, robustes, et ne comportent pas d'aimant susceptible de se désaimanter avec le temps ; ils présentent l'avantage de pouvoir être utilisés en courant alternatif. Leur inconvénient est que leurs indications peuvent être affectées par l'hystérésis du fer doux mobile et être différentes en courant continu suivant que l'on fait les mesures avec courant croissant ou avec courant décroissant. Aussi a-t-on pensé pendant longtemps qu'ils ne pouvaient pas être employés à des mesures de précision ; mais on arrive aujourd'hui, par l'emploi d'alliages fer-nickel à faible hystérésis, à une précision de 1 à 2 millièmes de la déviation maximum pour le courant alternatif, de 3 millièmes de la déviation maximum pour le courant continu.

Les appareils électromagnétiques consomment, lorsque la déviation couvre toute l'échelle, une puissance de l'ordre de 2 à 5 watts. Lorsque les bobines d'un ampèremètre de 10 ampères sont parcourues par le courant de 10 ampères, il existe entre leurs bornes une différence de potentiel de l'ordre de 0,25 volt ; lorsque la différence de potentiel de 100 volts est appliquée aux bornes d'un voltmètre de 100 volts, ses bobines sont parcourues par un courant de l'ordre de 0,05 ampère.

Lorsqu'on utilise un appareil électromagnétique en courant alternatif, il faut prendre garde que la self-induction des bobines n'est pas négligeable ; ses effets, ainsi que ceux de l'hystérésis, dépendent de la fréquence du courant alternatif (cf. § 292) ; la déviation n'est pas la même en courant alter-

natif qu'en courant continu, et l'étalonnage doit être fait pour la fréquence même du courant à mesurer. C'est un inconvénient que ne présentent pas les appareils thermiques (§ 149) ; par contre les appareils électromagnétiques ont l'avantage d'être beaucoup plus robustes que les appareils thermiques.

III. — *GALVANOMÈTRES A CADRE MOBILE*

253. Principe et sensibilité. — Dans un champ magnétique uniforme horizontal H, on suspend, entre deux fils de torsion métalliques aa' (*fig.* 317), un cadre plat BB', de surface S, comportant N spires ; les fils aa' servent en même temps à l'amenée du courant. Ils sont disposés de façon que le plan du cadre soit parallèle au champ, lorsqu'il n'est parcouru par aucun courant ; si on le fait tourner d'un angle θ (*fig.* 318), il est soumis à un couple de torsion égal à $-C\theta$. Le flux magnétique qui traverse alors le cadre est $\Phi = NSH \sin\theta$, ou $\Phi = \Phi_0 \sin\theta$, en désignant par Φ_0 le flux qui le traverse lorsqu'il est perpendiculaire au champ ; lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité i, le cadre est soumis à un couple électromagnétique $i\dfrac{d\Phi}{d\theta} = i\Phi_0 \cos\theta$. Pour des élongations θ faibles, on peut prendre $\cos\theta = 1$; la somme des deux couples est $i\,\Phi_0 - C\theta$, et l'appareil est en équilibre pour une déviation α donnée par l'équation :

$$C\alpha = \Phi_0 i.$$

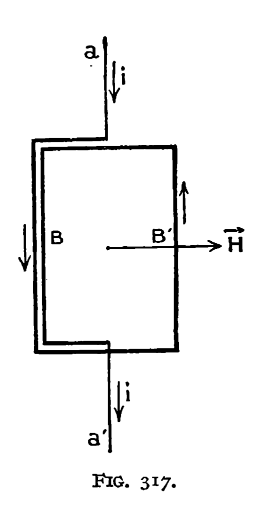


FIG. 317.

La déviation est proportionnelle à l'intensité du courant qui traverse le cadre. Le couple électromagnétique et la déviation changent de sens avec le sens du courant ; la **sensibilité** α / i *est égale à* Φ_0 / C.

La sensibilité est inversement proportionnelle à la constante de torsion C ; on l'augmente en prenant un fil de suspension plus fin ; mais en même temps on augmente la période des oscillations du galvanomètre ; cette période, $T_0 = 2\pi\sqrt{I/C}$ est inversement proportionnelle à $\sqrt{C}$: *la sensibilité varie proportionnellement au carré de la période.*

FIG. 318.

On peut également chercher à augmenter la sensibilité en augmentant le flux $\Phi_0 = NSH$; on ne peut guère y arriver que par l'augmentation du champ magnétique H : en effet, si on augmente la surface S du cadre, on augmente en même temps sa masse et son moment d'inertie I, et on est conduit, pour conserver une valeur acceptable de la période, à augmenter C, de sorte que l'on finit par réduire la sensibilité. Pour la même raison, on ne peut augmenter N qu'en réduisant la section du fil, et en augmentant la résistance du cadre ; un raisonnement identique à celui que nous avons fait à propos du galvanomètre de Lord Kelvin (§ 251) permet de montrer que, lorsqu'on

remplace le cadre par un autre cadre de mêmes dimensions, de même masse et d'enroulement différent, *la déviation reste la même pour une même puissance consommée dans le cadre ; la sensibilité varie comme la racine carrée de la résistance, et on doit, autant que possible, choisir pour chaque mesure un cadre dont la résistance soit voisine de celle du circuit extérieur.*

En réalité, le choix d'un galvanomètre est aussi déterminé par la nécessité d'avoir des mesures aussi rapides que possible en donnant à l'appareil un amortissement voisin de l'amortissement critique (*Cours de Mécanique*, § 286) : nous reviendrons sur la discussion de la sensibilité au paragraphe 255, après avoir étudié l'amortissement.

254. Amortissement. — L'équation du mouvement du cadre, parcouru à l'instant t par un courant d'intensité i, et soumis par conséquent au couple électromagnétique $\Phi_0 i$, est :

$$I \frac{d\theta^2}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C\theta = \Phi_0 i.$$

Mais il faut tenir compte, pour le calcul de i, de la f. é. m. d'induction qui prend naissance dans le cadre, lorsqu'il se déplace dans le champ magnétique de l'aimant. Sa valeur est : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\Phi_0 \cdot \frac{d\theta}{dt}$, et il faut l'ajouter à la f. é. m. extérieure e_0. Si la résistance totale du circuit est R, le courant à mesurer, qui est le courant qui traverse le cadre lorsque l'équilibre est atteint, a pour intensité $i_0 = e_0/R$; sauf dans des cas exceptionnels, la self-induction du cadre est négligeable, et le courant qui le traverse à l'instant t a pour intensité : $i = \frac{e_0 + e}{R} = i_0 - \frac{\Phi_0 d\theta}{R dt}$. En portant cette valeur de i dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(f + \frac{\Phi_0^2}{R}\right) \frac{d\theta}{dt} + C\theta = \Phi_0 i_0.$$

On voit qu'on *peut ne pas faire intervenir explicitement les courants induits, à condition de prendre un coefficient d'amortissement composé de deux termes : l'un, f, caractérise l'amortissement par les frottements de l'air sur le cadre mobile, et est toujours très faible ; l'autre, Φ_0^2 / R, caractérise l'amortissement par les courants induits, et peut être beaucoup plus fort.*

L'amortissement critique sera réalisé si la résistance totale R a une valeur R_c, dite **résistance critique,** donnée par la relation :

$$f + \frac{\Phi_0^2}{R_c} = 2\sqrt{IC}.$$

En général, cette résistance est 2 à 10 fois plus grande que la résistance r du cadre, de sorte qu'il est possible de réaliser un circuit ayant la résistance critique, en donnant à la partie extérieure la résistance $R_c - r$.

On peut remarquer que, si l'on remplace le cadre par un autre cadre de mêmes dimensions, de même masse et d'enroulement différent, les quantités r et Φ_0^2 varient toutes deux comme le carré du nombre de spires (cf. § 251), de sorte que le rapport R_c/r de la résistance critique à la résistance du cadre n'est pas modifié.

Si la résistance totale du circuit est supérieure à R_c, le galvanomètre oscille si elle est inférieure à R_c, son mouvement est apériodique : en particulier, si on met le cadre en court-circuit, on obtient le plus souvent un amortissement très fort, et on observe que le galvanomètre ne revient que très lentement à sa position d'équilibre. L'observation de la nature du mouvement pour différentes valeurs de la résistance extérieure permet de déterminer facilement, après quelques tâtonnements, la valeur de cette résistance qui correspond à l'amortissement critique ; on obtient la résistance critique en ajoutant, à la valeur ainsi déterminée, la résistance du galvanomètre. La meilleure manière de déterminer cette dernière est de la mesurer au pont de Wheatstone comme une résistance ordinaire, en immobilisant le cadre par une cale.

L'étude expérimentale du mouvement du cadre en circuit ouvert permet (§ 247) de déterminer les rapports $f/2I$ et C/I ; la détermination de la sensibilité (§ 253) fournit le rapport Φ_0/C, et, par conséquent, le rapport Φ_0/I.

L'équation qui donne la résistance critique:

$$\frac{f}{2I} + \frac{\Phi_0}{I} \cdot \frac{\Phi_0}{2R_c} = \sqrt{\frac{C}{I}},$$

fournit donc le rapport Φ_0/R_c, et la mesure de R_c permet d'achever le calcul des différentes constantes Φ_0, I, C et f. Il faut naturellement effectuer tous les calculs en unités électromagnétiques, car ces diverses constantes ne peuvent être mesurées qu'en unités C. G. S.

Leur connaissance permet de calculer les caractéristiques du mouvement, et en particulier l'amortissement, correspondant à une résistance quelconque R du circuit. Supposons f négligeable, et la résistance $R > R_c$; on a un mouvement oscillatoire amorti, et le coefficient de l'exponentielle, $\lambda = \Phi_0^2 / 2RI$, est inversement proportionnel à la résistance R. En désignant, comme au paragraphe 248, la valeur correspondant à l'amortissement critique par $\lambda_0 = \frac{\Phi_0^2}{2R_cI} = \sqrt{\frac{C}{I}} = \frac{2\pi}{T_0}$, on a $\lambda = \lambda_0 \frac{R_c}{R} = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{R_c}{R}$; si l'amortissement n'est pas trop considérable, la pseudo-période T diffère peu de la période T_0 (§ 247) : le décrément logarithmique est $\delta = \lambda T = 2\pi R_c R$. Si, par exemple, la résistance totale du circuit est égale à 10 fois la résistance critique, on a $\delta = 0{,}63$: le rapport de deux amplitudes consécutives, $\theta_{n+1} / \theta_n = e^{-\delta}$ est de l'ordre de $1/2$. *Dès que le circuit du galvanomètre est fermé, même sur des résistances relativement grandes, ses oscillations s'amortissent rapidement* ; cette facilité d'amortissement, jointe à la fixité du zéro, rend l'emploi du galvanomètre à cadre mobile beaucoup plus pratique que celui du galvanomètre à aimant mobile.

255. — Construction du galvanomètre à cadre mobile. — Dans le modèle le plus couramment employé — galvanomètre Déprez-d'Arsonval (*fig.* 319) — le champ magnétique est créé par un aimant en fer à cheval ; un cylindre de fer doux, placé à l'intérieur du cadre, augmente sa valeur dans l'entrefer où se meuvent les côtés verticaux du cadre (§ 198). Dans les meilleurs modèles, les pièces polaires de l'aimant ont une forme cylindrique (*fig.* 320) ; comme les lignes de force dans l'air sont normales à la surface du fer, on obtier ainsi dans l'entrefer un *champ radial*, dont l'intensité H est constante dai un secteur assez étendu. Le flux Φ coupé par les côtés verticaux BB′ du cadre es

proportionnel au déplacement θ, pour des angles θ qui peuvent atteindre 45° de part et d'autre de la position d'équilibre. Si les côtés verticaux du cadre ont une longueur l et les côtés horizontaux une longueur d, le flux coupé dans un déplacement $d\theta$ par chacun des côtés verticaux est $Hld. d\theta/2$, et le flux total coupé par le cadre est $d\Phi = NldHd\theta = NSHd\theta$, ou, en posant NSH $= \Phi_0$, $d\Phi = \Phi_0 d\theta$; le couple électromagnétique, $i\, d\Phi/d\theta = \Phi_0 i$, est indépendant de la position du cadre, et les déviations sont proportionnelles aux courants dans tout le secteur où l'intensité H est constante. On les mesure à l'aide d'un miroir fixé au cadre ; deux boutons, placés à la partie supérieure de l'appareil, permettent de régler la tension des fils de suspension, et d'amener le zéro dans la position convenable.

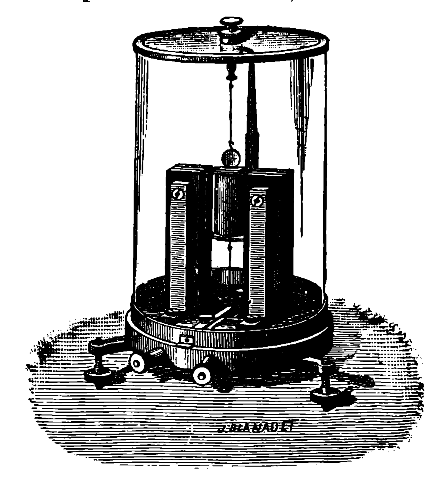


FIG. 319.

Dans les galvanomètres anciens, la surface du cadre est de l'ordre de 15 à 20 centimètres carrés, et sa résistance peut aller de 1 à 1000 ohms. Le champ magnétique dans l'entrefer est de l'ordre de 1000 gauss, et les fils de suspension sont des fils d'argent de quelques centièmes de millimètre de diamètre et de quelques centimètres de longueur. Dans les galvanomètres modernes, on emploie des cadres beaucoup plus étroits : la réduction du moment d'inertie I permet de réduire le couple directeur C sans augmenter la période ; en constituant le circuit magnétique par un aimant en acier spécial (§ 200 *bis*) avec des pièces polaires en fer doux, on arrive facilement à porter le champ dans l'entrefer à 2000 et même 3000 gauss. Au total, malgré la réduction de S, l'augmentation de H et la réduction de C permettent d'augmenter la ***sensibilité en ampères***, $\sigma = \alpha/i = \Phi_0/C$.

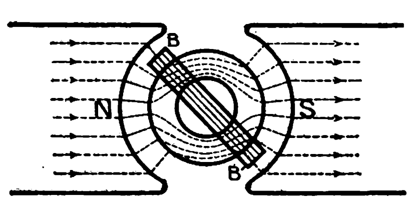


FIG. 320.

Dans la pratique, le galvanomètre est généralement employé pour déceler l'existence dans un circuit de forces électromotrices très faibles : la quantité importante à étudier est la ***sensibilité en volts***, rapport de la déviation α à la f. é. m. u qui existe dans le circuit. Pour que le galvanomètre atteigne rapidement sa position d'équilibre, on est toujours conduit à donner au circuit une résistance égale à la résistance critique R_c, de sorte que le courant est $i = u/R_c$; si l'on suppose f négligeable, on a $R_c = \Phi_0^2/2\sqrt{IC}$, et la sensibilité en volts est :

$$\sigma' = \frac{\alpha}{u} = \frac{\alpha}{R_c i} = \frac{\Phi_0}{C}\,\frac{2\sqrt{IC}}{\Phi_0^2} = \frac{T_0}{\pi\Phi_0}.$$

On voit que, pour une période donnée, on peut avoir avantage à réduire le flux Φ_0. Cela tient à ce que la résistance critique R_c est généralement grande devant la résistance r du cadre ; si la différence $R_c - r$ est plus grande que la résistance propre de la source, on est obligé d'ajouter dans le circuit une résistance additionnelle ; la diminution de Φ_0, qui diminue R_c, permet d'augmenter le courant en réduisant cette résistance. Les galvanomètres modernes comportent généralement un ***shunt magnétique*** réglable qui permet de diminuer Φ_0 lorsqu'on le désire : c'est (*fig.* 321) une lame de fer doux qu'on approche plus ou moins des pièces polaires de l'aimant et qui dérive une partie du flux magnétique en dehors de l'entrefer où se meut le cadre.

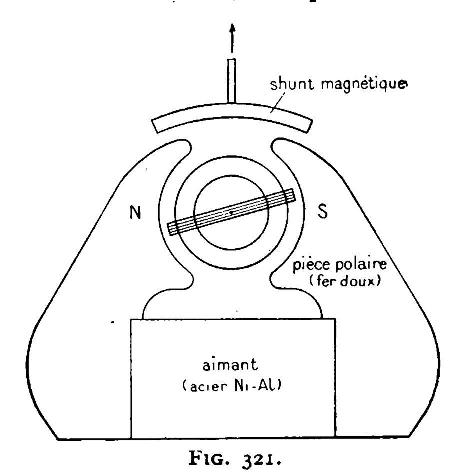


FIG. 321.

Le produit des deux sensibilités $\sigma\sigma'$ est le rapport du carré α^2 de la déviation à la puissance ui mise en jeu : on peut l'appeler la sensibilité en puissance. Son expression est:

$$\sigma\sigma' = \frac{\alpha^2}{ui} = \frac{\Phi_0}{C} \cdot \frac{T_0}{\pi\Phi_0} = \frac{T_0}{\pi C} = \frac{T_0^3}{4\pi^3 I}.$$

Pour une période donnée, elle est d'autant plus grande que le moment d'inertie I de l'équipage mobile est plus petit. C'est pour cette raison que les galvanomètres modernes ont des cadres très étroits, avec des masses de l'ordre du gramme et des rayons de giration ne dépassant pas quelques millimètres : les galvanomètres courants ont des moments d'inertie de l'ordre de 0,2 unité C. G. S., et l'on a construit des équipages dont le moment d'inertie était inférieur à 0,01. Le fait qu'il y a le plus souvent intérêt à réduire la résistance critique, en réduisant Φ_0, permet d'ailleurs de ne pas employer le nombre maximum de spires compatible avec la valeur adoptée pour I, et par suite d'employer un miroir relativement large (8 mm par exemple) donnant des images fines avec un éclairement satisfaisant : dans les galvanomètres modernes, l'inertie du cadre ne représente pas la moitié de l'inertie de l'équipage mobile, tandis que celle du miroir en représente plus de la moitié.

Si l'on prend $I = 0{,}01$ et $T_0 = 10$ secondes, la puissance ui nécessaire pour produire une déviation de 1 mm à 2 mètres ($\alpha = 1/4000$) est :

$$\mathfrak{L} = ui = \frac{4\pi^3 I\alpha^2}{T_0^3} = \frac{4 \cdot 3{,}14^3 \cdot 0{,}01}{4000^2\, 10^3} = 7{,}75 \cdot 10^{-11} \text{ ergs/sec} = 7{,}75 \cdot 10^{-18} \text{ watt.}$$

Avec une résistance critique $R_c = 10.000$ ohms, elle correspond à un courant $i = \sqrt{\mathfrak{L}/R_c} = 2{,}8.10^{-11}$ ampère ; avec une résistance critique $R_c = 10$ ohms, elle correspond à une f. é. m. $u = \sqrt{\mathfrak{L}R_c} = 8{,}8.10^{-9}$ volt.

On remarquera que pour obtenir une période de l'ordre de 10 secondes avec un équipage de moment d'inertie I = 0,01, il faut que le fil de suspension ait une constante de torsion C très faible, de l'ordre de 0,004 dyne-centimètre par radian : on y arrive par l'emploi de fils métalliques plats, d'épaisseur de l'ordre du micron, ou de fils de quartz. Dans ce dernier cas, le courant doit être amené au cadre par des conducteurs indépendants : on les constitue par exemple par de très minces rubans d'or qui n'exercent qu'un couple négligeable.

256. **Ampèremètres et voltmètres à cadre mobile.** — Lorsque les courants à mesurer sont de l'ordre du microampère, on peut rendre l'emploi du galvanomètre à cadre mobile un peu plus commode en le munissant, pour la lecture de la déviation, d'une aiguille d'aluminium, fixée au cadre et se déplaçant devant un cadran divisé. C'est ainsi, par exemple, que sont construits les appareils destinés à la mesure industrielle des températures par les couples thermoélectriques (§ 176).

Lorsque les courants à mesurer atteignent quelques dizaines de microampères, on peut employer un cadre supporté par deux pivots ; on crée le couple directeur par l'action de deux ressorts spiraux *v* en bronze phosphoreux, enroulés en sens inverse, qui servent en même temps à l'amenée du courant. L'aiguille A est équilibrée par un contrepoids *a* (*fig.* 322) et le centre de gravité de l'équipage mobile est amené exactement sur l'axe de rotation ; l'appareil peut alors fonctionner dans n'importe quelle position. On obtient ainsi des appareils de mesures industriels, qui comptent parmi les meilleurs ; ils sont robustes, consomment peu d'énergie, et sont peu sensibles aux champs magnétiques extérieurs ; grâce à l'emploi d'un champ radial, leur déviation est proportionnelle à l'intensité pour des déviations relativement grandes, et les divisions sont équidistantes dans toute l'étendue de la graduation. La plus grande difficulté que doit surmonter le constructeur dans leur fabrication est la réalisation d'un aimant permanent dont l'aimantation ne diminue avec le temps que d'une façon négligeable.

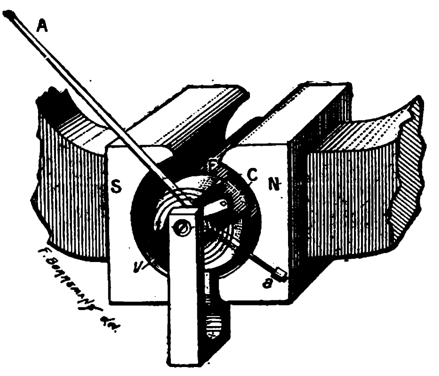


FIG. 322.

Les appareils à cadre mobile sont particulièrement employés comme appareils de contrôle. Comme la précision atteinte dans les mesures dépend essentiellement du mode de lecture, les appareils de contrôle sont munis d'une aiguille dont l'extrémité, formée d'une lame mince verticale, se déplace au-dessus d'une glace : on place l'œil de façon à la voir dans le prolongement de son image. On évite ainsi les erreurs de parallaxe, et on peut déterminer la position de l'aiguille devant la graduation avec une erreur qui est de l'ordre du 1/10 de millimètre ; si la longueur de l'aiguille est de l'ordre du décimètre, et si l'échelle entière correspond à une déviation de 90°, donc à une longueur d'une quinzaine de centimètres, il est possible de mesurer l'intensité d'un courant avec une erreur qui ne dépasse pas le millième de l'intensité maximum que peut mesurer l'appareil

Les appareils industriels à cadre mobile donnent une déviation qui couvre toute l'échelle quand le cadre consomme une puissance de quelques milliwatts. Dans les **ampèremètres**, le cadre a, en général, une résistance de l'ordre d'une dizaine d'ohms, et tourne de 90° pour un courant d'une dizaine de milliampères, correspondant à une différence de potentiel à ses bornes de l'ordre du dixième de volt ; dans les ampèremètres destinés à la mesure des intensités supérieures, le cadre mobile est placé en dérivation sur un shunt. Dans les **voltmètres**, la résistance du cadre est de l'ordre de 100 ohms, et il tourne de 90° quand on établit entre ses bornes une différence de potentiel de 0,5 volt, correspondant à un courant de l'ordre de 5 milliampères ; les voltmètres destinés à la mesure des différences de potentiel supérieures comprennent une résistance additionnelle placée en série avec le cadre. Le shunt ou la résistance additionnelle sont, en général, disposés à l'intérieur du boîtier de l'appareil.

Dans la plupart des ampèremètres, la résistance du shunt est très inférieure à celle du cadre : le shunt et le cadre constituent un circuit dont la résistance est inférieure à la résistance critique, et l'appareil est apériodique. On peut très facilement rendre apériodique un voltmètre quelconque, en enroulant le circuit du cadre mobile sur une carcasse en cuivre ou en aluminium : l'amortissement est alors produit par les courants induits qui circulent dans cette carcasse.

257. Électrodynamomètres et Wattmètres. — Ces appareils comportent un cadre mobile, parcouru par un courant d'intensité i, et soumis à l'action d'un champ magnétique H créé par une bobine sans fer parcourue par un courant d'intensité i': le couple qui agit sur le cadre, pour une position donnée de l'équipage mobile, est proportionnel au produit iH, c'est-à-dire, puisque H est proportionnel à i', au produit ii'. On peut le mesurer, et mesurer par suite directement le produit ii', en l'équilibrant par un couple mécanique connu, couple de pesanteur ou couple de torsion. Dans les appareils industriels, le cadre mobile, porté par des pivots, entraîne une aiguille qui se déplace devant un cadran divisé ; on dispose les circuits de façon que la valeur du couple électromagnétique dépende peu de la déviation, dans les limites d'emploi de l'appareil, et on crée le couple directeur par un ressort spiral. Dans ces conditions, la déviation est sensiblement proportionnelle au produit ii' ; il est d'ailleurs facile d'étalonner l'appareil.

Les deux circuits peuvent être disposés en série, et être parcourus par le même courant ; on a $i' = i$, le couple est proportionnel au carré i^2 de l'intensité. La déviation est indépendante du sens du courant, et peut servir à mesurer l'intensité efficace d'un courant alternatif. Ces appareils, qu'on appelle **ampèremètres électrodynamiques**, sont les meilleurs en courant alternatif ; leur seul inconvénient est que leur consommation, qui peut atteindre 10 watts, est un peu forte.

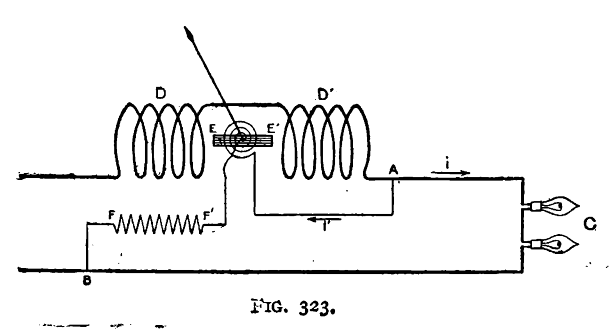


FIG. 323.

Les **wattmètres** sont destinés à mesurer la puissance dépensée dans un circuit C

(*fig.* 323), $\mathcal{P} = (V_A - V_B)i$. Les bobines DD′ qui créent le champ sont constituées par un gros fil parcouru par le courant i ; le cadre mobile à fil fin EE′ et sa résistance additionnelle FF′ sont placés en dérivation entre les bornes AB du circuit C : ils sont parcourus par un courant i' proportionnel à la différence de potentiel $V_A - V_B$. Le couple qui s'exerce sur le cadre, proportionnel au produit ii', est par suite proportionnel à la puissance $\mathcal{P} = (V_A - V_B)i$, et la graduation est faite de façon à donner directement $\mathcal{P}$. Il est d'ailleurs facile de réduire la sensibilité du wattmètre dans un rapport connu, en augmentant la résistance additionnelle FF′, ou en shuntant les bobines DD′. On remarquera que l'intensité du courant qui traverse les bobines DD′ est en réalité $i + i'$: mais la résistance EF′ est toujours assez grande pour que, dans la pratique, i' soit négligeable vis-à-vis de i.

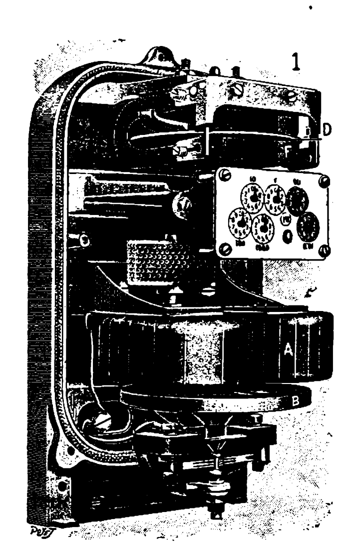


FIG. 324.

Nous pouvons rattacher au wattmètre le **compteur Elihu Thomson** (*fig.* 324), employé pour mesurer l'énergie consommée dans le circuit C, $W = \int (V_A - V_B)\, i\, dt$. Le cadre mobile EE′ et ses ressorts spiraux sont supprimés, et remplacés par un circuit susceptible d'une rotation continue, analogue à un induit de dynamo sans fer, avec son collecteur. Le système mobile comprend, en outre, un disque de cuivre D, placé entre les branches d'un aimant en fer à cheval, et soumis, par suite des courants de Foucault qui s'y développent, à un couple d'amortissement proportionnel à la vitesse angulaire $d\theta / dt$. La vitesse de rotation devient uniforme quand ce couple équilibre le couple électromagnétique, lui-même proportionnel à $(V_A - V_B)i$. On a, à chaque instant, $\frac{d\theta}{dt} = k\,(V_A - V_B)i$, et l'angle de rotation $\theta = \int \frac{d\theta}{dt}\, dt$ est proportionnel à l'énergie consommée W. Chaque appareil doit naturellement être étalonné ; dans un modèle courant, 1 tour du disque correspond à une énergie consommée de 2,5 watts-heure, c'est-à-dire $2{,}5 \times 3.600 = 9.000$ joules. Le disque entraîne, par un rouage, un système d'aiguilles qui se déplacent sur des cadrans divisés et permettent la lecture directe, en hectowatts-heure, de l'énergie consommée.

IV. — *GALVANOMÈTRE BALISTIQUE*

258. Principe et sensibilité. — On se propose de mesurer avec un galvanomètre la quantité d'électricité q qui traverse, dans un temps très court, un circuit où l'on intercale cet appareil. Ce sera, par exemple, la charge d'un condensateur, dont on réunit les deux armatures à travers le galvanomètre,

ou bien encore la quantité d'électricité induite dans une bobine qu'on fait sortir brusquement du champ magnétique d'un électro-aimant.

L'équation du mouvement d'un galvanomètre, parcouru à l'instant t par un courant d'intensité i, peut toujours être mise sous la forme :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + C\theta = ki.$$

Seules les significations des constantes F, C et k diffèrent suivant qu'il s'agit d'un galvanomètre à aimant mobile ou d'un galvanomètre à cadre mobile.

Nous supposerons que la quantité d'électricité q traverse le galvanomètre entre les instants o et τ ; on a :

$$I \int_0^\tau \frac{d^2\theta}{dt^2}\, dt + F \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt}\, dt + C \int_0^\tau \theta\, dt = k \int_0^\tau i\, dt = kq.$$

Nous supposons l'appareil partant du repos, et le temps τ assez court pour qu'il n'ait pas le temps de se déplacer d'une façon appréciable ; entre les instants o et τ, on a constamment $\theta = 0$. A l'instant o, on a $d\theta / dt = 0$; à l'instant τ, on a $d\theta / dt = \omega_0$.

On a :

$$\int_0^\tau \frac{d^2\theta}{dt^2}\, dt = \left[\frac{d\theta}{dt}\right]_0^\tau = \omega_0, \qquad \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt}\, dt = \Big[\theta\Big]_0^\tau = 0, \qquad \int_0^\tau \theta\, dt = 0 ;$$

d'où :

$$I\omega_0 = kq.$$

A l'instant τ le galvanomètre est lancé, à partir de la position o, avec une vitesse initiale ω_0. L'élongation maximum atteinte est proportionnelle à ω_0, avec un coefficient numérique qui dépend de la période et de l'amortissement. Nous avons donné, au paragraphe 248, les formules qui permettent de calculer sa valeur θ_0 pour l'amortissement critique et sa valeur θ'_0 pour un amortissement nul :

$$\theta_0 = \frac{1}{e} \frac{T_0}{2\pi} \omega_0, \qquad \theta'_0 = \frac{T_0}{2\pi} \omega_0 = e\theta_0.$$

Comme ω_0 est proportionnel à q, *l'élongation maximum est, dans chaque cas, proportionnelle à la quantité d'électricité qui a traversé le galvanomètre.* Le rapport ω_0/q est égal à k/I ; on peut exprimer I à l'aide de la période, $T_0 = 2\pi\sqrt{I/C}$, et k à l'aide de la sensibilité aux courants continus : pour un courant permanent i_0, la déviation α s'obtient en faisant dans l'équation du mouvement $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} = 0$; on a $C\alpha = ki_0$. On obtient finalement :

$$\omega_0 = \frac{C\alpha}{i_0} \frac{4\pi^2}{T_0^2 C} q = \frac{\alpha}{i_0} \frac{4\pi^2}{T_0^2} q ;$$

$$\frac{\theta_0}{q} = \frac{1}{e} \frac{2\pi}{T_0} \frac{\alpha}{i_0}, \qquad \frac{\theta'_0}{q} = \frac{2\pi}{T_0} \frac{\alpha}{i_0}.$$

Ces formules permettent, dans les deux cas particuliers considérés, de calculer la sensibilité du galvanomètre employé comme balistique à partir de sa sensibilité aux courants continus. Elles établissent une relation entre les nombres θ_0 / α ou θ'_0 / α, et $q / i_0 T_0$; chacun de ces nombres est le rapport de deux grandeurs de même espèce, et on peut faire les calculs en employant des unités quelconques : divisions de l'échelle pour les déviations θ et α, coulombs ou micro-coulombs pour les quantités d'électricité q et $i_0 T_0$.

Si l'on veut au contraire calculer la sensibilité du balistique à partir de ses constantes de construction, il est nécessaire d'exprimer les déviations en radians et les quantités d'électricité en u. é. m. En rétablissant dans les dernières formules les valeurs du rapport $\alpha / i_0 = k / C$, et de la pulsation $2\pi / T_0 = \sqrt{C / I}$, on a :

$$\theta_0 = \frac{1}{e} \frac{k}{\sqrt{IC}} q. \qquad \theta'_0 = \frac{k}{\sqrt{IC}} q.$$

259. Emploi du galvanomètre à cadre mobile. — Dans le galvanomètre à aimant mobile, on doit prendre comme valeurs des coefficients $C = MH$, $k = MG$; les courants induits par le mouvement de l'aimant dans le cadre sont en général très faibles, et F est une constante qui dépend peu de la résistance du circuit. Dans le galvanomètre à cadre mobile au contraire, l'amortissement dépend presque uniquement de cette résistance ; le coefficient k a pour valeur Φ_0 et le coefficient F peut, en général, être confondu avec Φ_0^2 / R ; la déviation maximum ne reste proportionnelle à la quantité d'électricité q qu'autant qu'on ne modifie pas le circuit. Si l'on mesure la charge d'un condensateur, le galvanomètre est en circuit ouvert, et l'on peut, en première approximation, confondre θ avec θ'_0 ; si l'on mesure la quantité d'électricité induite dans une bobine, on donnera au circuit une résistance égale à la résistance critique, et on emploiera la formule qui donne θ_0. Il est d'ailleurs préférable d'étalonner directement, dans chaque cas, le galvanomètre balistique, et de ne l'employer qu'à la mesure du rapport de deux charges par la mesure du rapport de deux élongations.

La proportionnalité de la déviation à la quantité d'électricité n'est réalisée qu'autant que le cadre ne s'est pas déplacé pendant la durée τ de la décharge : il est nécessaire que τ soit petit par rapport à la période T_0. On peut employer comme balistique un galvanomètre quelconque ; mais, si la décharge dure un temps appréciable, par exemple si l'on mesure les courants induits dans une bobine qui sort du champ d'un électro, on sera obligé, à moins qu'elle n'en sorte très vite, d'allonger la période propre du galvanomètre ; on rendra en même temps son mouvement plus lent, et son élongation maximum plus facile à observer.

Pour réaliser l'augmentation de la période, on peut surcharger le cadre par des petites masses de plomb, de façon à augmenter son moment d'inertie I : ce n'est là qu'un expédient, et les dernières formules du paragraphe précédent montrent qu'il a l'inconvénient de diminuer la sensibilité θ / q.

Dans certains instruments construits spécialement pour être employés comme balistiques, on a augmenté le moment d'inertie en augmentant la largeur du cadre : c'est là une solution moins mauvaise, car on compense en partie la

réduction de sensibilité due à l'augmentation de I par une augmentation de sensibilité due à l'augmentation du coefficient $k = \Phi_0 = NSH$. Mais il vaut mieux augmenter simultanément la période et la sensibilité en réduisant le couple directeur C par l'emploi d'un fil de torsion plus fin ; le calcul montre qu'il y a avantage, pour pouvoir prendre un fil de torsion aussi fin que possible, à réduire le poids du cadre en réduisant sa largeur.

Les galvanomètres balistiques ainsi construits ne réalisent pas le maximum de sensibilité pour les courants continus que peut réaliser un galvanomètre à cadre mobile ; la période T_0 étant de l'ordre d'une vingtaine de secondes, le rapport θ/q est toujours inférieur au rapport α/i ; enfin, il est impossible d'évaluer l'élongation maximum atteinte au cours du mouvement avec la même précision qu'une déviation permanente. Aussi ne peut-on guère apprécier au balistique de quantités d'électricité inférieures à 10^{-8} coulombs.

Nous avons déjà signalé, au paragraphe 235, que, lorsqu'on shunte un galvanomètre balistique, la quantité d'électricité qui traverse le circuit se partage entre le galvanomètre et le shunt suivant la même loi qu'un courant continu. Le raisonnement suppose essentiellement que le flux magnétique envoyé par l'aimant à travers le cadre ne varie pas, c'est-à-dire que le cadre ne se déplace pas pendant toute la décharge. Il est possible de shunter un balistique, à condition de tenir compte de la modification apportée à l'amortissement par la présence du shunt, en étalonnant l'appareil dans les conditions mêmes d'emploi ; il est préférable de ne pas le faire pour des mesures de précision.

260. Fluxmètre. — Le **fluxmètre** (*fig.* 326) est un galvanomètre à cadre mobile à champ radial dans lequel on a supprimé le couple directeur. Le cadre est supporté par deux pivots ; son centre de gravité se trouve sur l'axe de rotation, et le courant y est amené par deux rubans très minces d'argent recuit, dont la torsion est négligeable. Lorsque le cadre n'est parcouru par aucun courant, il peut être en équilibre dans une position quelconque; l'appareil contient un dispositif de remise au zéro par une fourchette. La position du cadre est repérée par le déplacement d'une aiguille sur un cadran divisé, qui comprend généralement, de part et d'autre du zéro, 100 divisions correspondant à un angle d'environ 40° ; il est muni d'une glace, et l'extrémité de l'aiguille est assez fine pour qu'on puisse évaluer le 1/10 de division.

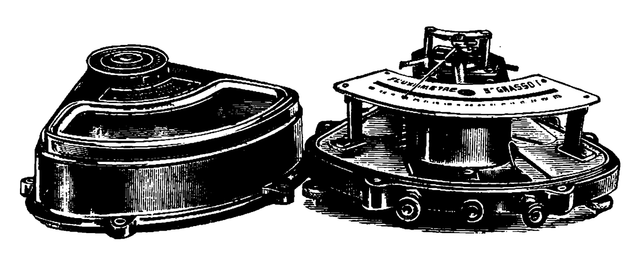


FIG. 326.

Soit R la résistance totale du circuit du fluxmètre, et e_0 la f. é. m. extérieure à l'instant t ; l'équation du mouvement s'obtient en faisant $C = 0$ dans l'équation du paragraphe 254 :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(f + \frac{\Phi_0^2}{R}\right)\frac{d\theta}{dt} = \Phi_0\frac{e_0}{R}.$$

L'appareil sert à mesurer les champs magnétiques par la méthode habituelle. Le circuit extérieur comprend une bobine de surface connue, placée dans le champ à mesurer : à l'instant 0, elle est traversée par le flux φ, et le fluxmètre est en équilibre à la division θ_0 ; à l'instant t_1, on fait sortir la bobine du champ, le fluxmètre dévie sous l'action du courant produit par la f. é. m. $e_0 = - d\varphi / dt$; à partir de l'instant t_2, la bobine est traversée par un flux constant et nul, elle n'est le siège d'aucune f. é. m., et le fluxmètre s'arrête par l'action des courants induits dans le cadre ; à l'instant τ, il est à nouveau en équilibre à la division θ_1. On a :

$$I \int_0^\tau \frac{d^2\theta}{dt^2}\, dt + \left(f + \frac{\Phi_0^2}{R}\right) \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt}\, dt = - \frac{\Phi_0}{R} \int_0^\tau \frac{d\varphi}{dt}\, dt ;$$

$$\int_0^\tau \frac{d^2\theta}{dt^2}\, dt = \left[\frac{d\theta}{dt}\right]_0^\tau = 0, \qquad \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt}\, dt = \left[\theta\right]_0^\tau = \theta_1 - \theta_0, \qquad \int_0^\tau \frac{d\varphi}{dt}\, dt = \left[\varphi\right]_0^\tau = -\varphi ;$$

d'où :

$$\left(f + \frac{\Phi_0^2}{R}\right)(\theta_1 - \theta_0) = \frac{\Phi_0}{R}\varphi.$$

La déviation $\theta_1 - \theta_0$ est proportionnelle à la variation du flux φ, quelle que soit la durée $t_2 - t_1$ de cette variation. Dans les conditions usuelles d'emploi, la résistance R est assez faible pour que l'amortissement soit très rapide : le fluxmètre s'arrête après un temps $\tau - t_2$ de l'ordre de quelques dixièmes de seconde. D'autre part, le coefficient f est très petit vis-à-vis de Φ_0^2 / R, et on peut écrire :

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{\varphi}{\Phi_0}.$$

On peut dire que cette formule traduit directement la loi de Lenz : avec les hypothèses faites, qui reviennent à négliger toutes les forces mécaniques qui agissent sur lui, le cadre se déplace de façon que la variation $\Phi_0 (\theta_1 - \theta_0)$ du flux qui le traverse compense exactement la diminution φ du flux qui traverse la partie extérieure du circuit.

La déviation mesure directement le flux φ, avec un coefficient de proportionnalité à peu près indépendant de la résistance : le fluxmètre est étalonné directement en flux. Si, par exemple, une division vaut 1/150 de radian et si le flux Φ_0 est de $1{,}5 . 10^6$ (par exemple $H = 10^3$, $N = 75$, $S = 20$), chaque division correspond à une variation de flux de 10.000 maxwells.

Le fluxmètre est un instrument d'emploi facile ; ses indications sont indépendantes de la durée de la décharge ; les lectures à faire correspondent à des positions d'équilibre ; il permet de mesurer un champ magnétique avec une précision de l'ordre de 1/200 ou même de 1/500.

CHAPITRE XXVI

MESURES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ABSOLUES

I. — *GÉNÉRALITÉS SUR LES MESURES ÉLECTRIQUES*

261. Classification des méthodes de mesure. — Les unités électromagnétiques ont été définies à partir des unités fondamentales du système C. G. S. La mesure d'une grandeur électrique dans le système électromagnétique C. G. S. peut être obtenue par une expérience dans laquelle on mesure uniquement des grandeurs mécaniques, longueurs, masses, temps, ou forces : une telle mesure est dite une **mesure absolue.**

Mais, dans la plupart des cas, on dispose d'un étalon, et la mesure d'une grandeur se réduit à la détermination du rapport de deux grandeurs de même espèce, la grandeur à mesurer et l'étalon connu. C'est ainsi qu'on mesure une résistance en la comparant à une résistance étalon, une f. é. m. en la comparant à celle d'une pile étalon. De telles mesures sont dites des **mesures relatives.**

Les méthodes de mesures relatives les plus simples sont celles dans lesquelles le rapport des deux grandeurs à mesurer est donné directement par le rapport des lectures faites sur un même appareil : c'est ainsi qu'on peut mesurer le rapport des intensités de deux courants par la mesure du rapport des déviations d'un galvanomètre. Ces méthodes sont dites des **méthodes de déviation** ; elles permettent d'obtenir la valeur de la grandeur à mesurer par une simple lecture, si l'on a déterminé une fois pour toutes le coefficient de proportionnalité entre cette valeur et celle de la déviation. Ce sont les seules méthodes employées pour les mesures industrielles; les déviations sont, en général, repérées par le déplacement d'une aiguille devant une graduation faite à l'aide d'un étalonnage préalable, qui donne directement la valeur de la grandeur à mesurer : c'est ainsi, par exemple, que sont établis les ampèremètres.

Les méthodes de déviation sont également employées dans les *appareils enregistreurs*. Dans les appareils industriels, l'aiguille porte une plume qui inscrit ses déviations sur une feuille de papier qu'un mouvement d'horlogerie déroule devant elle. Dans les appareils de laboratoire, on peut réduire les frottements en remplaçant la plume par un style qui inscrit les déviations sur une bande de papier enfumé ; dans les appareils très sensibles, on les supprime entièrement en employant un enregistrement photographique : le miroir fixé à l'équipage mobile donne, d'un point lumineux fixe, une image mobile, dont on enregistre les déplacements sur une pellicule ou une bande

de papier photographique que déroule un mécanisme mû par un ressort ou un moteur.

Les appareils industriels ordinaires donnent une précision de l'ordre du centième ; les appareils de contrôle, lorsqu'ils sont soigneusement étalonnés, permettent d'atteindre le millième. Mais l'emploi des méthodes de déviation devient d'autant plus difficile que l'on désire une plus grande précision. En général, la déviation n'est qu'approximativement proportionnelle à la grandeur à mesurer, et le coefficient de proportionnalité peut varier avec le temps; par exemple, dans un galvanomètre à aimant mobile, c'est la tangente de la déviation qui est proportionnelle à l'intensité du courant, le déplacement de l'aimant amène ses pôles en des points où le champ n'a plus la même valeur, le champ directeur peut subir des modifications. Les corrections à faire se multiplient à mesure qu'on cherche à augmenter la précision ; en même temps la mesure géométrique de la déviation devient plus délicate.

On s'affranchit de toutes ces difficultés en employant des **méthodes de zéro** : l'appareil à étudier, l'appareil étalon et l'appareil de mesure sont disposés de telle sorte que l'expérience consiste à ramener l'appareil de mesure au zéro : on n'a plus besoin de connaître les lois de sa déviation, et la seule qualité qu'on lui demande est d'être sensible. Dans la plupart des cas, c'est un galvanomètre, et on le ramène au zéro en modifiant des résistances : le rapport de la grandeur à déterminer à la grandeur de même espèce prise comme étalon est donné par le rapport de deux des résistances employées.

Citons comme exemple les méthodes de mesure d'une force électromotrice. On peut employer une méthode de déviation, en réunissant les deux pôles du générateur à étudier aux deux bornes d'un voltmètre : c'est la méthode que l'on emploie dans la pratique courante. Mais, si l'on veut connaître avec précision la valeur de la f. é. m., on la compare à celle d'une pile étalon Weston par une méthode de zéro, qui est la méthode d'opposition (§ 156) : on peut prendre un galvanomètre très sensible, sans être limité par la nécessité de ne pas sortir de l'échelle lorsqu'on réunit ses bornes aux pôles du générateur, et, en fait, la précision des mesures n'est limitée que par la précision avec laquelle sont définies les f. é. m. à comparer.

262. Récapitulation des principales méthodes de mesures relatives. — Nous avons décrit les principales méthodes de mesures relatives lors de l'étude des différentes lois dont elles sont l'application. Nous allons en donner ici un bref tableau d'ensemble.

Les plus importantes parmi les grandeurs électriques sont les résistances, les forces électromotrices et les intensités de courant. Au point de vue des mesures de précision, les mesures fondamentales sont les **mesures de résistances,** puisque, dans l'application de la plupart des méthodes de zéro, les rapports cherchés sont donnés par des rapports de résistances. Les résistances se comparent entre elles avec une très grande précision par le pont de Wheatstone (§ 142) ; il permet d'obtenir la valeur d'une résistance quelconque lorsqu'on dispose d'une boîte de résistances étalonnées. L'étalonnage d'une telle boîte peut se faire, grâce à la possibilité de vérifier l'égalité de deux résistances en les substituant l'une à l'autre dans une même branche du pont, et à la possibilité de constituer, en mettant deux résistances en série, une résistance égale à leur somme : à partir d'un ohm étalon, on étalonne de proche

en proche des résistances de 1 ohm, 2 ohms (1 + 1), 5 ohms (2 + 2 + 1), etc.

La **mesure des forces électromotrices ou des différences de potentiel** se fait par la méthode d'opposition (§ 156). La **mesure d'une intensité de courant,** par rapport à l'intensité étalon définie légalement sous le nom d'ampère international (§ 134), se fait par une expérience d'électrolyse. Il peut être plus commode, si l'on dispose d'une résistance étalon construite de façon que le passage du courant ne modifie pas sa valeur par échauffement, de remplacer la mesure de l'intensité par la mesure de la différence de potentiel à ses bornes ; on effectue cette mesure par la méthode d'opposition, et on en déduit l'intensité par la loi d'Ohm, $i = V / r$.

Si maintenant on se place au point de vue industriel, la mesure fondamentale est celle des intensités de courant, qu'on effectue par une méthode de déviation, à l'aide d'un ampèremètre (chap. XXV). La mesure d'une force électromotrice à l'aide d'un voltmètre (§ 136) est la mesure de l'intensité du courant qu'elle produit dans une résistance connue. La mesure d'une résistance résulte de la mesure simultanée, à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre, de la différence de potentiel qui existe entre ses bornes et de l'intensité du courant qui la parcourt.

Rappelons aussi qu'on peut employer comme instruments de mesure les électromètres. Les voltmètres électrostatiques sont employés industriellement à la mesure des différences de potentiel élevées ; les divers électromètres peuvent être employés à la mesure des f. é. m. par une méthode de déviation, ou par une méthode de zéro en utilisant le montage d'opposition habituel. Leur sensibilité est d'ailleurs inférieure à celle des galvanomètres : l'électromètre à quadrants peut être sensible au millième de volt, tandis qu'un galvanomètre Déprez-d'Arsonval très ordinaire, avec un cadre de 1.000 ohms, est sensible à 10^{-8} ampère, et permet de déceler une différence de potentiel entre ses bornes égale à 10^{-5} volt. On n'emploiera l'électromètre que si l'on a à mesurer la f. é. m. d'une pile très rapidement polarisable, et si l'on veut être absolument certain qu'elle ne débite aucun courant. L'emploi des électromètres à des mesures d'intensité de courant (§ 87), par des méthodes de déviation ou des méthodes de zéro, permet, au contraire, de mesurer des courants auxquels les galvanomètres ne sont pas sensibles et de déceler des intensités de l'ordre de 10^{-15} ampère ; ces mesures électrométriques sont les mesures fondamentales de l'étude des courants dans les gaz (cf. § 364). De même, les électromètres peuvent servir à la mesure d'une grande résistance R, par la mesure, par exemple, de la constante de temps $\tau = CR$ (§ 234) qui caractérise la décroissance du potentiel d'un condensateur qu'on décharge à travers cette résistance.

En ce qui concerne les mesures de grandeurs autres que les résistances les f. é. m. et les intensités de courant, rappelons qu'on mesure une **puissance** par le wattmètre, une **énergie** par le compteur Elihu Thomson (§ 257). L'emploi du pont de Wheatstone en courant alternatif, avec un téléphone comme appareil de mesure, permet de déterminer, à l'aide de résistances étalonnées, le rapport de deux **self-inductances** (§ 236) ou le rapport de deux **capacités** (§ 85); il permet également de comparer une self-inductance à une capacité (§ 300). Les **quantités d'électricité** peuvent être mesurées à l'aide d'un galvanomètre balistique (§ 258) : cet appareil permet de déterminer le rapport des **capacités** de deux condensateurs par le rapport de leurs charges, ou le rapport

de deux **champs magnétiques** par le rapport des décharges induites dans une même bobine (§ 223); cette dernière mesure s'effectue d'ailleurs plus commodément à l'aide d'un fluxmètre (§ 260).

263. Mesures absolues. — On sait qu'on peut réaliser la mesure absolue de certaines grandeurs — différences de potentiel et capacités — en unités électrostatiques C. G. S. Mais il faut bien remarquer que *la mesure d'une grandeur en unités électrostatiques ne peut nous fournir sa mesure en unités électromagnétiques que si nous connaissons le rapport des unités électromagnétiques et électrostatiques C. G. S. correspondantes.* En fait, il n'y a guère que pour les capacités qu'on ait avantage à réaliser, par l'emploi de condensateurs calculables, les mesures absolues en u. é. s., et à multiplier les nombres obtenus par le rapport des unités de capacité. Nous étudierons dans le prochain chapitre les méthodes employées à la détermination du rapport des unités et les résultats obtenus ; nous nous bornerons ici aux mesures absolues faites directement en unités électromagnétiques.

Il est inutile de comparer directement aux unités fondamentales mécaniques toutes les grandeurs électriques : il suffit que cette comparaison soit faite pour quelques grandeurs principales convenablement choisies, à la mesure desquelles on ramène la mesure absolue des autres grandeurs. C'est ainsi que, si l'on sait mesurer une intensité de courant en valeur absolue, on peut mesurer un champ magnétique en valeur absolue, soit en employant la balance de Cotton (§ 215), soit en le comparant à un champ étalon, créé par une bobine de dimensions connues : cette dernière méthode permet par exemple de déterminer en quelques minutes la valeur en gauss de la composante horizontale du champ magnétique terrestre (§ 101). Si l'on sait mesurer en valeur absolue une intensité de courant et une différence de potentiel, on peut mesurer en ergs/seconde la puissance consommée dans un circuit, en mesurant en u. é. m. l'intensité du courant qui le parcourt et la différence de potentiel à ses bornes. On peut également étalonner un galvanomètre en u. é. m., et en l'employant comme balistique, mesurer une quantité d'électricité en valeur absolue; on peut mesurer en u. é. m. C. G. S. la capacité d'un condensateur, en mesurant son potentiel et sa charge, et une self-inductance, en la comparant à une capacité, à l'aide d'un dispositif de pont de Wheatstone (§ 300).

On n'a donc à réaliser de mesures absolues électromagnétiques directes que pour les intensités de courant, les résistances, et les différences de potentiel. On peut d'ailleurs réduire ces mesures à deux : si l'on connaît en valeur absolue la résistance d'un conducteur et l'intensité du courant qui le parcourt, on connaît en valeur absolue la différence de potentiel entre ses extrémités. C'est pour cette raison que la *loi du 2 avril* 1919 *ne définit que deux unités principales, l'ampère et l'ohm,* le volt étant une unité secondaire ; *les mesures absolues que nous avons à étudier se réduisent à la* **détermination de l'ampère** *et à la* **détermination de l'ohm.** Nous allons décrire les plus importantes parmi les méthodes qui ont été employées, depuis la création des systèmes d'unités électriques, à ces deux déterminations. Dans toutes les formules que nous écrirons, nous supposerons toujours, puisqu'il s'agit de mesures absolues électromagnétiques, que toutes les grandeurs sont mesurées en u. é. m. ($\mu_0 = 1$).

Il est bien entendu qu'on n'a jamais, dans un laboratoire qui n'est pas spécialisé dans la Métrologie, à réaliser ces mesures, car on dispose toujours de résistances étalons et de piles étalons permettant de se borner à des mesures relatives. On peut d'ailleurs toujours faire vérifier ces étalons par un laboratoire de Métrologie (en France le Laboratoire Central d'Électricité).

II. — *DÉTERMINATION DE L'AMPÈRE*

264. Principe des électrodynamomètres absolus. — Nous avons déjà indiqué, au paragraphe 257, le principe des électrodynamomètres : lorsque deux circuits C et C′ sont parcourus par le même courant, les forces qui s'exercent entre eux sont proportionnelles au carré de son intensité i. Si M désigne l'inductance mutuelle des deux circuits, la composante F suivant un axe et le moment résultant Γ par rapport à cet axe du système de forces agissant sur l'un des circuits ont pour expression :

$$F = i^2 \frac{\partial M}{\partial x}, \qquad \Gamma = i^2 \frac{\partial M}{\partial \alpha}.$$

Le coefficient M ne dépend que des données géométriques qui définissent les deux circuits, et ses dérivées partielles peuvent effectivement être calculées à partir de ces données, si les circuits sont convenablement choisis. *La mesure absolue, en unités électromagnétiques, de l'intensité i du courant résulte de mesures de longueurs donnant les dimensions des circuits et d'une mesure mécanique, faite à l'aide d'une balance, donnant la force* F *ou le couple* Γ.

265. Électrodynamomètre Pellat. — Le circuit C (*fig.* 327) est constitué par un solénoïde extrêmement long, d'axe horizontal, comportant n spires par centimètre. Le circuit C′ est formé par une bobine à axe vertical, placée dans la région où le champ du solénoïde, $H = 4\pi ni$, est uniforme ;

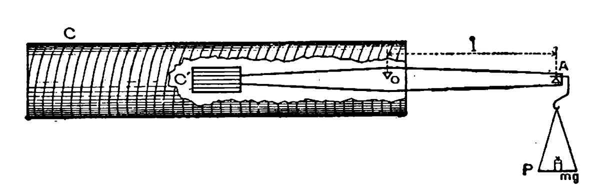


FIG. 327.

elle comporte N′ spires de surface S′, et est soumise à un couple $\Gamma = 4\pi n N'S'i^2$ (§ 219). La bobine C′ est portée à l'extrémité d'un fléau de balance C′OA et on établit l'équilibre en plaçant des poids dans le plateau P. Pour réduire l'action du champ magnétique terrestre sur le circuit mobile, on place, autant que possible, l'arête du couteau O dans le plan du méridien magnétique ; pour l'éliminer complètement, on établit l'équilibre lorsque le circuit C′ est seul parcouru par le courant i, puis on fait passer le courant i dans les deux circuits et on rétablit l'équilibre en ajoutant une masse m dans le plateau P. Le

moment du poids mg par rapport à l'axe de rotation O est mgl ; le moment des forces électromagnétiques est Γ ; la condition d'équilibre est :

$$\Gamma = mgl, \qquad i^2 = \frac{mgl}{4\pi n N'S'}.$$

On fait une seconde mesure en intervertissant le sens du courant dans le circuit C seul : on doit alors enlever une masse m', et on prend, pour faire le calcul définitif, la moyenne des masses m et m'.

Il est facile de réaliser un appareil tel qu'à un courant d'un demi-ampère ($i = 0{,}05$) corresponde une masse m égale à 1 gramme, et il est possible de réduire suffisamment le couple de torsion des spirales d'argent qui amènent le courant à la partie mobile pour qu'on puisse utiliser une balance sensible au 1/10 de milligramme. Pour qu'il soit possible de mesurer avec une précision correspondante la surface S' d'une des spires de la bobine C', on est obligé de lui donner des dimensions assez grandes, et par suite de donner au solénoïde C une grande section, et surtout une grande longueur. Il n'est guère possible de le prendre assez long pour ne pas avoir à faire une correction des bouts importante, et la difficulté de réaliser et de vérifier un long enroulement fait qu'on préfère en général les électrodynamomètres à bobines plates à l'électrodynamomètre Pellat.

266. Électrodynamomètres à bobines parallèles. — Le principe, dû à Lord Kelvin, en est le suivant. Considérons deux spires circulaires C et C' parallèles, de même axe OO', parcourues par des courants de même sens ; le flux envoyé par le courant C à travers le circuit C' y pénètre par la face négative (*fig.* 328), et la spire C', qui tend à embrasser le plus grand flux possible, tend à se rapprocher de C : elle est soumise à une force d'attraction F, dirigée suivant l'axe OO', qu'on peut effectivement calculer, par un calcul que nous ne reproduirons pas ici, à partir des rayons des spires et de la distance de leurs plans. Le calcul peut encore être effectué si l'on remplace chacune des spires C et C' par une bobine plate.

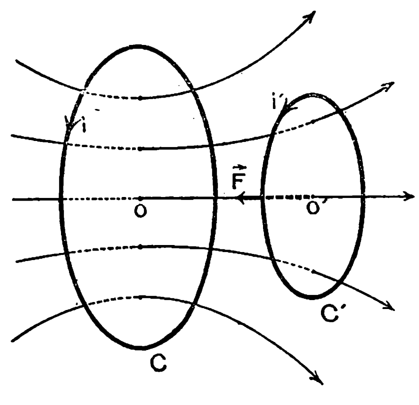


FIG. 328.

Dans un électrodynamomètre absolu, la bobine C' est suspendue à l'un des couteaux B d'un fléau de balance ; on double l'action qu'elle subit en employant deux bobines fixes C et D, symétriques par rapport à O' et parcourues par le courant en sens inverse ; on multiplie encore par deux les forces à mesurer en disposant symétriquement, à l'autre extrémité du fléau mobile autour du couteau A, une seconde bobine mobile C'_1 et une seconde paire de bobines fixes C_1D_1 (*fig.* 329) ; on les multiplie encore une fois par deux en renversant le sens du courant dans l'un des systèmes de bobines. Les six bo-

bines sont parcourues par le courant i à mesurer dans des sens tels que les sens des feuillets équivalents soient ceux qu'indiquent sur la figure les signes de leurs faces. On établit l'équilibre en plaçant des masses échantillonnées dans les plateaux de la balance ; on renverse le sens du courant dans les bobines fixes, et le poids de la masse qu'il faut ajouter dans l'un des plateaux pour rétablir l'équilibre représente huit fois la force qui s'exerce entre l'une des bobines C′ et l'une des bobines C. On répète l'expérience en plaçant les poids sur l'autre plateau, de façon à éliminer les défauts de justesse de la balance ; on la répète encore en changeant le sens du courant dans le groupe de bobines $C'_1C_1D_1$, de façon à éliminer l'action des bobines fixes d'un groupe sur la bobine mobile de l'autre.

Dans l'appareil du Laboratoire Central d'Électricité, le poids à ajouter, pour rétablir l'équilibre après renversement d'un courant de 0,5 ampère, est d'environ 19 grammes; les connexions qui amènent le courant à la partie mobile sont faites par des spirales de ruban d'argent recuit de 2/100 de millimètre d'épaisseur, et n'exercen qu'un couple négligeable.

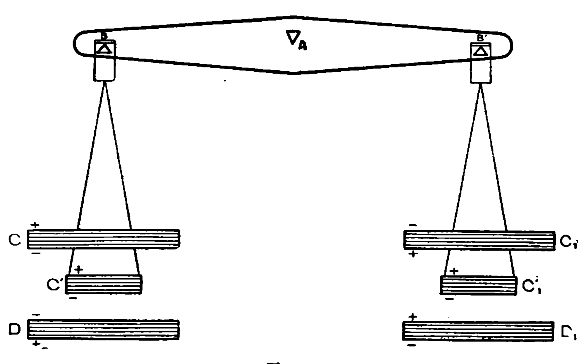


Fig. 329.

Il faut naturellement que les dimensions des bobines soient mesurées avec précision. Leurs carcasses doivent être indéformables et non magnétiques ; dans l'appareil du Laboratoire Central d'Électricité, ces carcasses sont en bronze ; les diamètres sont de 36 centimètres pour les bobines fixes, 19 centimètres pour les bobines mobiles ; elles ont 2 centimètres de hauteur, et contiennent respectivement 400 et 200 spires. On a mesuré le diamètre de chaque couche en mesurant la longueur du fil enroulé, en ayant soin, pour tenir compte de l'allongement que subit le fil lorsqu'on le tend, de faire cette mesure sous la tension même d'enroulement ; on mesure la hauteur et la distance des bobines à l'aide d'un cathétomètre. L'ajustement des bobines doit être particulièrement soigné, et toutes les parties fixes de l'appareil forment un ensemble rigide solidement fixé à une charpente de bronze.

Grâce à toutes ces précautions, on peut arriver à mesurer la valeur absolue de l'intensité d'un courant voisin d'un ampère avec une précision de l'ordre du dix-millième. Il est évidemment nécessaire que l'intensité du courant reste constante avec cette précision pendant toute la durée des mesures et des vérifications : il est facile de s'en assurer par une méthode de mesure relative quelconque, par exemple en vérifiant, par la méthode d'opposition employée avec une pile étalon et un galvanomètre sensible, que la différence de potentiel aux bornes d'une résistance parcourue par le courant reste invariable.

267. Résultats et applications. — Les électrodynamomètres de haute

précision ont été employés à la détermination de l'équivalent électrochimique de l'argent. Les expériences les plus récentes et les plus précises ont donné pour la quantité d'argent déposé par un coulomb (0,1 u. é. m. C. G. S.) des valeurs comprises entre $1^{mg},11797$ et $1^{mg},11805$; ces valeurs sont très voisines de la valeur $1^{mg},11800$ qui avait été adoptée par la conférence de Londres, en 1908, pour définir l'ampère international, et on peut affirmer que *l'ampère international ne diffère que de quelques cent-millièmes au plus de l'ampère vrai.* Ces mêmes expériences ont montré que la mesure électrodynamique de l'intensité du courant était plus précise que la détermination du poids d'argent déposé : c'est pour cette raison que la 8e Conférence Générale des Poids et Mesures a décidé (§ 134) de revenir, pour les applications métrologiques, à la définition de l'ampère à partir de l'unité C. G. S.

Les électrodynamomètres absolus sont toujours des appareils encombrants et de réalisation difficile à cause de la nécessité d'atteindre dans leur construction la perfection géométrique ; ce sont des appareils réservés aux grands laboratoires nationaux de mesures. Mais on peut construire sur les mêmes principes des électrodynamomètres-balances, qu'on étalonne par comparaison avec les appareils fondamentaux, et qui jouent le rôle que jouent en métrologie les étalons secondaires.

La figure 330 représente l'**ampère-étalon** construit sur le principe de l'électrodynamomètre Pellat. Les dimensions en sont réduites, leur mesure géométrique n'est pas faite avec précision, et le couple n'est plus calculable ; mais une comparaison avec un appareil absolu permet de déterminer la masse m_0 qu'il faut ajouter dans le plateau pour ramener l'aiguille au zéro lorsque les deux bobines sont parcourues par un courant d'intensité égale à un ampère. L'emploi d'un tel appareil est beaucoup plus pratique que celui de l'électrolyse, qui présente toutes les difficultés d'une analyse chimique ; il est plus sûr que celui d'un ampèremètre de contrôle, car l'électrodynamomètre ne comporte ni aimant permanent ni ressort directeur dont les propriétés soient sujettes à des variations lentes spontanées. La masse m_0 étant de l'ordre de quelques grammes, et la pesée pouvant se faire à une fraction de milligramme près, on peut obtenir une précision de l'ordre du dix-millième.

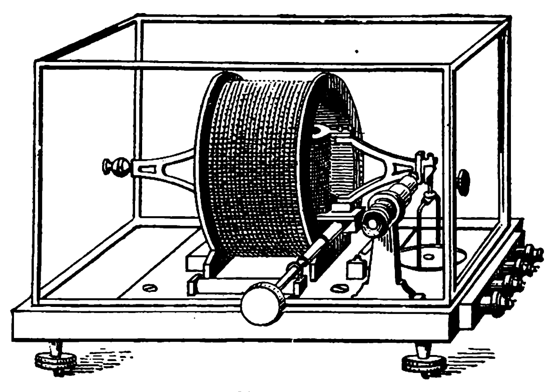


FIG. 330.

On obtient pourtant plus commodément cette précision, et peut-être même une précision supérieure, en faisant passer le courant à mesurer dans une résistance étalon à faible coefficient de température, construite de façon à s'échauffer peu, et en mesurant la différence de potentiel à ses bornes à l'aide d'une pile étalon, par la méthode d'opposition (§ 156). Aussi les ampères étalons sont-

ils des instruments peu répandus, et les étalonnages des appareils de mesure, chez les constructeurs et dans les laboratoires de vérification, sont toujours faits avec des résistances étalons en manganine et des piles étalons Weston.

III. — *DÉTERMINATION DE L'OHM*

268. Généralités. — Dès que les lois fondamentales du courant électrique eurent été établies, on reconnut la nécessité de réaliser un étalon de résistance qui pût être universellement adopté, et pour cela d'effectuer la mesure absolue des étalons employés, à partir des unités mécaniques. De nombreuses mesures ont été effectuées depuis 1850 ; nous nous contenterons d'indiquer sommairement le principe des diverses méthodes.

On peut, pour mesurer une résistance en valeur absolue, partir de la loi de Joule ou de la loi d'Ohm ; mais, comme les mesures calorimétriques sont moins précises que les mesures électriques (cf. § 148), les seules méthodes importantes sont celles qui sont basées sur la loi d'Ohm, $r = e / i$; on produit une f. é. m. calculable e, et on mesure l'intensité i du courant produit. Comme les seules f. é. m. qu'on puisse calculer sont les f. é. m. d'induction, toutes les méthodes emploient les phénomènes d'induction; leur réalisation est telle que la mesure électrique à effectuer se réduise à une mesure relative. On peut par exemple produire la f. é. m. par le déplacement d'un circuit dans un champ permanent H et mesurer le courant i par le champ H′ qu'il crée; les quantités e et i sont les produits des quantités H et H′ par des coefficients de nature purement géométrique ou mécanique, et le quotient e/i se déduit de mesures mécaniques absolues et de la détermination du rapport H/H′, qui est une mesure relative. De même, si on crée le champ H par un courant i', le quotient e/i est le produit des rapports H/i' et e/H, déterminés par des mesures mécaniques absolues, et du rapport i'/i, déterminé par une mesure électrique relative.

Remarquons en passant que les dimensions de la résistance sont LT^{-1} (§ 151) : l'unité de résistance dépend du choix de l'unité de longueur et de l'unité de temps, et la mesure absolue d'une résistance comportera nécessairement la mesure absolue d'une longueur et la mesure absolue d'un temps.

269. Emploi du galvanomètre balistique. — Les premières mesures absolues de résistances ont été faites en 1852 par Weber. La f. é. m. d'induction est produite par le retournement d'un cadre vertical dans le champ terrestre H; la décharge induite est mesurée par un galvanomètre balistique calculable (boussole des tangentes), ayant le même champ terrestre H pour champ directeur, de sorte que la valeur de H s'élimine et n'a pas à être mesurée.

Si le cadre du galvanomètre est un cadre circulaire de N spires, de rayon a, sa sensibilité en courant continu, pour de faibles déviations, est $\frac{\alpha}{i} = \frac{2\pi N}{a} \cdot \frac{1}{H}$ (§ 250); si sa période est T, sa sensibilité comme balistique est

$\frac{\theta}{q} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\alpha}{i} = \frac{4\pi^2 N}{aT} \cdot \frac{1}{H}$ (§ 258) : la quantité d'électricité induite q est liée à la déviation θ par la relation $q = \frac{aT}{4\pi^2 N} H\theta$. La variation de flux $\Delta\Phi$ à travers le cadre inducteur, comportant N' spires de surface S, est $\Delta\Phi = 2N'SH$, et la résistance du circuit est (§ 223) :

$$r = \frac{\Delta\Phi}{q} = \frac{8\pi^2 NN'S}{aT\theta}.$$

La mesure de S, de a, de T et de θ fournit la valeur absolue de r ; si la déviation n'est pas petite, on introduira dans les formules les lignes trigonométriques au lieu des arcs.

On a amélioré la méthode en utilisant un galvanomètre balistique sensible, dont on compare ensuite la sensibilité à celle de la boussole des tangentes. Mais il reste toujours des difficultés spéciales, inhérentes à l'emploi du retournement d'un cadre ; l'opération doit être faite en un temps très court par rapport à la période T du galvanomètre ; il est difficile de définir avec précision les positions de départ et d'arrivée, et d'éviter les ébranlements de l'appareil lors de la mise en mouvement et de l'arrêt du cadre.

On obtient de meilleurs résultats en produisant la décharge dans le balistique par un phénomène d'induction mutuelle (Kirchhoff, 1849). On dispose deux circuits C et C' de façon que leur inductance mutuelle M puisse être calculée à partir de leurs dimensions géométriques ; on fait passer dans le circuit C' un courant i', qu'on coupe brusquement : la variation de flux dans le circuit C est $\Delta\Phi = Mi'$. On mesure, avec un galvanomètre balistique à aimant mobile, d'amortissement négligeable, la quantité d'électricité induite q ; elle est liée à la déviation θ par la relation $q = \theta \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{i}{\alpha}$. La résistance du circuit C est :

$$r = \frac{\Delta\Phi}{q} = M \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{i'}{i} \cdot \frac{\alpha}{\theta}.$$

On a à déterminer la période T, les dimensions géométriques qui permettent de calculer M, et à faire les deux mesures galvanométriques qui fournissent la déviation permanente α correspondant au passage du courant i dans le galvanomètre, et l'élongation maximum θ correspondant à la rupture du courant i' dans le circuit C'. Les déviations α et θ n'interviennent que par leur rapport, et il en est de même des courants i et i' ; il est d'ailleurs facile d'employer, pour la mesure de la sensibilité du galvanomètre, un courant i qui soit une fraction connue du courant i' : il suffit de mesurer le courant i' avec le galvanomètre shunté, et le rapport i'/i se déduit de la mesure du rapport des résistances du shunt et du galvanomètre. Il faut naturellement, dans des mesures de précision où les déviations doivent être assez grandes, faire intervenir, au lieu des arcs, les lignes trigonométriques : on trouve que le rapport α / θ doit être remplacé par le rapport $\tan \alpha / 2 \sin \frac{\theta}{2}$.

270. Amortissement des oscillations d'un aimant dans une bobine. — Lorsqu'un aimant oscille à l'intérieur d'une bobine dont le circuit est fermé, il produit des variations du flux qui traverse la bobine, et l'intensité des courants induits peut se déduire de l'étude des forces qu'ils exercent sur l'aimant : ce sont, d'après la loi de Lenz, des forces qui s'opposent au mouvement, et leur étude est celle de l'amortissement des oscillations. Quoique cette méthode n'ait pas toujours fourni de très bons résultats, nous en indiquerons le principe ; les formules que nous allons établir peuvent aussi servir à calculer l'amortissement d'un galvanomètre à aimant mobile.

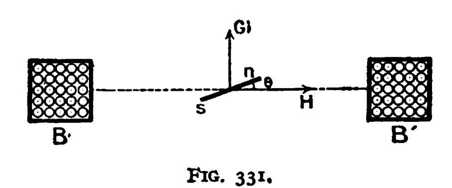


FIG. 331.

L'aimant *ns*, dont le moment magnétique est M, est placé (*fig.* 331) en un point où le champ terrestre est H et où la bobine BB', lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité *i*, crée un champ G*i* perpendiculaire à H. Nous supposerons les oscillations de l'aimant de faible amplitude : lorsqu'il est écarté d'un angle θ de sa position d'équilibre, il est soumis à deux couples, dont les expressions MH sin θ et MGI cos θ peuvent être confondues avec MHθ et MG*i*.

Pour calculer le flux Φ envoyé par l'aimant à travers la bobine, on le remplace par le solénoïde équivalent qui comprend N' spires de surface S', et est parcouru par un courant *i'* tel que $N'S'i' = M$ (cf. § 216) ; l'inductance mutuelle du solénoïde et de la bobine est N'S'G sin θ, et le flux Φ est $\Phi = N'S'i' G \sin\theta = MG\theta$. La f. é. m. induite dans la bobine par le mouvement de l'aimant est $e = - MG\, d\Phi/dt$; comme la constante de temps L/r de la bobine est petite (§ 233) par rapport à la période T de cette f. é. m., on peut prendre pour expression de l'intensité du courant induit $i = e/r$, et le couple MG*i* correspondant a pour expression $-\frac{M^2G^2}{r}\frac{d\theta}{dt}$. L'équation du mouvement de l'aimant est :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{M^2G^2}{r}\frac{d\theta}{dt} + MH\theta = 0.$$

Le décrément logarithmique a pour expression :

$$\delta = T\frac{M^2G^2}{2Ir} = \frac{1}{2r}T\frac{MH}{I}G^2\frac{M}{H} = \frac{1}{2r}T\frac{4\pi^2}{T^2}G^2\frac{M}{H} = \frac{1}{r}\cdot\frac{2\pi^2}{T}\cdot G^2\frac{M}{H}.$$

et on peut calculer r par la relation :

$$r = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{2\pi^2}{T}\cdot G^2\frac{M}{H}.$$

Il faut mesurer le décrément logarithmique δ, la période T, le rapport M / H, et déduire la valeur de G des dimensions de la bobine. Il faut de plus faire des corrections, relatives aux phénomènes de self-induction dans la bobine, qu'on peut calculer d'après ses dimensions, et à l'amortissement par l'air, qu'on déduit de l'étude des oscillations lorsque le circuit est ouvert.

Mais il reste des erreurs, qu'il est difficile d'évaluer, dues à l'aimantation induite et aux courants de Foucault produits dans la masse de l'aimant par les courants qui circulent dans le cadre.

271. Champ magnétique d'un cadre tournant. — Cette méthode a été employée dans les expériences réalisées en 1863 et 1864 par le Comité de l'Association Britannique, et reprise en 1881 par Lord Rayleigh. La f. é. m. d'induction est créée par la rotation, autour d'un axe vertical, dans le champ magnétique terrestre H, d'un cadre, comportant N spires de surface S. L'intensité des courants induits est mesurée par la valeur moyenne h_m du champ magnétique qu'ils créent au centre O du cadre ; comme ce champ est perpendiculaire au champ H, on mesure, par la déviation d'un aimant, le rapport h_m / H ; la valeur du champ magnétique terrestre H n'intervient pas dans l'équation finale, et n'a pas besoin d'être mesurée avec précision.

Nous allons calculer le champ magnétique moyen $\vec{h}_m$ en calculant ses deux composantes X et Y suivant la direction Ox du champ terrestre et suivant la direction Oy perpendiculaire. Nous supposons que le cadre BB′ fait ν tours par seconde ; sa vitesse angulaire est $\omega = 2\pi\nu$, et, à l'instant t, la normale ON au plan du cadre fait avec Ox un angle ωt (*fig.* 332). Si l'intensité du courant induit est i, le champ qu'il crée à l'instant t est dirigé suivant ON, sa grandeur est $h = Gi$, et ses composantes sont $h_x = h \cos \omega t$ et $h_y = h \sin \omega t$. Remarquons d'abord que, d'après la loi de Lenz, le champ $\vec{h}$ a pour effet de s'opposer à la variation de flux due à la rotation du cadre, donc de produire une rotation du champ dans le sens de la rotation du cadre : l'angle du champ $\vec{H}' = \vec{H} + \vec{h}$ et du champ $\vec{H}$ a toujours le sens indiqué par la figure 332, et la composante h_y conserve toujours le même sens. Au contraire, la composante h_x change de sens à chaque demi-révolution du cadre ; sa valeur moyenne X est nulle, et le champ moyen $\vec{h}_m$ se réduit à la composante Y.

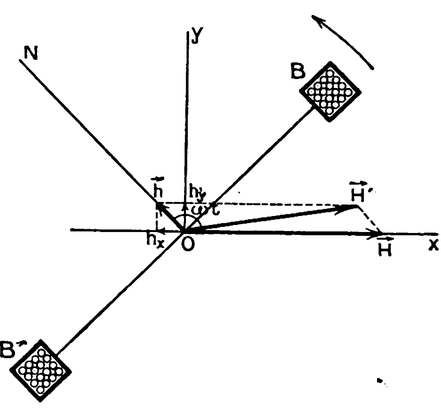


FIG. 332.

Le flux qui traverse le cadre à l'instant t est $\Phi = NSH \cos \omega t$; la f. é. m. d'induction est $e = -d\Phi / dt = NSH\omega \sin \omega t$; si la résistance du circuit est r, l'intensité du courant induit est $i = \dfrac{e}{r} = \dfrac{NSH\omega}{r} \sin \omega t$. La composante h_y est $h_y = Gi \sin \omega t = \dfrac{GNSH\omega}{r} \sin^2 \omega t$; comme la valeur moyenne de $\sin^2 \omega t$ est $1/2$, la valeur moyenne de h_y est $Y = \dfrac{GNSH\omega}{2r}$. On détermine la direction de la résultante des deux champs H et Y au moyen d'un équipage mobile,

comportant une aiguille aimantée et un miroir, suspendu par un fil de cocon. Sa période est assez longue (de l'ordre de 10 secondes), et le cadre tourne assez vite (5 à 10 tours par seconde), pour que l'aiguille prenne une direction fixe : sa déviation α, à partir de la direction $\vec{H}$ qu'elle prend quand le cadre est immobile, est donnée par :

$$\tang \alpha = \frac{Y}{H} = \frac{GNS\omega}{2r} = \frac{\pi GNS\nu}{r},$$

et la résistance r du circuit du cadre se calcule par la formule :

$$r = \frac{\pi GNS\nu}{\tang \alpha}.$$

On mesure avec précision, par un procédé stroboscopique, le nombre ν de tours par seconde. On mesure les dimensions du cadre, pour en déduire les valeurs de G et de S. Enfin on mesure la déviation α ; avec un cadre circulaire de 30 centimètres de diamètre comportant 300 spires, on a pu obtenir une déviation de 6°, correspondant à un déplacement du spot d'environ 20 centimètres sur une échelle à 1 mètre ; si l'on évalue le 1/10 de millimètre, on a une précision de l'ordre du 1/2.000 ; la position de l'échelle par rapport au miroir doit être déterminée avec une précision correspondante.

Il y a lieu d'ajouter, à l'expression que nous avons donnée, des termes correctifs tenant compte des phénomènes de self-induction et des courants induits par l'aimant dans le cadre. Ces termes contiennent la valeur L de la self-inductance du cadre et le rapport M / H du moment magnétique de l'aiguille au champ terrestre : mais, comme il ne s'agit que de termes correctifs, il est facile de les calculer avec suffisamment de précision. Pour réduire l'importance des courants induits par l'aimant, on prend une toute petite aiguille, de quelques millimètres de longueur ; les couples directeurs sont alors très faibles, il faut une suspension tout à fait sans torsion, et il faut soigneusement protéger l'équipage mobile des courants d'air en l'enfermant dans un tube de verre.

272. Mesure des f. é. m. par la méthode d'opposition. — La f. é. m. d'induction e est produite par le déplacement d'un conducteur mobile dans un champ magnétique H = Gi créé, à l'aide d'une bobine calculable, par un courant d'intensité i ; la résistance r à mesurer est parcourue par le même courant i, et on règle l'appareil de façon que la différence de potentiel ri entre ses bornes soit précisément égale à e, ce dont on s'assure par une méthode d'opposition : il est alors inutile de mesurer l'intensité i, qui disparaît de l'équation finale.

La méthode a été employée pour la première fois par Lorenz (1873), en faisant tourner une roue de Barlow dans le champ magnétique sensiblement uniforme d'une bobine longue. Si la roue a un rayon a et fait ν tours par seconde, on a (§ 240) :

$$e = H\pi\nu a^2 = Gi \,.\, \pi\nu a^2, \qquad r = \frac{e}{i} = G\pi\nu a^2.$$

Les mesures se réduisent aux mesures de longueur donnant a et G, et à la mesure du nombre de tours par seconde qui établit l'équilibre.

Dans les experiences de Lord Rayleigh (1883), le champ est produit par deux bobines plates accolées : chacune d'elles a un diamètre de 52 centimètres, une hauteur de 2 centimètres et contient 800 spires. Leur distance est d'environ 3 centimètres; on place entre elles le disque tournant, dont le diamètre est de 31 centimètres, et qui fait une dizaine de tours par seconde. Des f. é. m. thermoélectriques peuvent prendre naissance au contact des pièces glissantes qui établissent les connexions avec le disque, et introduire des erreurs : on les réduit en formant les ressorts de contact avec le même métal que le disque, et on élimine à peu près complètement leur effet en prenant la moyenne des résultats obtenus pour les deux sens inverses du courant i.

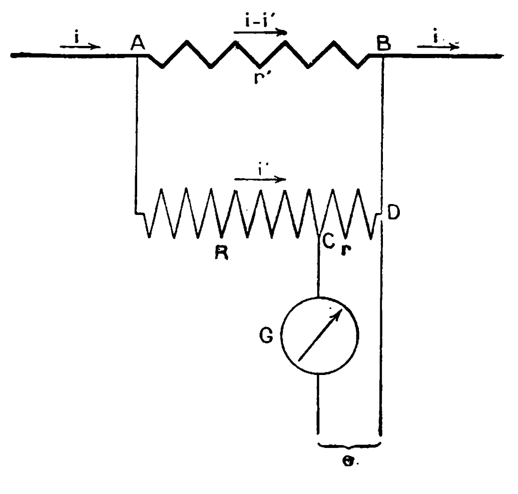


Fig. 333.

La f. é. m. e étant toujours faible, même avec un courant i assez intense, la résistance r doit être très faible. Dans les expériences de Lorenz, elle était constituée par une colonne de mercure de 2 à 3 centimètres de diamètre, de façon à pouvoir en déduire par un simple calcul la valeur de l'unité mercurielle. Dans celles de L. Rayleigh, elle n'était parcourue que par une fraction du courant i; ce courant se partageait, entre deux points A et B (*fig.* 333), entre une résistance faible r' et une résistance beaucoup (par exemple 100 fois) plus grande R + r. On réalisait l'équilibre entre la f. é. m. $e = Gi\pi\nu a^2$ et la différence de potentiel $i'r$ entre les extrémités CD de la résistance r ; le rapport i' / i se déduisait de la mesure du rapport des résistances r' et R + r.

On obtient des f. é. m. plus grandes (Wuilleumier, 1890) en faisant tourner un cadre ouvert, comportant N spires de surface S, dans le champ $H = Gi$ d'une bobine longue, avec une vitesse angulaire $\omega = 2\pi\nu$. Il existe alors entre les extrémités du circuit induit une f. é. m. alternative, $e = NSH\omega \sin \omega t$ (cf. § 271) ; un commutateur tournant permet à chaque tour de les mettre en communication avec le circuit de mesure pendant un instant très court, au moment où la f. é. m. e atteint sa valeur maxima, $e_m = NSH\omega$. Lorsque la résistance r est réglée de façon que la f. é. m. e_m équilibre la différence de potentiel ir, on a :

$$r = \frac{e_m}{i} = \frac{NSH\omega}{i} = 2\pi NSG\nu.$$

Il suffit de mesurer les dimensions du cadre pour avoir S, celles de la bobine pour calculer G, et de déterminer, par un procédé stroboscopique, le nombre ν de tours par seconde. Dans les expériences de Wuilleumier, la surface S était d'environ 300 centimètres carrés, le nombre N de spires de 300. la vitesse ν

de 8 tours par seconde ; la bobine inductrice, de 2 mètres de longueur, contenait 50 spires par centimètre, et était parcourue par un courant d'une douzaine d'ampères ; la résistance r était prise sur un ruban de maillechort, et valait environ 0,3 ohms : il était facile de la comparer ensuite à l'étalon mercuriel légal.

Dans toutes ces expériences, il faut réaliser et étudier avec beaucoup de soin l'enroulement de la bobine qui produit le champ. Comme les dimensions des pièces mobiles doivent être assez grandes pour qu'on puisse les mesurer avec précision, on doit lui donner une large section, et il n'est jamais possible de lui donner une longueur suffisante pour qu'on puisse la considérer comme infiniment longue : le calcul précis de la constante G est assez compliqué, et doit tenir compte de la position des extrémités de la bobine. Enfin on doit éliminer l'action du champ terrestre en plaçant l'axe de la bobine normalement au méridien magnétique et en faisant des mesures pour les deux sens inverses du courant i.

273. Mesures en courant alternatif. — Les progrès considérables réalisés depuis une vingtaine d'années dans la technique des mesures en courant alternatif ont conduit à l'emploi de nouveaux dispositifs dans lesquels la mesure absolue d'un temps, nécessaire à la détermination absolue d'une résistance (§ 268), est remplacée par la mesure de la fréquence d'un courant alternatif. Quant à la mesure absolue d'une longueur, elle s'obtient par l'emploi de deux circuits ayant une inductance mutuelle M calculable, ou d'un seul circuit ayant une self-inductance L calculable : nous savons en effet que les coefficients L et M sont homogènes, en u. é. m., à des longueurs (§ 126).

Une première méthode utilisant des courants alternatifs, employée par Campbell en 1912, est analogue à la méthode de Kirchhoff que nous avons décrite au paragraphe 269. Deux courants alternatifs, $i = i_0 \cos \omega t$ et $i' = i_0 \sin \omega t$, ayant même intensité et présentant une différence de phase de $\pi/2$, parcourent respectivement une résistance r et l'une des bobines d'un étalon d'induction mutuelle. On oppose l'une à l'autre, sur un galvanomètre à vibration (§ 301), la différence de potentiel $ri = ri_0 \cos \omega t$ aux bornes de la résistance et la f. é. m. $e = - \mathrm{M}\, di'/dt = - \mathrm{M} i_0 \omega \cos \omega t$ induite dans la seconde bobine de l'étalon; si le galvanomètre n'indique aucun courant, on a :

$$r = \mathrm{M}\omega.$$

Dans les expériences de Campbell, la fréquence $\omega/2\pi$, qui était de 80 périodes par seconde, fut déterminée en comptant le nombre de tours de l'alternateur; la résistance r était de 5 ohms, et l'étalon d'induction mutuelle, formé de bobines de quelques centaines de spires et de quelques décimètres de diamètre enroulées sur des cylindres de marbre, valait environ 0,01 henry.

Dans d'autres expériences (1925), Campbell employa deux inductions mutuelles M_1 et M_2 disposées comme l'indique la figure 333 *bis*. L'induction mutuelle M_2 est réglable, et on l'ajuste, ainsi que la résistance r', de façon que le galvanomètre à vibration G ne soit traversé par aucun courant : le courant dans le conducteur AD est alors également nul, tandis que les circuits formés d'une part par la source S, le primaire de M_1 et la résistance r, d'autre part

par les secondaires des deux inductions mutuelles, sont parcourus par des courants alternatifs i et i', ayant pour fréquence celle de la source S.

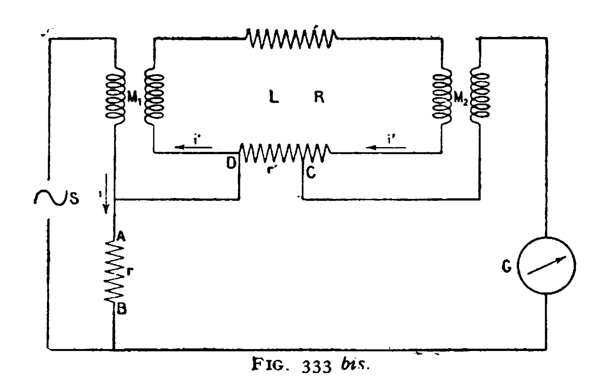


FIG. 333 *bis*.

Écrivons d'abord que la f. é. m. d'induction mutuelle $- M_1\, di/dt$ produit le courant i' dans un circuit de self-inductance L et de résistance totale R ; nous avons :

$$M_1 \frac{di}{dt} + L \frac{di'}{dt} + Ri' = 0.$$

Écrivons ensuite que la somme des chutes de potentiel ri et $r'i'$ dans les résistances AB et CD équilibre la f. é. m. $- M_2\, di'/dt$ induite dans le primaire de l'induction mutuelle M_2 :

$$ri + r'i' - M_2 \frac{di'}{dt} = 0.$$

Egalons les valeurs de di/dt fournies par les deux équations écrites, nous obtenons la condition d'équilibre :

$$\frac{L}{M_1}\frac{di'}{dt} + \frac{R}{M_1} i' = \frac{r'}{r}\frac{di'}{dt} - \frac{M_2}{r}\frac{d^2i'}{dt^2}.$$

Désignons par $i'_0 \cos \omega t$ la valeur à l'instant t du courant i' ; cette condition devient :

$$-\frac{L\omega}{M_1}\sin \omega t + \frac{R}{M_1}\cos \omega t = -\frac{r'\omega}{r}\sin \omega t + \frac{M_2\omega^2}{r}\cos \omega t,$$

et elle ne peut être satisfaite à tout instant que si l'on a :

$$Rr = M_1 M_2 \omega^2.$$

Il suffit de mesurer la fréquence $\omega/2\pi$, et de déterminer par des mesures relatives les rapports de R et de r à l'étalon de résistance et de M_1 et de M_2 à

l'étalon calculable d'induction mutuelle pour pouvoir calculer la valeur absolue de l'étalon de résistance. Dans les mesures de Campbell, la fréquence, qui était de 100 périodes par seconde, fut mesurée par comparaison avec un diapason étalon ; les différentes quantités avaient pour valeur approximative $M_1 = 0{,}015$ henry, $M_2 = 0{,}010$ henry, $R = 30$ ohms, $r = 2$ ohms, $L = 0{,}0035$ henry.

Dans une autre méthode, employée par Gruneisen et Giebe en 1920, l'étalon d'induction était une self-induction L d'environ 0,01 henry, formée de 180 spires enroulées sur un noyau de marbre de 18 centimètres de longueur et 35 centimètres de diamètre, et les mesures en courant alternatif de fréquence 500 n'ont été employées que pour le comparer à une capacité C, constituée par un condensateur à air d'environ 0,2 microfarad, par la méthode que nous décrirons au paragraphe 300. Le pont de Wheatstone étant alors équilibré par deux résistances r_1, r_2 (d'environ 1.000 et 500 ohms), on a (§ 300) :

$$L = Cr_1r_2.$$

La capacité C est ensuite comparée à une résistance par la méthode de pont, avec un galvanomètre à courant continu, que nous décrirons au paragraphe 283 ; les deux résistances désignées par r_1 et r_2 à ce paragraphe étant égales (100 ohms), la capacité C est donnée en fonction de la résistance r de la quatrième branche (environ 20.000 ohms) et de la fréquence ν des charges (environ 250 par seconde) par la relation :

$$C = \frac{1}{\nu r},$$

de sorte qu'on a finalement :

$$r_1 = \nu L \frac{r}{r_2},$$

et qu'on peut déduire la valeur absolue de r_1 des mesures absolues de ν et L et de la mesure du rapport r/r_2.

273 *bis*. Résultats. — Les premiers étalons construits pour représenter l'ohm, c'est-à-dire une résistance égale à 10^9 u. é. m. C. G. S., ont été réalisés par le Comité de l'Association Britannique en 1865, à la suite des expériences décrites au paragraphe 271 ; les étalons réalisés — étalons B. A. U. — ne représentaient d'ailleurs pas très exactement l'ohm, à cause d'une erreur commise dans le calcul du terme correctif dû à la self-induction du cadre : l'étalon B. A. U. a une résistance inférieure à un ohm, et vaut 0,986 ohms.

Les étalons B. A. U., étaient constitués par des bobines en fils d'alliage platine-argent. L'expérience a montré que ces alliages étaient sujets à des variations avec le temps, et des comparaisons faites en 1881, entre des étalons qui avaient initialement même résistance, ont montré l'existence d'écarts qui pouvaient atteindre 1 o/o. Aussi le Congrès International d'Electricité de Paris décida-t-il en 1881 que l'ohm serait représenté par la résistance à 0°C. d'une colonne de mercure de 1 mm² de section ; le Congrès de Chicago en 1893 fixa la longueur de cette colonne à $106^{cm},3$, nombre qui paraissait devoir être exact à quelques dix-millièmes près, d'après les résultats d'un certain nombre de

déterminations faites, de 1882 à 1892, par les méthodes que nous avons décrites aux paragraphes 270 à 272. C'est cette même valeur qui fut adoptée par la Conférence de Londres en 1908, lorsqu'elle définit l'**ohm international** comme étant *la résistance à* 0° C. *d'une colonne de mercure de section uniforme, de longueur* 106cm,300 *et de masse* 14g,4521.

Après la Conférence de Londres, les différents laboratoires métrologiques construisirent des étalons mercuriels satisfaisant de façon aussi précise que possible aux spécifications choisies, puis se préoccupèrent de déterminer leur valeur en unités absolues. Il apparut bientôt, grâce surtout à l'augmentation de la précision des mesures en courant alternatif (§ 273), que *la détermination absolue d'une résistance peut être effectuée avec plus de précision que la construction d'un étalon mercuriel :* les différents étalons mercuriels construits par un même laboratoire diffèrent toujours entre eux de quelques cent-millièmes. C'est pour cette raison que la 8e Conférence générale des Poids et Mesures a décidé, en 1933, d'abandonner la définition de l'ohm à partir de l'étalon mercuriel pour revenir à la définition à partir de l'unité C. G. S. (cf. § 138).

En fait les différents pays avaient pris comme étalons de l'ohm des résistances de manganine, étalonnées à partir d'étalons mercuriels, et périodiquement contrôlées : lorsqu'elles sont convenablement construites, de telles résistances ont une variation avec le temps qui ne dépasse pas quelques millioniènes par an. Des comparaisons de ces résistances entre elles, effectuées au Bureau International des Poids et Mesures, ont permis en 1935 de définir, par leur moyenne, un *ohm international moyen*, dont chacune diffère d'une quantité, généralement inférieure à 10 microhms, connue à 0,1 microhm près.

Des mesures faites dans différents laboratoires par la méthode de Lorenz (§ 272) et par les méthodes de courant alternatif (§ 273) ont alors permis de déterminer le rapport de l'ohm international moyen à l'ohm vrai (10^9 u. é. m. C. G. S.) : elles ont toutes donné pour ce rapport des nombres compris entre 1,00048 et 1,00051. On peut donc admettre que sa valeur est 1,00049, avec une erreur ne dépassant pas deux cent-millièmes : ***l'ohm international est supérieur d'environ 5 dix-millièmes à l'ohm vrai.***

La conservation d'une seconde unité électrique est assurée, dans les divers laboratoires métrologiques, par l'emploi de piles étalons Weston. Des comparaisons entre ces piles effectuées au Bureau International des Poids et Mesures ont permis de définir un *volt international moyen :* les différences entre cette valeur moyenne du volt et les valeurs adoptées dans les différents pays ne dépassent pas 10 microvolts et sont connues à quelques microvolts près.

Le volt international moyen et l'ohm international moyen définissent une unité d'intensité de courant, l'*ampère international moyen.* Les déterminations absolues les plus récentes ont donné pour le rapport de cette unité à l'ampère absolu (10^{-1} u. é. m. C. G. S.) des valeurs comprises entre 0,99986 et 0,99994 : on peut admettre que l'ampère international moyen vaut 0,9999 ampère absolu, à 1/10.000 près, et par suite que le volt international moyen vaut 1,0004 volt absolu. La f. é. m. de l'élément Weston, à 20° C., égale à 1,01830 volt international, vaut donc 1,0187 volt absolu (1,0187 . 10^8 u. é. m. C. G. S.).

CHAPITRE XXVII

RAPPORT DES UNITÉS

I. — RAPPEL DES DÉFINITIONS DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES D'UNITÉS

274. Relations de définition des unités dérivées. — Rappelons d'abord les relations utilisées dans tous les systèmes d'unités pour définir les unités secondaires à partir des unités mécaniques et des unités de quantité d'électricité et de masse magnétique :

$q = it$ (q = quantité d'électricité [1], i = intensité de courant, t = temps), (1)
$\vec{f} = q\vec{e}$ ($\vec{f}$ = force, $\vec{e}$ = champ électrique), (2)
$w = qv$ (w = énergie, v = différence de potentiel), (3)
$q = cv$ (c = capacité) (4)
$v = ir$ (r = résistance), (5)
$f = \mathrm{m}h$ (m = masse magnétique, h = champ magnétique), (6)
$\mathfrak{m} = \mathrm{m}d$ ($\mathfrak{m}$ = moment magnétique, d = longueur), (7)
$\mathfrak{m} = us$ (u = puissance d'un feuillet, s = surface). (8)

La combinaison de ces relations fondamentales fournit des relations valables sans coefficient numérique dans tous les systèmes, telles que la relation $\vec{e} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v$ reliant le champ et le potentiel, la relation $\vec{C} = \vec{\mathfrak{m}} \wedge \vec{h}$ donnant le couple qui s'exerce sur un aimant, ainsi que les relations qui expriment l'énergie d'un condensateur et l'énergie consommée dans un circuit :

$$w = \frac{1}{2} qv = \frac{1}{2} cv^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c}; \qquad w = vit = ri^2t. \tag{9}$$

Chaque système d'unités peut être caractérisé par les valeurs des coefficients numériques qui figurent dans les expressions des deux lois de Coulomb :

$$f = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{qq'}{d^2}, \qquad f = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathrm{mm}'}{d^2}. \tag{10}$$

[1] Plus exactement : nombre qui mesure une quantité d'électricité; toute formule est une relation entre des nombres qui mesurent des grandeurs.

Ces deux dernières expressions, combinées aux relations (1) à (8), permettent d'obtenir diverses relations où figurent les coefficients ε_0 ou μ_0. On obtient ainsi pour l'énergie mutuelle de deux charges électriques et pour la capacité d'un condensateur à lame d'air les expressions :

$$w = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qq'}{d}, \qquad c = \frac{\varepsilon_0 s}{4\pi d}, \tag{11}$$

tandis qu'on obtient pour l'énergie mutuelle de deux feuillets dans le vide :

$$w = -\frac{uu'}{\mu_0}\iint \frac{\vec{\mathrm{d}d}\,\vec{\mathrm{d}d'}}{r}. \tag{12}$$

En complétant les relations de définition par les suivantes :

$b = \mu_0 h$ (b = induction magnétique), (13)

$\varphi = bs$ (φ = flux magnétique), (14)

$\mu_0\varphi = mu$ (m = coefficient d'induction mutuelle), (15)

on obtient, pour la circulation du vecteur-induction et pour l'énergie des feuillets les expressions :

$$\int \vec{b}\,\vec{\mathrm{d}d} = 4\pi u, \qquad \text{et} \qquad w = -\frac{muu'}{\mu_0^2} \tag{16}$$

Les relations qui contiennent à la fois des grandeurs électriques et des grandeurs magnétiques contiennent en général simultanément les coefficients ε_0 et μ_0. Mais, *si l'on convient de choisir les unités fondamentales de quantité d'électricité et de masse magnétique de façon que l'intensité d'un courant et la puissance du feuillet équivalent soient liées par la relation* [1] :

$$\mu_0 i = u, \tag{17}$$

on obtient, sans coefficient numérique, les relations importantes :

$$\int h\,\mathrm{d}d = 4\pi i, \qquad \varphi = mi, \qquad w = mii', \tag{18}$$

ainsi que les relations qui expriment les lois de l'induction :

$$v = -\frac{d\varphi}{dt}, \tag{19}$$

$$v = -l\frac{di}{dt} = -m\frac{di}{dt} \qquad (l = \text{coefficient de self-induction}). \tag{20}$$

[1] Nous avons vu au paragraphe 133 que cela revient à choisir ε_0 et μ_0 tels que l'on ait $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, c étant une certaine vitesse, égale à $3 \cdot 10^{10}$ en unités C. G. S.

275. Systèmes électrostatiques (cf. §§ 77, 133 et 138). — Les systèmes électrostatiques sont définis par la convention qu'expriment les formules (17) à (20) et par la convention $\varepsilon_0 = 1$. Le coefficient μ_0 y dépend des unités mécaniques choisies; nous savons déjà (§ 133) qu'il est égal à $1/c^2$, c étant une certaine vitesse, égale, dans le système C. G. S., à $3 . 10^{10}$ (cf. § 284).

On peut dire que l'unité principale y est l'unité de quantité d'électricité, définie, à partir des unités mécaniques, par la loi de Coulomb $f = qq'/d^2$. A partir de cette unité principale électrique et des unités mécaniques, les relations (1) à (5) et la relation (20) permettent de définir les autres unités électriques. Rappelons les équations de dimensions des unités électrostatiques de quantité d'électricité, d'intensité de courant, de différence de potentiel, de capacite et de self-inductance :

$$Q = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}, \qquad I = \frac{Q}{T} = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}, \qquad V = \frac{W}{Q} = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1},$$

$$R = \frac{V}{I} = L^{-1}T, \qquad C = \frac{Q}{V} = L, \qquad \mathcal{L} = \frac{VT}{I} = L^{-1}T^2.$$

276. Systèmes électromagnétiques (cf. §§ 106, 133 et 151). — Les systèmes électromagnétiques sont définis par la convention qu'expriment les formules (17) à (20), et par la convention $\mu_0 = 1$. Le coefficient ε_0 y est égal à $1/c^2$, soit en unités C. G. S. à $\frac{1}{9 . 10^{20}}$.

L'unité principale y est l'unité de masse magnétique, définie, à partir des unités mécaniques, par la loi de Coulomb $f = mm'/d^2$. A partir de cette unité et des unités mécaniques, les relations (6) à (8) définissent les unités de champ magnétique, de moment magnétique et de puissance d'un feuillet.

L'unité principale électrique, définie par la formule (17) avec $\mu_0 = 1$, est l'unité d'intensité de courant : c'est l'intensité du courant équivalent au feuillet de puissance unité. A partir de cette unité principale électrique, les relations (1) à (5) et (20) du paragraphe 274 permettent de définir les autres unités électriques du système électromagnétique. Rappelons les formules de dimensions des unités électromagnétiques d'intensité de courant, de quantité d'électricité, de différence de potentiel, de résistance, de capacité et de self-inductance :

$$Q = IT = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}, \qquad I = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}, \qquad V = \frac{W}{Q} = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2},$$

$$R = \frac{V}{I} = LT^{-1}, \qquad C = \frac{Q}{V} = L^{-1}T^2, \qquad \mathcal{L} = \frac{VT}{I} = L.$$

277. Système pratique. — Rappelons encore une fois les définitions des unités pratiques. Le système pratique dérive du système électromagnétique, et ses unités principales sont :

1° L'unité de temps....................	1 seconde	=	1 unité C.G.S.
2° L'unité d'intensité de courant.........	1 ampère	=	10^{-1} u.é.m. C.G.S.
3° L'unité de résistance.................	1 ohm	=	10^9 u.é.m. G.G.S.

Les unités secondaires, définies à l'aide des relations (1), (5), (3), (4) et (20) du paragraphe 274, sont :

4° L'unité de quantité d'électricité.......	1 coulomb	=	10^{-1} u.é.m. G.G.S.
5° L'unité de différence de potentiel	1 volt	=	10^{8} u.é.m. G.G.S.
6° L'unité de travail....................	1 joule	=	10^{7} ergs.
7° L'unité de capacité..................	1 farad	=	10^{-9} u.é.m. G.G.S.
8° L'unité de self-inductance	1 henry	=	10^{9} u.é.m. G.G.S.

Il faut y ajouter :

9° L'unité de puissance	1 watt	=	10^{7} ergs-secondes

Le système légal d'unités électriques diffère extrêmement peu du système dont nous venons de rappeler la définition : la seule différence, au point de vue des définitions, est que ses unités principales, ampère international et ohm international, sont définies directement par leurs étalons ; nous savons d'ailleurs que ces définitions par les étalons doivent être bientôt abandonnées.

Si l'on borne le système pratique aux neuf unités légales dont nous venons de rappeler les définitions, on ne peut évidemment y appliquer que les relations qui ne contiennent pas d'autres grandeurs que les neuf grandeurs correspondantes. Il est naturel de définir une unité pratique de flux — qui vaut 10^8 maxwells — par la formule (19) ; mais les autres formules ne peuvent être appliquées que si l'on a rattaché le système pratique à un système d'unités mécaniques. Nous avons déjà dit (§ 134) que ce système peut être le système M. K. S. : toutes les formules du paragraphe 274 peuvent alors être appliquées en unités pratiques, à condition de prendre $\mu_0 = 10^{-7}$ et $\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9}$

II. — *RAPPORTS DES UNITÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET DES UNITÉS ÉLECTROSTATIQUES*

278. Rappel de quelques notions fondamentales. — Une grandeur d'espèce donnée est mesurable lorsqu'on peut définir le rapport de deux grandeurs de même espèce, c'est-à-dire lorsqu'on peut définir l'égalité et l'addition de ces grandeurs. Si, par exemple, nous considérons deux longueurs AB et A'B', que nous désignerons par les notations (L) et (L'), on définit leur rapport, que nous désignerons par la notation $\left(\frac{L}{L'}\right)$, en cherchant combien de fois il faut porter bout à bout la longueur A'B' pour reproduire la longueur AB ; ce rapport est un nombre : dans le cas de la figure 334, la longueur AB est la somme de trois longueurs AC, CD, DB, égales à A'B', et le rapport $\left(\frac{L}{L'}\right)$ est égal à 3.

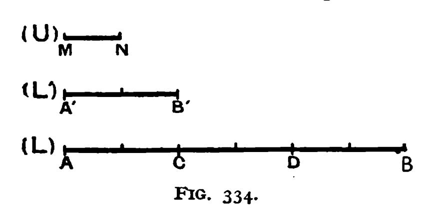


FIG. 334.

Si on choisit comme unité une certaine longueur MN, que nous désignerons par la notation (U), on peut définir le nombre qui mesure une longueur. Par définition, *le nombre l qui mesure une grandeur* (L) *est le rapport de cette grandeur à la grandeur de même espèce prise comme unité ;* on a :

$$l = \left(\frac{L}{U}\right).$$

On démontre que *le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui les mesurent avec une même unité :*

$$\left(\frac{L}{L'}\right) = \left(\frac{L}{U}\right) : \left(\frac{L'}{U}\right) = \frac{l}{l'}.$$

Dans le cas des longueurs de la figure 334, le nombre l, égal au rapport $\left(\frac{L}{U}\right)$, est 6; le nombre l', égal au rapport $\left(\frac{L'}{U}\right)$, est 2 : les rapports $\left(\frac{L}{L'}\right)$ et $\frac{l}{l'}$ sont égaux à 3.

Changeons maintenant d'unité, et prenons comme unité une nouvelle longueur M_1N_1 que nous désignerons par (U_1) ; soit $l_1 = \left(\frac{L}{U_1}\right)$ le nombre qui mesure la longueur (L) avec la nouvelle unité. On démontre que *le rapport des nombres qui mesurent une même grandeur avec deux unités différentes est égal à l'inverse du rapport de ces unités :*

Fig. 335.

$$\frac{l_1}{l} = \left(\frac{L}{U_1}\right) : \left(\frac{L}{U}\right) = \left(\frac{U}{U_1}\right).$$

Dans le cas de la figure 335, le nombre l est égal à 6, le nombre l_1 est égal à 2, et les rapports $\frac{l_1}{l}$ et $\left(\frac{U}{U_1}\right)$ sont égaux à $\frac{1}{3}$.

279. Rapports des différentes unités. — On peut considérer que les diverses unités électriques des deux systèmes électrostatique et électromagnétique sont déduites, par les relations du paragraphe 274, de l'unité de quantité d'électricité et des unités mécaniques de force et de travail. Ces unités mécaniques sont les mêmes pour les deux systèmes ; si l'on *connaît le rapport des unités de quantité d'électricité dans les deux systèmes, on peut calculer, par l'application des relations communes de définition, le rapport des deux unités correspondant à une grandeur électrique quelconque.* Effectuons ces calculs.

Nous désignerons par (Q_m) l'unité électromagnétique de quantité d'électricité ; par (Q_s) l'unité électrostatique, par **c** leur rapport. Si l'on mesure une même quantité d'électricité (Q) successivement dans les deux systèmes, le rapport des deux nombres q_m et q_s qui la mesurent est égal à $\frac{1}{c}$; on a :

$$c = \left(\frac{Q_m}{Q_s}\right) = \frac{q_s}{q_m}.$$

Considérons un certain courant d'intensité (I) qui, pendant un temps mesuré en secondes par le nombre t, transporte la quantité d'électricité (Q). La relation $q = it$ peut être appliquée successivement aux nombres qui mesurent les grandeurs (Q) et (I) dans les deux systèmes ; on obtient ainsi, en fonction de c, le rapport des nombres i_m et i_s qui mesurent l'intensité (I), et, par suite, le rapport des unités électromagnétique et électrostatique d'intensité de courant (I_m) et (I_s).

Des relations :

$$q_m = i_m t, \qquad q_s = i_s t,$$

on déduit :

$$\left(\frac{I_m}{I_s}\right) = \frac{i_s}{i_m} = \frac{q_s}{q_m} = c.$$

Considérons un point matériel électrisé portant la charge (Q), placé dans un champ électrique (E), mesuré, avec les unités (E_m) et (E_s), par les nombres e_m et e_s ; il est soumis à une force mesurée en dynes par le nombre f ; on a, entre les nombres f, q_m, q_s, e_m, e_s, les relations :

$$f = q_m e_m, \qquad f = q_s e_s,$$

d'où :

$$\left(\frac{E_m}{E_s}\right) = \frac{e_s}{e_m} = \frac{q_m}{q_s} = \frac{1}{c}.$$

Lorsqu'une quantité d'électricité (Q) subit une chute de potentiel (V), mesurée, avec les unités (V_m) et (V_s), par les nombres v_m et v_s, il apparaît une énergie mesurée en ergs par le nombre w ; on a :

$$w = q_m v_m, \qquad w = q_s v_s ;$$

$$\left(\frac{V_m}{V_s}\right) = \frac{v_s}{v_m} = \frac{q_m}{q_s} = \frac{1}{c}.$$

Lorsqu'un condensateur, entre les armatures duquel existe une différence de potentiel (V) porte une charge (Q), les nombres c_m et c_s qui mesurent sa capacité (C) avec les unités (C_m) et (C_s) sont définis par les relations :

$$q_m = c_m v_m, \qquad q_s = c_s v_s,$$

et on a :

$$\left(\frac{C_m}{C_s}\right) = \frac{c_s}{c_m} = \frac{q_s}{q_m} \cdot \frac{v_m}{v_s} = c^2.$$

On obtient de même, pour les nombres r_m et r_s qui mesurent, avec les unités (R_m) et (R_s), une résistance (R) parcourue par un courant d'intensité (I) et entre les bornes de laquelle existe une différence de potentiel (V) :

$$v_m = r_m i_m, \qquad v_s = r_s i_s,$$

$$\left(\frac{R_m}{R_s}\right) = \frac{r_s}{r_m} = \frac{v_s}{v_m} \cdot \frac{i_m}{i_s} = \frac{1}{c^2}.$$

Enfin, si une variation (dI) de l'intensité du courant dans un circuit, se produisant dans un temps mesuré en secondes par le nombre dt, s'accom-

pagne de la création d'une f. é. m. d'induction (V), les nombres l_m et l_s qui mesurent la self-inductance de ce circuit avec les unités $(\mathcal{L}_m)$ et $(\mathcal{L}_s)$ sont liés par les relations :

$$v_m = l_m \frac{di_m}{dt}, \qquad v_s = l_s \frac{di_s}{dt},$$

$$\left(\frac{\mathcal{L}_m}{\mathcal{L}_s}\right) = \frac{l_s}{l_m} = \frac{v_s}{v_m} \cdot \frac{di_m}{di_s} = \frac{1}{c^2}.$$

Nous avons exprimé tous les rapports en fonction du nombre **c**, rapport des unités électromagnétique et électrostatique de quantité d'électricité. Nous verrons tout à l'heure que, dans le système C. G. S., ce rapport est égal, à un millième près, à $3 \cdot 10^{10}$; nous pouvons dresser, des rapports entre les principales unités électriques, le tableau récapitulatif suivant :

Quantité d'électricité..	1 u.é.m. $= 3 \cdot 10^{10}$ u.é.s.;	1 coulomb	$= \frac{1}{10}$ u.é.m. $= 3 \cdot 10^9$ u.é.s.
Intensité de courant...	1 u.é.m. $= 3 \cdot 10^{10}$ u.é.s.;	1 ampère	$= \frac{1}{10}$ u.é.m. $= 3 \cdot 10^9$ u.é.s.
Différence de potentiel.	1 u.é.m. $= \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ u.é.s.;	1 volt	$= 10^8$ u.é.m. $= \frac{1}{3 \cdot 10^2}$ u.é.s.
Capacité.............	1 u.é.m. $= 9 \cdot 10^{20}$ u.é.s.;	1 farad	$= \frac{1}{10^9}$ u.é.m. $= 9 \cdot 10^{11}$ u.é.s.
Résistance...........	1 u.é.m. $= \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$ u.é.s.;	1 ohm	$= 10^9$ u.é.m. $= \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ u.é.s.
Self-inductance........	1 u.é.m. $= \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$ u.é.s.;	1 henry	$= 10^9$ u.é.m. $= \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ u.é.s.

280. Dimensions du nombre c. — Le rapport de deux grandeurs de même espèce est un nombre, qui ne dépend pas du choix de l'unité qui sert à les mesurer : il peut paraître absurde de parler des dimensions du nombre **c**. Mais il ne faut pas oublier que les deux grandeurs, dont le rapport est égal au nombre **c**, sont des unités dérivées, et qu'elles doivent être modifiées si l'on modifie les unités fondamentales. Comme elles sont définies par des conventions différentes, elles sont modifiées de façon différente, et leur rapport est aussi modifié : la valeur du nombre **c** dépend des valeurs choisies pour les unités fondamentales, et il est possible de représenter la façon dont il en dépend par une équation de dimensions.

Considérons deux systèmes d'unités, dans lesquels les formules qui définissent les unités électriques à partir des unités fondamentales mécaniques sont les mêmes, mais dans lesquels les unités fondamentales ont des valeurs différentes. Dans le premier, les unités fondamentales sont une certaine longueur (L), une certaine masse (M) et un certain temps (T) ; l'unité électrostatique de quantité d'électricité est une certaine quantité d'électricité (Q_s) et l'unité électromagnétique est une autre quantité d'électricité (Q_m) ; dans le second, les unités fondamentales sont des grandeurs (L'), (M'), (T'), et les deux unités de quantité d'électricité sont des quantités d'électricité (Q'_s) et (Q'_m). Dans le premier système, le rapport des unités électromagné-

tique et électrostatique de quantité d'électricité est un certain nombre $\mathbf{c}$; dans le second, c'est un nombre $\mathbf{c}'$; on a :

$$\mathbf{c} = \left(\frac{Q_m}{Q_s}\right), \qquad \mathbf{c}' = \left(\frac{Q'_m}{Q'_s}\right),$$

$$\frac{\mathbf{c}'}{\mathbf{c}} = \left(\frac{Q'_m}{Q'_s}\right) : \left(\frac{Q_m}{Q_s}\right).$$

Cette expression peut s'écrire :

$$\frac{\mathbf{c}'}{\mathbf{c}} = \left(\frac{Q'_m}{Q_m}\right) : \left(\frac{Q'_s}{Q_s}\right).$$

On le démontre facilement, en prenant une quantité d'électricité arbitraire (Q) comme unité, et en désignant par q_m, q'_m, q_s et q'_s les nombres qui mesurent, avec cette unité, les quatre grandeurs Q_m, Q'_m, Q_s et Q'_s ; on a alors :

$$\left(\frac{Q'_m}{Q'_s}\right) = \frac{q'_m}{q'_s}, \qquad \left(\frac{Q_m}{Q_s}\right) = \frac{q_m}{q_s}, \qquad \left(\frac{Q'_m}{Q_m}\right) = \frac{q'_m}{q_m}, \qquad \left(\frac{Q'_s}{Q_s}\right) = \frac{q'_s}{q_s};$$

et :

$$\left(\frac{Q'_m}{Q'_s}\right) : \left(\frac{Q_m}{Q_s}\right) = \left(\frac{Q'_m}{Q_m}\right) : \left(\frac{Q'_s}{Q_s}\right) = \frac{q'_m\, q_s}{q_m\, q'_s}.$$

Calculons les rapports $\left(\frac{Q'_m}{Q_m}\right)$ et $\left(\frac{Q'_s}{Q_s}\right)$ en utilisant les équations de dimensions des deux unités de quantité d'électricité :

$$Q_m = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}, \qquad Q_s = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Ces deux équations symboliques représentent (§ 78) les relations qui existent entre les nombres $\left(\frac{Q'_m}{Q_m}\right)$, $\left(\frac{Q'_s}{Q_s}\right)$, $\left(\frac{L'}{L}\right)$, $\left(\frac{M'}{M}\right)$ et $\left(\frac{T'}{T}\right)$:

$$\left(\frac{Q'_m}{Q_m}\right) = \left(\frac{L'}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M'}{M}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \left(\frac{Q'_s}{Q_s}\right) = \left(\frac{L'}{L}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{M'}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{T'}{T}\right)^{-1},$$

et on a finalement :

$$\frac{\mathbf{c}'}{\mathbf{c}} = \left(\frac{L'}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M'}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{L'}{L}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{M'}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{T'}{T}\right) = \left(\frac{L'}{L}\right)^{-1}\left(\frac{T'}{T}\right).$$

Si le premier système est le système C. G. S., les unités (L) et (T) sont le centimètre et la seconde ; le nombre $\mathbf{c}$ est égal à $3 \cdot 10^{10}$, c'est-à-dire au nombre $\boldsymbol{v}$ qui mesure en cm/sec la vitesse de la lumière dans le vide.

Calculons le nombre $\boldsymbol{v}'$ qui mesure cette vitesse dans le système (L'), (M'), (T'). Les dimensions de l'unité de vitesse sont :

$$V = LT^{-1}.$$

Le rapport des unités de vitesse des deux systèmes est :

$$\left(\frac{V'}{V}\right) = \left(\frac{L'}{L}\right)\left(\frac{T'}{T}\right)^{-1},$$

et le rapport des deux nombres v' et v qui mesurent la même vitesse dans les deux systèmes est :

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{V}{V'}\right) = \left(\frac{L'}{L}\right)^{-1}\left(\frac{T'}{T}\right) = \frac{c'}{c}.$$

Dans un système d'unités, basé sur les mêmes formules que le système C. G. S., mais dont les unités fondamentales sont quelconques, le rapport des unités électromagnétique et électrostatique de quantité d'électricité est égal au nombre qui mesure la vitesse de la lumière dans le vide.

C'est ce qu'on exprime d'une façon plus brève en disant que le rapport c a les dimensions d'une vitesse, et qu'il est égal à la vitesse de la lumière dans le vide. Nous verrons, par l'étude des relations de Maxwell, que le nombre c mesure effectivement une vitesse, la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide : l'identité de leurs vitesses de propagation dans le vide est le premier argument donné par Maxwell à l'appui de sa théorie de l'identité des ondes lumineuses et des ondes électromagnétiques.

III. — *MESURE DU RAPPORT* c

281. Caractère des méthodes. — Si l'on mesure une même grandeur électrique successivement en unités électromagnétiques et en unités électrostatiques, on obtient deux nombres, du rapport desquels on peut facilement déduire la valeur de c par les relations :

$$c = \frac{q_s}{q_m} = \frac{v_m}{v_s} = \left(\frac{C_s}{C_m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{r_m}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{l_m}{l_s}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La détermination de c *comporte donc deux mesures absolues d'une même grandeur, d'abord dans le système électromagnétique, puis dans le système électrostatique.* La première détermination a été effectuée en 1856 par Weber et Kohlrausch ; nous ne décrirons pas leurs expériences, qui n'ont qu'un intérêt historique. Si on les laisse de côté, on peut dire que tous les expérimentateurs ont mesuré l'une des deux grandeurs électriques — différence de potentiel ou capacité — dont la détermination directe en unités électrostatiques peut réellement être précise.

En général, on n'effectue pas la mesure absolue électromagnétique à partir des unités fondamentales mécaniques, mais à partir d'une résistance étalon, dont la valeur r_m en unités électromagnétiques est déterminée par comparaison avec l'ohm étalon : il est inutile de recommencer les déterminations absolues qui ont été exposées au chapitre précédent.

Nous allons donner quelques indications sur les deux méthodes — mesure des différences de potentiel et mesure des capacités — sans insister sur les détails de montage, qui varient d'un expérimentateur à l'autre.

282. Mesure des différences de potentiel. — La mesure de la valeur v_s d'une différence de potentiel (V) en u. é. s. s'effectue à l'aide d'un électromètre absolu, électromètre à plateaux ou électromètre cylindrique. Pour obtenir suffisamment de précision dans cette mesure avec les modèles ordinaires d'électromètres, il est nécessaire d'employer une source dont la f. é. m. soit supérieure à 1.000 volts; si l'on emploie des piles, il faut une batterie de plusieurs centaines de piles.

La mesure de la valeur v_m de la différence de potentiel (V) en u. é. m. peut résulter de sa comparaison, par une méthode d'opposition, avec une pile étalon; mais, comme la précision obtenue dans la construction d'une pile-étalon est inférieure à celle qu'on obtient dans les mesures absolues des courants et des résistances, on est amené à déterminer ensuite la valeur exacte de la f. é. m. de la pile étalon, en mesurant avec un électrodynamomètre le courant qu'elle produit dans une résistance étalon.

Aussi la plupart des expérimentateurs ont-ils préféré employer un dispo-

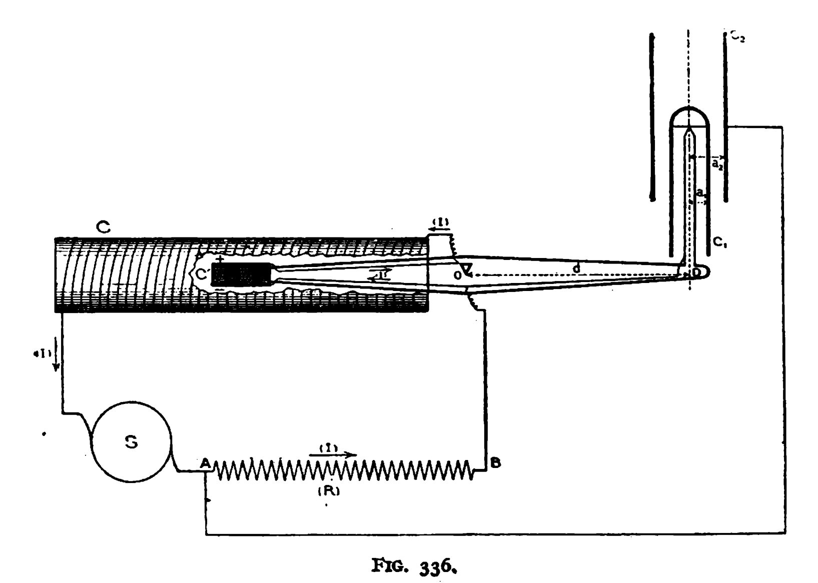


Fig. 336.

sitif utilisé pour la première fois par Lord Kelvin (1869), qui permet de faire simultanément les deux mesures à l'électromètre et à l'électrodynamomètre, et d'éviter les difficultés de réalisation d'une pile de f. é. m parfaitement constante. La différence de potentiel (V) est la différence de potentiel qui existe, lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité (I), entre les deux extrémités d'une résistance (R), assez grande, dont on a déterminé la valeur r_m en u. é. m. par comparaison, au pont de Wheatstone, avec un ohm étalon ; on mesure simultanément, à l'électromètre, la valeur v de la différence de potentiel (V) en u. é. s., et, à l'électrodynamomètre, la valeur i_m de l'intensité (I) en u. é. m. : cette dernière mesure donne la valeur $v_m = r_m \, i_m$ de la différence de potentiel (V) en u. é. m. La f. é. m. de la source n'a besoin d'être constante que pendant le temps nécessaire à la mesure.

On simplifie encore l'expérience en fixant sur le même fléau de balance les parties mobiles de l'électromètre et de l'électrodynamomètre, et en équilibrant l'une par l'autre les forces qui s'exercent sur elles. Dans les expériences de Maxwell (1868), le fléau commun portait l'un des plateaux d'un électromètre à plateaux et l'une des bobines d'un électrodynamomètre à bobines parallèles. Hurmuzescu (1895) emploie un électromètre cylindrique et un électrodynamomètre Pellat. La figure 336 représente le schéma de son montage : le courant (I), produit par la source S, qui est une dynamo de 2.000 volts, traverse les deux bobines C et C′ de l'électrodynamomètre, ainsi que la résistance (R), dont les extrémités A et B communiquent avec les deux armatures C_1 et C_2 de l'électromètre. Si n est le nombre de spires par centimètre du solénoïde indéfini C, N′ le nombre total de spires de la bobine C′ et S′ leur surface, le couple électrodynamique qui agit sur la bobine C′ (§ 265) est $\Gamma = 4\pi n N'S' i_m^2$; si a_1 et a_2 sont les rayons des cylindres de l'électromètre, la force qui agit sur le cylindre intérieur (§ 71) est $f = \frac{v_s^2}{4 \log \frac{a_2}{a_1}}$. Si d est le bras de levier OD, l'équilibre est atteint lorsqu'on a $\Gamma = fd$, d'où :

$$i_m^2 = \frac{v_s^2 d}{16\pi n N'S' \log \frac{a_2}{a_1}}.$$

Le rapport **c** est donné par :

$$\mathbf{c} = \frac{v_m}{v_s} = \frac{r_m i_m}{v_s} = r_m \sqrt{\frac{d}{16\pi n N'S' \log \frac{a_2}{a_1}}}.$$

Lorsque l'équilibre est atteint, il se maintient, quelles que soient les variations du courant (I). On le réalisera en réglant convenablement la résistance (R) : l'opération est assez facile, parce que l'équilibre obtenu est stable. Les seules mesures à faire, en dehors de celle de la résistance r_m, sont des mesures géométriques. La valeur trouvée pour le nombre **c** est 3,001, et la précision est de l'ordre du 1/500.

283. Mesure des capacités. — On réalise un condensateur calculable à lame d'air : certains expérimentateurs ont utilisé un condensateur cylindrique (J.-J. Thomson, 1883) ; d'autres un condensateur sphérique (Rosa, 1889) ; mais, le plus souvent, on a employé un condensateur plan à anneau de garde. La mesure de ses dimensions géométriques, surface S et distance des plateaux e, fournit la valeur de sa capacité (C) en u. é. s., $c_s = S / 4\pi e$.

On le charge sous une différence de potentiel (V) connue en u. é. m., en mettant ses armatures en communication avec les deux extrémités d'une résistance (R) parcourue par un courant d'intensité (I) : on a $v_m = r_m i_m$, et la valeur c_m de la capacité en u. é. m. se déduira de la mesure en u. é. m. de la valeur q_m de la charge (Q) prise par le condensateur.

La plupart des expérimentateurs font cette mesure par un procédé qui permet d'éliminer de l'équation finale la valeur i_m de l'intensité (I) : Ayrton et Perry (1879) mesurent la charge q_m à l'aide d'un galvanomètre balistique,

préalablement étalonné en courant continu à l'aide du courant (I) ; d'autres répètent la charge et la décharge avec une fréquence élevée. S'il y a ν décharges par seconde, le circuit de décharge est parcouru à chaque seconde par une quantité d'électricité $\nu(Q)$; un galvanomètre à période assez longue, placé dans ce circuit, subit une déviation constante, et mesure une intensité de courant (I′), dont la valeur en u. é. m. est $i'_m = \nu q_m = \nu c_m r_m i_m$. On a finalement :

$$c^2 = \frac{c_s}{c_m} = \frac{S}{4\pi e} \cdot \frac{\nu r_m i_m}{i'_m}, \qquad c = \sqrt{\frac{\nu S}{4\pi e}} \sqrt{r_m} \sqrt{\frac{i_m}{i'_m}}.$$

En dehors des dimensions géométriques S et e, on a à mesurer le nombre de décharges ν, la valeur r_m de la résistance (R) et le rapport des intensités $\left(\frac{I}{I'}\right) = \frac{i_m}{i'_m}$. Cette dernière mesure est, en général, effectuée par une méthode de zéro, soit par un montage analogue à celui du pont de Wheatstone (J.-J. Thomson, Rosa), soit par l'emploi du galvanomètre différentiel (Klemencic, 1884).

La figure 337 représente, en le simplifiant, le schéma des expériences

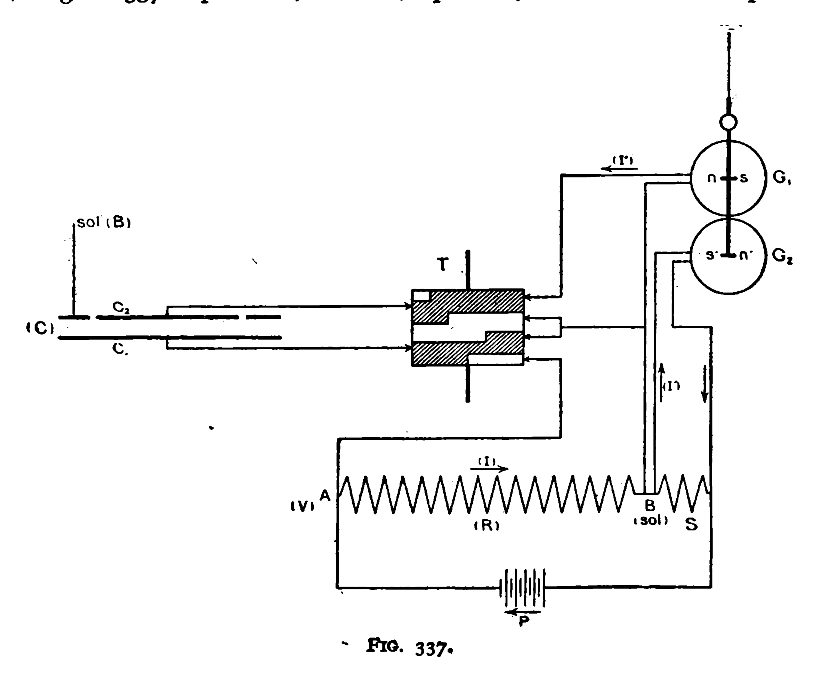


FIG. 337.

d'Abraham (1892). Le condensateur C est un condensateur plan à anneau de garde, formé par des lames de verre argentées. La surface S est d'environ 330 centimètres carrés et la distance e des lames est d'environ 7 millimètres : on mesure cette distance en observant les images d'une échelle formées par les réflexions successives sur les deux surfaces argentées. Un commutateur tournant T, soigneusement isolé, dont le nombre de tours ν est mesuré par un procédé stroboscopique, permet de charger et de décharger le condensateur

environ 20 fois par seconde. Il réalise à chaque tour les opérations suivantes : le collecteur C_2 communiquant directement avec le sol (extrémité B de la résistance), l'inducteur C_1 est porté du potentiel o du point B au potentiel (V) du point A, et le collecteur se charge par influence. Le commutateur introduit alors, entre le collecteur et le sol, le circuit G_1 du galvanomètre, puis réunit l'inducteur C_1 au sol B (position représentée par la figure) ; le collecteur se décharge à travers le galvanomètre. Enfin le commutateur rétablit la communication directe du collecteur avec le sol.

Le galvanomètre différentiel (§ 251) comprend deux cadres distincts, G_1 et G_2, agissant sur deux aiguilles différentes montées sur le même équipage; il est réglé de façon à rester au zéro lorsque les deux cadres sont parcourus par le même courant. Le cadre G_2 est intercalé, avec un shunt S, sur le circuit parcouru par le courant (I) ; on règle la résistance du shunt de façon que le galvanomètre reste au zéro. Les deux cadres sont alors parcourus par des courants d'intensité (I') égales, et le rapport $\left(\frac{I}{I'}\right)$ des intensités dans la résistance (R) et le cadre G_2 se déduit du rapport des résistances du shunt S et du cadre G_2.

Ces expériences ont fourni pour le rapport **c** la valeur 2,992 ; leur précision est voisine du millième.

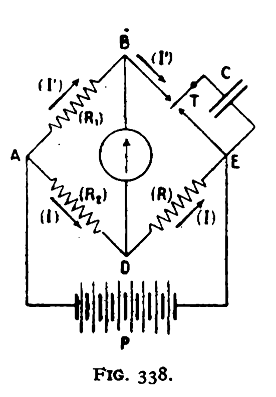


FIG. 338.

La figure 338 représente le schéma des montages qui utilisent un pont de Wheatstone : la résistance (R) est celle de la branche DE; lorsque le pont est équilibré, le courant (I) est celui qui parcourt les deux branches AD et DE, et la différence de potentiel (V) qui charge le condensateur par le commutateur tournant T est celle qui existe entre les points D et E. Le courant (I'), qui est le courant de charge du condensateur, est aussi celui qui parcourt la branche AB : l'égalité des chutes de potentiel dans les deux branches AB et AD donne $\left(\frac{I}{I'}\right) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)$; si les deux résistances (R_1) et (R_2) sont mesurées, avec une unité quelconque, par les nombres r_1 et r_2, on a :

$$c_m = \frac{i'_m}{v r_m i_m} = \frac{1}{v r_m}\cdot\frac{r_2}{r_1}, \qquad c = \sqrt{\frac{vS}{4\pi e}}\sqrt{r_m}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}.$$

284. Résultats. — Au moment où Maxwell basait, sur l'identité du rapport **c** et de la vitesse de la lumière, la théorie électromagnétique de la lumière (1865), les expériences de mesure de la vitesse de la lumière avaient donné des nombres compris entre 2,98 et $3{,}15 \cdot 10^{10}$, les mesures du rapport des unités avaient donné des nombres compris entre 2,807 et $3{,}107 \cdot 10^{10}$. La concordance était vérifiée au degré d'approximation des méthodes de mesure, et on pouvait admettre que la valeur de **c** était $3 \cdot 10^{10}$ à 2 ou 3 pour 100 près.

Il est extrêmement remarquable que la concordance se soit maintenue, et que, à mesure que la précision des mesures augmentait, les valeurs trouvées pour la vitesse de la lumière et le rapport des unités soient toujours restées

égales au degré d'approximation que comportaient les mesures. En 1900, les différentes méthodes de mesure avaient donné pour la vitesse de la lumière des nombres compris entre 2,998 et 3,004, et pour le rapport des unités des nombres compris entre 2,991 et 3,009 : on pouvait admettre que les deux nombres étaient égaux à 3.10^{10}, à environ 1/1.000 près.

Depuis, de nouvelles mesures extrêmement soignées du nombre c ont été faites par Rosa et Dorsey (1907). On a choisi la méthode des capacités : la réalisation d'un électromètre absolu de précision, c'est-à-dire d'une capacité calculable dont une armature est mobile, est en effet plus difficile que celle d'une capacité simple. D'autre part, la méthode des différences de potentiel fait dépendre c de la première puissance du nombre r_m qui mesure, en valeur absolue, la résistance étalon employée, tandis que, dans la méthode des capacités, on obtient une formule dans laquelle c est proportionnel à $\sqrt{r_m}$: l'erreur sur la mesure de r_m qui résulte de l'inexactitude de l'ohm international entraîne une erreur relative deux fois moins grande dans la méthode des capacités.

Rosa et Dorsey ont utilisé des condensateurs de diverses formes plans, cylindriques et sphériques; ils ont fait avec le plus grand soin les diverses corrections, et en particulier ont tenu compte, pour le calcul de la capacité c_s, du pouvoir inducteur spécifique de l'air qui constitue le diélectrique du condensateur. Ils espèrent être arrivés à une précision du dix-millième, et donnent, après réduction à l'ohm vrai de la valeur r_m primitivement rapportée à l'ohm international (cf. § 273 *bis*) :

$$c = 2,9979 . 10^{10}.$$

La vitesse de la lumière dans le vide, d'après les mesures les plus récentes et les plus précises (Michelson, 1932), est :

$$v = 2,9977. 10^{10},$$

l'erreur sur ce nombre étant certainement très inférieure à 1/10.000. On voit qu'on peut conclure que :

Au degré d'approximation des expériences actuelles, qui est de l'ordre du dix-millième, le rapport des unités électromagnétique et électrostatique de quantité d'électricité est égal à la vitesse de la lumière dans le vide. On peut prendre pour sa valeur, avec une erreur inférieure à 1/1.000, *le nombre* 3.10^{10} C. G. S.

SIXIÈME PARTIE

COURANTS ALTERNATIFS

CHAPITRE XXVIII

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE ET LOI D'OHM

I. — *FONCTIONS PÉRIODIQUES ET FONCTIONS SINUSOIDALES*

285. Définitions. — On dit qu'une fonction $y = f(t)$ du temps t est une **fonction périodique de période** T, lorsqu'il existe un intervalle de temps T tel qu'elle reprenne la même valeur à deux instants quelconques, séparés par l'intervalle T, c'est-à-dire lorsqu'on a identiquement, quel que soit t :

$$f(t) = f(t + T).$$

On appelle **fréquence** de la fonction périodique, et nous désignerons par la lettre ν, le nombre de périodes comprises dans l'unité de temps, c'est-à-dire dans une seconde ; on a :

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Les fonctions périodiques qu'on a le plus souvent à considérer sont des *fonctions périodiques symétriques*, c'est-à-dire des fonctions telles qu'au bout d'une demi-période elles reprennent la même valeur changée de signe :

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Les fonctions périodiques les plus importantes sont les **fonctions sinusoïdales.** Une fonction sinusoïdale reprend la même valeur lorsque l'argument augmente de 2π ; si l'on prend comme origine des temps l'instant où elle atteint sa valeur maximum, une fonction sinusoïdale symétrique est de la forme :

$$y = Y \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Nous l'écrirons généralement :

$$y = Y \cos \omega t.$$

La quantité ω s'appelle la **pulsation,** elle est liée à la période et à la fréquence par les relations :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

La quantité Y est la valeur maximum de la fonction sinusoïdale : dans le cas où y représente l'élongation d'un mouvement pendulaire, Y en est l'amplitude.

Si l'on considère simultanément deux fonctions sinusoïdales y et z de même période, et si l'on prend comme origine des temps l'instant où la fonction y atteint sa valeur maximum, les deux fonctions y et z se mettront sous les formes :

$$y = Y \cos \omega t, \qquad z = Z \cos (\omega t - \varphi).$$

L'angle φ s'appelle la **différence de phase** entre les deux fonctions ; comme il n'est défini qu'à $2k\pi$ près, on peut toujours lui attribuer une valeur comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Tandis que la fonction y atteint son maximum à l'instant $t = 0$, la fonction z l'atteint à l'instant $t = \frac{\varphi}{\omega} = T \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$: si φ est compris entre 0 et π, la fonction z est *en retard* sur la fonction y ; si φ est compris entre 0 et $-\pi$, z est *en avance* sur y. Si $\varphi = 0$, les deux fonctions atteignent simultanément leurs maxima, s'annulent en même temps et sont constamment de même signe : on dit qu'elles sont en accord de phase, ou simplement qu'elles sont *en phase*, ou encore qu'elles ont même phase. Si $\varphi = \pm \pi$, leurs valeurs absolues atteignent en même temps leurs maxima, et s'annulent en même temps ; mais les deux fonctions sont constamment de signes contraires : on dit qu'elles sont en *opposition de phase*, ou encore que leurs phases sont opposées. Si $\varphi = +\pi / 2$, la fonction z atteint son maximum au temps $t = T / 4$, c'est-à-dire un quart de période après la fonction y : elle est en *quadrature retard* sur y ; si $\varphi = -\pi / 2$, z est en *quadrature avance* sur y.

L'importance des fonctions sinusoïdales vient de ce que l'étude d'une fonction périodique quelconque peut toujours être ramenée à l'étude de fonctions sinusoïdales, grâce au **théorème de Fourier,** dont nous donnerons seulement l'énoncé :

Une fonction périodique quelconque $f(t)$, *de période* T, *peut toujours être décomposée, et cela d'une seule façon, en une somme de fonctions sinusoïdales, de périodes* $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots, \frac{T}{k} \ldots$ On a :

$$f(t) = Y_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_1\right) + Y_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{\frac{T}{2}} - \varphi_2\right) + Y_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{\frac{T}{3}} - \varphi_3\right) \ldots + Y_k \cos\left(\frac{2\pi t}{\frac{T}{k}} - \varphi_k\right) + \ldots$$

Les coefficients $Y_1, Y_2, \ldots Y_k \ldots ; \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k \ldots$ peuvent toujours être calculés, et sont entièrement déterminés, lorsqu'on se donne la fonction $f(t)$. Le premier terme est le *terme fondamental ;* les suivants sont les *harmoniques ;* la

fréquence de l'harmonique de rang k est égale à k fois la fréquence du terme fondamental.

286. Représentations géométriques. — Considérons (*fig.* 339) un vecteur $\overrightarrow{OM}$, de longueur OM = Y, tournant d'un mouvement de rotation uniforme, de période T, autour d'une de ses extrémités O ; il décrit dans le temps T un angle égal à 2π, et fait $\nu = \frac{1}{T}$ tours par seconde ; sa vitesse angulaire, c'est-à-dire l'angle qu'il décrit par seconde, est $\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$. Soit $\overrightarrow{OA}$ sa direction à l'instant $t = 0$: à l'instant t, l'angle des deux directions $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ est ωt, et la projection $\overrightarrow{Om}$ du vecteur tournant $\overrightarrow{OM}$ sur la direction fixe $\overrightarrow{OA}$ est $y = Y \cos \omega t$. *Une fonction sinusoïdale peut être représentée géométriquement par la projection, sur une direction fixe, d'un vecteur tournant,*

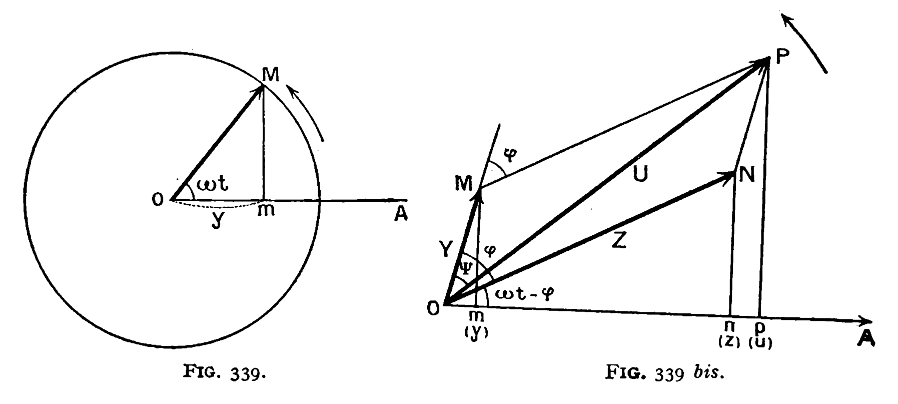


FIG. 339. FIG. 339 *bis*.

dont la longueur est égale à la valeur maximum de la fonction sinusoïdale, et dont la vitesse angulaire est égale à sa pulsation.

Représentons sur la même figure (*fig.* 339 *bis*) la fonction $z = Z \cos(\omega t - \varphi)$: on peut considérer z comme la projection $\overrightarrow{On}$ sur la direction $\overrightarrow{OA}$ d'un vecteur $\overrightarrow{ON}$, de longueur ON = Z, faisant avec $\overrightarrow{OA}$, à l'instant t, l'angle $\omega t - \varphi$. Les deux fonctions sinusoïdales ayant même période, les deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ tournent avec la même vitesse angulaire, et font entre eux un angle constant, égal à la différence de phase φ des deux fonctions ; le mouvement du vecteur $\overrightarrow{ON}$ est en retard de l'angle φ sur celui du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On a souvent à calculer la somme $u = y + z$ de deux fonctions sinusoïdales de même période. Elle est égale à la somme algébrique $\overrightarrow{Om} + \overrightarrow{On}$ des projections sur la direction $\overrightarrow{OA}$ des deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$, par conséquent à la projection $\overrightarrow{Op}$ de leur résultante $\overrightarrow{OP}$. Comme les deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ tournent en formant un angle constant, la figure OMNP tourne sans se déformer, et le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur de grandeur constante, tournant avec

une vitesse angulaire ω ; sa projection $\overrightarrow{Op}$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω : *la somme de deux fonctions sinusoïdales de même période est encore une fonction sinusoïdale de même période.* Sa valeur maximum U est égale à la longueur OP du vecteur $\overrightarrow{OP}$; sa différence de phase ψ avec la fonction y est égale à l'angle des directions $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$.

Ces quantités peuvent être calculées en appliquant les formules de la trigonométrie au triangle OMP ou être déterminées graphiquement : il suffit, pour cette dernière détermination, de construire le triangle OMP dans une position quelconque. On aboutit ainsi aux règles suivantes :

On choisit une direction quelconque Ox comme origine des angles qui représentent les différences de phase, et on convient de compter dans un certain sens les avances de phase, dans l'autre les retards (*fig.* 340). On représente la fonction $y = \text{Y} \cos \omega t$ par un vecteur $\overrightarrow{OM}$, de longueur OM = Y, porté suivant Ox ; on représente la fonction $z = \text{Z} \cos (\omega t - \varphi)$ par un vecteur $\overrightarrow{ON}$, de longueur ON = Z, faisant avec la direction Ox un angle φ, les valeurs positives de φ étant portées dans le sens des retards. *La fonction $u = \text{U} \cos (\omega t - \psi)$, égale à la somme des deux fonctions y et z, est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OP}$, égal à la somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ qui représentent ces deux fonctions.* La quantité U est égale à la longueur OP ; la différence de phase ψ est égale à l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$: dans le cas de la figure 340, la fonction u est en retard sur la fonction y et en avance sur la fonction z.

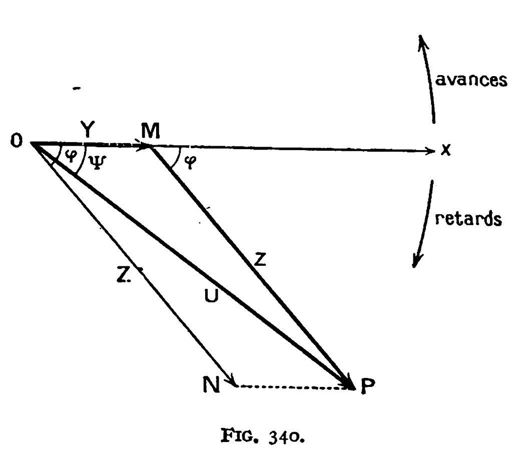


FIG. 340.

Cette règle d'addition est désignée sous le nom de **règle de Fresnel.** Il est aisé de l'étendre à l'addition d'un nombre quelconque de fonctions sinusoïdales de même période : leur somme est représentée par un vecteur égal à la somme géométrique des vecteurs qui représentent les fonctions composantes.

287. Valeur efficace d'une fonction périodique. — La valeur moyenne d'une fonction périodique symétrique $y = f(t)$ est toujours nulle : si, en effet, on calcule pendant une période cette valeur moyenne $\frac{1}{\text{T}}\int_0^{\text{T}} y \, dt$, les éléments de l'intégrale s'annulent deux à deux, puisqu'on a $f(t) + f\left(t + \frac{\text{T}}{2}\right) = 0$.

Il n'en est plus de même si l'on calcule la valeur moyenne du carré y^2 de la fonction y, puisque la quantité y^2 est toujours positive. On est ainsi amené à définir la **valeur efficace** d'une fonction périodique : *c'est une quantité* Y_e *dont*

le carré Y_e^2 est égal à la valeur moyenne du carré y^2 de la fonction périodique :

$$Y_e^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2 dt.$$

Si la fonction y est une fonction sinusoïdale, $y = Y \cos(\omega t - \varphi)$, on a :

$$Y_e^2 = \frac{Y^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi)\, dt.$$

La quantité $\cos^2(\omega t - \varphi)$ est une fonction périodique dissymétrique, de période $T / 2$; sa valeur moyenne, calculée sur un nombre entier de périodes, ne dépend évidemment pas de l'instant auquel on les fait commencer. On a en particulier :

$$\int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi)\, dt = \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}+T} \cos^2(\omega t' - \varphi)\, dt',$$

ou, en faisant dans la seconde intégrale le changement de variable $t' = t + \frac{T}{4}$, c'est-à-dire $\omega t' = \omega t + \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi)\, dt = \int_0^T \sin^2(\omega t - \varphi)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T [\cos^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t - \varphi)]\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T dt = \frac{T}{2}.$$

On a donc :

$$Y_e^2 = \frac{Y^2}{2}, \qquad Y_e = \frac{Y}{\sqrt{2}}.$$

La valeur efficace d'une fonction sinusoïdale est égale à sa valeur maximum divisée par $\sqrt{2}$.

Il importe de remarquer que cette règle ne s'applique pas aux fonctions périodiques générales, mais seulement aux fonctions sinusoïdales.

II. — *NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES COURANTS ALTERNATIFS*

288. Généralités. — Nous avons déjà indiqué (§ 222) que, lorsqu'on fait tourner un cadre portant un enroulement conducteur dans un champ magnétique uniforme, on obtient une f. é. m. sinusoïdale $e = E \cos \omega t$, dont la pulsation ω est égale à la vitesse angulaire de rotation du cadre. Si le circuit du cadre est ouvert, il existe entre ses deux extrémités une différence de potentiel sinusoïdale, égale à cette f. é. m.

Nous étudierons, au chapitre XL, les **alternateurs** employés actuellement pour la production industrielle des courants alternatifs. Ils fournissent des f. é. m. périodiques, un tour de l'alternateur comprenant un nombre entier de périodes ; l'importance des harmoniques est d'ailleurs généralement assez réduite. Nous n'étudierons dans ce qui suit que les f. é. m. sinusoïdales, et nous admettrons qu'on peut pratiquement confondre avec des f. é. m. sinusoïdales les f. é. m. réellement employées dans la pratique.

Si l'on place un alternateur dans un circuit fermé, on y obtient un courant périodique, dont la période est celle de la f. é. m. Nous verrons plus loin (§ 293 et suivants) que, si la f. é. m. est sinusoïdale, et si la résistance, la self-inductance et la capacité du circuit sont bien définies, l'intensité du courant qui le parcourt est également représentée par une fonction sinusoïdale, mais qu'il existe en général entre la f. é. m. et l'intensité du courant une différence de phase φ : la f. é. m. étant $e = E \cos \omega t$, l'intensité du courant est $i = I \cos (\omega t - \varphi)$. Nous supposerons toujours ces hypothèses réalisées; en toute rigueur, les formules que nous obtiendrons ne sont pas applicables aux circuits comprenant des bobines à noyaux de fer, dont la self-inductance n'est pas définie (§ 230); en pratique, on pourra les appliquer à condition que le fer reste loin de la saturation. Mais il importe de signaler que, lorsqu'on s'approche de la saturation, la courbe qui représente les variations avec le temps de l'intensité du courant alternatif n'a plus du tout la même forme que celle qui représente les variations de la f. é. m. : on peut, à partir d'une f. é. m. sinusoïdale, obtenir un courant riche en harmonique.

Les fréquences des courants alternatifs employés industriellement forment une gamme très étendue: on emploie pour la traction des fréquences de 15 à 25, et pour les distributions d'énergie une fréquence standard de 50 ; les courants téléphoniques, qui ont même période que les sons qu'ils transmettent, ont des fréquences de l'ordre de 1.000 ; on utilise en télégraphie sans fil des fréquences allant de 10.000 à 20.000.000. Ces dernières sont appelées les *hautes fréquences* ; les deux autres catégories forment, par opposition, les *basses fréquences* : les fréquences correspondant à celles des sons sont appelées des *fréquences musicales*.

Dans les distributions d'énergie, les différences de potentiel réalisées ont des valeurs efficaces de l'ordre de quelques milliers de volts aux bornes des alternateurs, de 100 à 200 volts aux bornes des appareils d'éclairage, et peuvent atteindre et dépasser 200.000 volts dans les lignes de transport. La transformation d'un courant alternatif en un autre courant alternatif de même période, transportant la même énergie sous une différence de potentiel différente, s'effectue à l'aide d'appareils statiques, appelés **transformateurs**, que nous étudierons au chapitre XL.

Dans l'étude des propriétés des courants alternatifs, nous ferons les mêmes hypothèses que nous avons déjà faites dans l'étude des courants variables (§ 222) : nous admettrons qu'à un instant donné l'intensité est la même en tous les points du circuit, et qu'on peut appliquer à chaque instant les lois d'Ohm et de Joule, ainsi que les lois de l'électromagnétisme et de l'induction. Nous devons faire les mêmes réserves qu'au paragraphe 222 : ces hypothèses sont toujours valables pour des circuits de faible longueur parcourus par des courants de basse fréquence, elles peuvent devenir inexactes dans le cas des hautes fréquences, ou pour des lignes très longues parcourues par des cou-

rants de basse fréquence ; nous reviendrons plus tard (cf. § 335) sur ces cas d'exception.

289. Mesure de la fréquence d'un courant alternatif. — Les méthodes à employer dépendent de l'ordre de grandeur de cette fréquence. Nous indiquerons plus tard le procédé qu'on emploie pour les courants de haute fréquence (§ 321) ; pour des courants de fréquence musicale, il suffit d'intercaler dans le circuit un téléphone, et de déterminer, par comparaison par exemple avec des diapasons, la hauteur du son obtenu.

Dans le cas des courants de basse fréquence employés dans les transports d'énergie, on n'a presque jamais à faire cette mesure : si l'on peut accéder à l'alternateur qui les produit, il suffit de regarder comment il est construit pour savoir combien il donne de périodes par tour, et de mesurer, à l'aide d'un compteur de tours, le nombre de tours par seconde pour déterminer la fréquence. Si l'on ne peut pas accéder à l'alternateur, le meilleur procédé est de faire tourner, à l'aide du courant, un moteur synchrone (§ 442) et de compter le nombre de tours qu'il fait dans un temps donné. Nous indiquerons dans le prochain chapitre des procédés basés sur l'inscription galvanométrique (§ 304) ou la résonance d'une lame vibrante (§ 301). Nous nous contenterons ici d'indiquer un procédé basé sur les phénomènes d'électrolyse.

Sur une plaque de cuivre L (*fig.* 341), on étale une feuille de papier fort imbibée d'une solution de ferrocyanure de potassium et d'azotate d'ammonium, et on fait passer le courant à travers la feuille de papier en prenant comme électrodes la lame de cuivre et une pointe de fer P. Quand la pointe de fer joue le rôle d'anode dans l'électrolyse, elle constitue une anode soluble, et forme une solution de sel ferrique qui, au contact du ferrocyanure, donne du bleu de Prusse. Si on fait glisser la tige de fer sur le papier, on obtient un trait bleu discontinu, car elle est, à chaque période, successivement anode et cathode. Il suffit de remplacer la feuille de cuivre par un cylindre enregistreur de laiton qui tourne devant la pointe de fer fixe pour obtenir un enregistrement, qui permet de mesurer la fréquence, si l'on inscrit en même temps, par le même procédé, les battements d'un pendule à secondes.

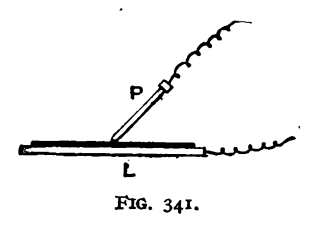


FIG. 341.

290. Loi de Joule. — Si un conducteur de résistance r est parcouru, de l'instant t à l'instant $t + dt$, par un courant d'intensité i, il y apparaît pendant ce temps, et quels que soient les autres phénomènes qui y ont leur siège, une quantité de chaleur dQ donnée par :

$$JdQ = ri^2dt.$$

Si le courant i est un courant périodique de période T, la quantité de chaleur Q dégagée par période est donnée par :

$$JQ = r\int_0^T i^2dt = rI_e^2T.$$

La quantité I_e définie par cette expression n'est autre, d'après la définition générale du paragraphe 287, que l'*intensité efficace* du courant périodique.

La loi de Joule peut être exprimée par la même relation en courant alternatif qu'en courant continu, à condition de remplacer l'intensité du courant continu par l'intensité efficace du courant alternatif.

On voit par là l'importance de la notion d'intensité efficace : c'est la quantité qu'il faut connaître pour calculer l'échauffement d'un conducteur parcouru par un courant alternatif, soit qu'il s'agisse de calculer les pertes par effet Joule dans un alternateur, un transformateur ou un moteur, soit qu'il s'agisse de réaliser un appareil de chauffage ou une lampe à incandescence. C'est également la quantité dont la valeur est donnée directement par un ampèremètre thermique (§ 149), étalonné en courant continu et parcouru par le courant alternatif.

Rappelons que, si le courant est un courant sinusoïdal $i = I \cos(\omega t - \varphi)$, l'intensité efficace I_e est égale à l'intensité maximum I divisée par $\sqrt{2}$.

291. Puissance transportée par un courant alternatif. — Considérons, entre deux points A et B (*fig.* 342), un circuit C quelconque parcouru par un courant sinusoïdal. A l'instant t, la différence de potentiel entre les points A et B, comptée positivement quand le potentiel de A est supérieur à celui de B, est $v = V \cos \omega t$; le courant n'est, en général, pas en phase avec la différence de potentiel (cf. § 288) ; son intensité à l'instant t, comptée positivement quand il va de A vers B, est $i = I \cos(\omega t - \varphi)$. Entre les instants t et $t + dt$, le courant i transporte une quantité d'électricité $i\,dt$, qui subit une chute de potentiel v ; ce transport fournit une énergie :

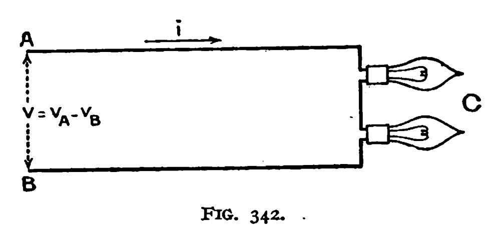


FIG. 342.

$$dW = vi\,dt.$$

L'énergie électrique apportée par le courant dans le circuit C pendant une période est :

$$W = \int_0^T vi\,dt = VI \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi)\,dt.$$

On a :

$$\int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos \varphi\,dt.$$

La première intégrale a pour valeur $\frac{1}{2\omega}\Big[\sin(2\omega t - \varphi)\Big]_0^T$ et est nulle quand on l'étend à une période entière. La seconde est égale à $T \cos \varphi$, et on a :

$$W = \frac{VIT \cos \varphi}{2} = \frac{V}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}} T \cos \varphi = V_e I_e \cos \varphi \,.\, T.$$

La puissance moyenne $\mathfrak{P}$ transportée par le courant alternatif est :

$$\mathfrak{P} = \frac{W}{T} = V_e I_e \cos \varphi.$$

La puissance moyenne transportée par un courant alternatif est égale au produit de l'intensité efficace par la différence de potentiel efficace, multiplié par le cosinus de la différence de phase qui existe entre la différence de potentiel et l'intensité.

Cette expression diffère de l'expression de la puissance en courant continu, non seulement par la substitution des valeurs efficaces aux valeurs continues, mais encore par l'introduction du facteur cos φ, qu'on appelle le **facteur de puissance.**

La formule de la **loi** de Joule est applicable quelle que soit la résistance considérée, résistance d'un conducteur avec ou sans self, résistance d'un générateur ou d'un moteur. La formule de la puissance, $\mathfrak{P} = V_e I_e \cos \varphi$, appliquée à la différence de potentiel v aux bornes d'un générateur, donne la puissance disponible dans le circuit extérieur; la même formule, $\mathfrak{P} = E_e I_e \cos \varphi'$, appliquée à la force électromotrice e du générateur, donne la puissance totale fournie par le générateur. De même pour un moteur, suivant qu'on introduit dans la formule la différence de potentiel aux bornes ou la force contre-électromotrice, on obtient la puissance totale consommée par le moteur, ou la puissance transformée en travail. Dans l'un et l'autre cas, la différence entre les deux expressions représente la puissance transformée en chaleur à l'intérieur du générateur ou du moteur; si l'on veut en effectuer le calcul, il importe de tenir compte, non seulement de ce que la différence de potentiel aux bornes et la force électromotrice — ou contre-électromotrice — n'ont pas la même valeur efficace, mais encore de ce qu'elles présentent, en général, une différence de phase.

Si nous développons l'expression de l'intensité :

$$i = I \cos (\omega t - \varphi) = I \cos \varphi \cos \omega t + I \sin \varphi \sin \omega t,$$

et si nous posons :

$$i = i' + i'', \qquad i' = I \cos \varphi \cos \omega t, \qquad i'' = I \sin \varphi \sin \omega t,$$

nous voyons que le courant i peut être considéré comme la somme de deux courants i' et i'' ; le premier, en phase avec la différence de potentiel $v = V \cos \omega t$, a pour intensité efficace $I'_e = I_e \cos \varphi$; le second, en quadrature avec la différence de potentiel, a pour intensité efficace $I''_e = I_e \sin \varphi$. L'expression de la puissance peut alors se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{P} = V_e I_e \cos \varphi = V_e I'_e.$$

La puissance transportée par un courant alternatif peut être calculée, à partir des valeurs efficaces de la différence de potentiel et de l'intensité, par la même formule qu'en courant continu, à condition de remplacer le courant i par sa composante i' en phase avec la différence de potentiel : c'est pourquoi le courant i' s'appelle le **courant watté.** La puissance ne dépend pas de l'intensité de la composante i'' en quadrature avec la différence de potentiel : le courant i'' s'appelle le **courant déwatté.**

292. Mesure de l'intensité et de la différence de potentiel efficaces. — Étudions d'abord le passage du courant alternatif dans une résistance r, dépourvue de self-induction et ne contenant aucune f. é. m. Si l'intensité du courant qui la parcourt à l'instant t est i, il existe à cet instant, entre ses extrémités, une différence de potentiel $v = ri$; le rapport des quantités v^2 et i^2 est égal à chaque instant à r^2, et il en est de même du rapport de leurs valeurs moyennes V_e^2 et I_e^2 : les valeurs efficaces V_e et I_e sont liées par la formule ordinaire de la loi d'Ohm, $V_e = rI_e$. Si l'on considère un réseau de conducteurs dépourvus de self-induction, on peut appliquer de même les expressions des lois d'Ohm et de Kirchhoff valables en courant continu, aussi bien aux valeurs à un instant t quelconque qu'aux valeurs efficaces des intensités et des différences de potentiel.

Nous avons déjà signalé (§ 290) que la valeur de l'intensité efficace du courant dans un ampèremètre thermique est donnée directement par l'appareil, quelles que soient la fréquence et la forme du courant alternatif ; si on le shunte, ou si on lui ajoute des résistances additionnelles, on obtient des ampèremètres et des voltmètres permettant de mesurer la valeur efficace de n'importe quelle intensité ou de n'importe quelle différence de potentiel. *Les indications des divers appareils thermiques sont les mêmes en courant alternatif qu'en courant continu, et sont indépendantes de la fréquence, même pour les courants de haute fréquence, à condition que les shunts et les résistances additionnelles soient dépourvus de self-induction.*

Signalons en passant que l'on peut, dans les mesures en courant alternatif, supprimer les shunts ou les résistances additionnelles en réduisant dans un rapport convenable la différence de potentiel ou l'intensité à mesurer par un **transformateur de mesure** identique, en principe, aux transformateurs industriels (§§ 447 et 448) : la connaissance du rapport de transformation permet en effet de déduire, de mesures faites dans le circuit secondaire, les valeurs de la différence de potentiel ou de l'intensité relatives au circuit primaire.

En dehors des appareils thermiques, *on peut employer aux mesures en courant alternatif tous les appareils dans lesquels l'équipage mobile est soumis à une force (ou à un couple) proportionnelle au carré de la grandeur à mesurer* : si la période de ses oscillations est grande par rapport à la période du courant, ce qui est toujours le cas dans les appareils industriels, il prend une position d'équilibre correspondant à la valeur moyenne de la force, donc à la valeur efficace de la grandeur à mesurer.

C'est ainsi qu'on peut mesurer la valeur efficace d'une différence de potentiel alternative avec un **électromètre** ou un **voltmètre électrostatique** (§ 72), qu'on peut mesurer la valeur efficace d'une intensité de courant avec un **électrodynamomètre** (§ 257). Les **wattmètres** (§ 257) peuvent également être employés en courant alternatif : la self-inductance du cadre mobile et de sa résistance additionnelle est toujours assez faible pour qu'on puisse admettre, tout au moins aux basses fréquences, que l'intensité i' du courant qui le parcourt à l'instant t est donnée par la relation $i' = v/r$ et est proportionnelle à la différence de potentiel v qui existe au même instant entre les bornes du circuit. Le couple qui s'exerce sur le cadre mobile est proportionnel à chaque instant au produit vi, et sa valeur moyenne est proportionnelle à la valeur moyenne $V_eI_e \cos \varphi$ de ce produit : la déviation de

l'appareil **donne directement la valeur de la** puissance consommée dans le circuit **étudié.**

Les **instruments** les plus employés à l'heure actuelle ponr les basses fréquences sont les **appareils électromagnétiques à fer doux mobile** (§ 252). Pour les fréquences de 25 à 2.000, on emploie de plus en plus des **appareils à redresseurs,** dans lesquels le courant, redressé par un redresseur à oxyde de cuivre, (§ 320) est mesuré par un appareil à cadre mobile : ces appareils, beaucoup plus sensibles que les précédents, peuvent donner une déviation qui couvre toute l'échelle pour une consommation de l'ordre de quelques milliwatts (cf. § 256).

Enfin, comme appareil de zéro dans les mesures de laboratoire (§ 300), on emploie généralement des **galvanomètres à vibration** (§ 301), permettant de déceler, pour les fréquences industrielles, des courants de l'ordre de 10^{-8} ampère en consommant une puissance de l'ordre de 10^{-13} watt.

III. — *APPLICATION DE LA LOI D'OHM*

293. Conducteurs possédant une résistance et une self-induction. — Soit un conducteur AB (*fig.* 343), de résistance r, de self-inductance L, parcouru par un courant variable, dont l'intensité à l'instant t est i; la différence de potentiel v entre les points A et B est égale, à cet instant, à la somme de la chute de potentiel ohmique ri et de la f. é. m. de self-induction $L\,di/dt$ qui existent dans le conducteur (§ 233). On a :

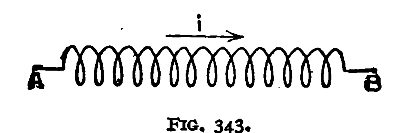


Fig. 343.

$$L\frac{di}{dt} + ri = v.$$

L'intensité i est comptée positivement lorsque le courant va de A vers B, et la différence de potentiel v est positive lorsque le potentiel du point A est supérieur à celui du point B.

Si l'on se donne i, sous la forme d'une fonction sinusoïdale du temps, $i = I\cos(\omega t - \varphi)$, on peut calculer sa dérivée $di/dt = -I\omega\sin(\omega t - \varphi)$, et il suffit de porter ces valeurs dans l'équation pour obtenir v. On trouve une fonction sinusoïdale, de même période que i, dont le développement est :

$$v = L\frac{di}{dt} + ri = (L\omega\sin\varphi + r\cos\varphi)\,I\cos\omega t + (-L\omega\cos\varphi + r\sin\varphi)\,I\sin\omega t.$$

Inversement, on peut connaître la valeur de v, par exemple se donner $v = V\cos\omega t$, et chercher à calculer la fonction i; l'équation qui la fournit est une équation différentielle linéaire avec second membre. L'intégrale générale est la somme d'une intégrale particulière et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre ; cette dernière, $Ae^{-\frac{rt}{L}}$, est rapidement amortie (§ 238), et on obtient la fonction qui représente le courant, lorsque le régime pério-

dique est établi, en cherchant simplement l'intégrale particulière périodique. Nous avons vu comment, à partir d'une intensité donnée $i = \mathrm{I}\cos(\omega t - \varphi)$, on pouvait calculer la différence de potentiel v : on répétera le même calcul, et on choisira I et φ de façon que la fonction trouvée soit identique à la fonction donnée $v = \mathrm{V}\cos\omega t$, c'est-à-dire de façon qu'on ait :

$$(\mathrm{L}\omega\sin\varphi + r\cos\varphi)\,\mathrm{I}\cos\omega t + (-\mathrm{L}\omega\cos\varphi + r\sin\varphi)\,\mathrm{I}\sin\omega t \equiv \mathrm{V}\cos\omega t,$$

Pour que cette identité soit vérifiée quel que soit t, on doit avoir :

$$(\mathrm{L}\omega\sin\varphi + r\cos\varphi)\,\mathrm{I} = \mathrm{V} \qquad \text{et} \qquad (-\mathrm{L}\omega\cos\varphi + r\sin\varphi)\,\mathrm{I} = 0.$$

La dernière relation peut s'écrire :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{L}\omega}{r}.$$

D'autre part, en élevant au carré les deux équations et en les ajoutant membre à membre, on obtient :

$$(r^2 + \mathrm{L}^2\omega^2)\,\mathrm{I}^2 = \mathrm{V}^2,$$

ou, en extrayant la racine carrée et divisant les deux quantités I et V par $\sqrt{2}$, de façon à mettre en évidence les valeurs efficaces :

$$\mathrm{I}_e = \frac{\mathrm{V}_e}{\sqrt{r^2 + \mathrm{L}^2\omega^2}}.$$

Les relations que nous venons d'obtenir peuvent être appliquées en unités pratiques aussi bien qu'en unités C. G. S. Elles peuvent également être appliquées à un circuit fermé, à condition de désigner par r et L la résistance et la self-inductance de l'ensemble du circuit, y compris les générateurs et les moteurs qu'il peut contenir, et de remplacer la différence de potentiel v par la somme Σe des forces électromotrices, autres que les f. é. m. de self-induction, qu'il renferme.

La relation $\operatorname{tang}\varphi = \mathrm{L}\omega/r$ montre que $\operatorname{tang}\varphi$ est positif; les deux grandeurs V et I étant essentiellement positives, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ sont alors tous deux positifs, et l'angle φ est compris entre 0 et $\pi/2$. *Le courant alternatif dans un conducteur présentant de la self-induction est en retard sur la différence de potentiel aux bornes ; le retard augmente à mesure que la constante de temps* $\tau = \mathrm{L}/r$ *du circuit augmente, et à mesure que la fréquence* $\nu = \omega/2\pi$ *du courant augmente.* Il est voisin de 0 quand τ est petit vis-à-vis de la période $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$, et s'approche de $\pi/2$ quand τ devient grand vis-à-vis de la période.

L'intensité efficace du courant est plus petite que l'intensité que donnerait, dans le même conducteur, une différence de potentiel continue égale à la différence de potentiel efficace. La différence relative est d'autant plus grande que le terme $\mathrm{L}^2\omega^2$ *est plus important par rapport à* r^2, *c'est-à-dire que* τ *est plus grand par rapport à* T. Pour une bobine de self-induction sans fer (§ 232), dont la constante de temps $\tau = \mathrm{L}/r$ est de l'ordre de 0,01 seconde, et un courant à 50 périodes ($\mathrm{T} = 0{,}02$ seconde), le rapport $\mathrm{L}\omega/r = 2\pi\tau/\mathrm{T}$ est de l'ordre de 3, et le terme $\mathrm{L}^2\omega^2$ est déjà près de 10 fois plus grand que le terme r^2. Pour une bobine à noyau de fer, et pour la même fréquence, r^2 est négligeable par rapport à $\mathrm{L}^2\omega^2$;

le courant est en quadrature avec la différence de potentiel aux bornes, et son intensité efficace est $I_e = V_e / L\omega$. Pour les hautes fréquences, par exemple pour $\nu = 10^6$, il suffit d'enrouler un conducteur de façon qu'il forme quelques spires pour obtenir des valeurs très élevées de $L\omega$, et pour qu'il ne laisse presque pas passer de courant.

L'expression qui donne l'intensité efficace peut encore être mise sous la forme :

$$I_e = \frac{V_e}{r\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{r}\right)^2}} = \frac{V_e}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \varphi}} = \frac{V_e}{r} \cos \varphi.$$

La relation $V_e \cos \varphi = rI_e$ ainsi obtenue permet de constater immédiatement que la puissance consommée dans le conducteur, $V_e I_e \cos \varphi = rI_e^2$, y est entièrement dissipée par effet Joule. On voit par là même que les formules obtenues ne peuvent être qu'une première approximation dans le cas des bobines à noyau de fer, où le courant doit apporter en outre la puissance dissipée dans le fer par hystérésis (cf. § 288).

294. Emploi de la représentation géométrique. — Le calcul, que nous avons fait tout à l'heure, de l'expression $ri + L\, di / dt$ peut être effectué facilement à l'aide de la construction de Fresnel. Si l'on a $i = I \cos (\omega t - \varphi)$, on a $\frac{di}{dt} = - I\omega \sin (\omega t - \varphi) = \omega I \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$: *la dérivée d'une fonction sinusoïdale est une fonction sinusoïdale de même période, en quadrature avance et de valeur* ***maximum*** ω *fois plus grande*. Supposons la fonction ri représentée par le vecteur $\overrightarrow{Aa}$, de longueur rI ; la fonction $L\, di / dt$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{aB}$, de longueur $L\omega I$, faisant avec $\overrightarrow{Aa}$ un angle $\pi / 2$ dans le sens des avances de phase (*fig.* 344) ; la fonction v est représentée, d'après la règle de Fresnel, par le vecteur $\overrightarrow{AB}$. La figure montre que la fonction v est en avance d'un angle φ sur la fonction i, et on a, dans le triangle rectangle AaB, les deux relations :

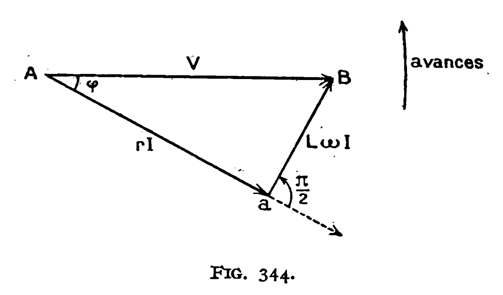


FIG. 344.

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{L\omega}{r}, \qquad V = I\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}.$$

Nous avons supposé la fonction i connue et calculé graphiquement la fonction v ; cherchons maintenant à construire la fonction i connaissant la fonction v, représentée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Supposons le problème résolu, et la fonction ri représentée par le vecteur $\overrightarrow{Aa}$ (*fig.* 345) : le triangle AaB est semblable au triangle rectangle $Aa'B'$, dont les côtés de l'angle droit sont r et $L\omega$. On résoudra le problème en construisant un triangle rectangle $A_1a'_1B'_1$ de côtés r et $L\omega$; il sera égal au triangle $Aa'B'$: la mesure de l'angle A_1 donnera l'angle φ ;

et la détermination du rapport des deux longueurs AB : $A_1B'_1$ donnera le rapport de similitude des deux triangles A*a*B et A*a'*B', c'est-à-dire la valeur de I. Si on en a besoin pour des constructions ultérieures, il sera facile de reporter, à partir de la direction AB, l'angle φ, et de construire le triangle A*a*B.

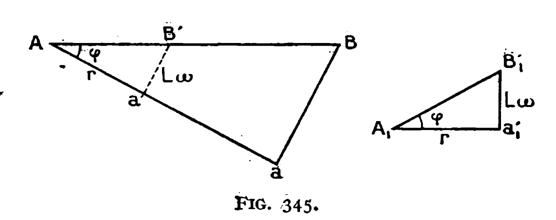


FIG. 345.

Pratiquement les valeurs intéressantes des différentes grandeurs sont les valeurs efficaces : on les emploiera pour effectuer toutes les constructions, c'est-à-dire qu'on tracera des figures semblables aux précédentes et réduites dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

Traitons, comme exemple, le problème suivant : on dispose en série le circuit de chauffage AB d'un four électrique et une bobine BC à noyau de fer (*fig.* 346) ; leurs résistances et leurs

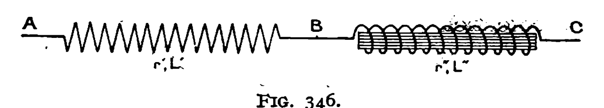


FIG. 346.

self-inductances sont r', r'', L', L''. On veut obtenir un courant d'intensité efficace I_e donnée : quelles doivent être les valeurs efficaces des différences de potentiel entre les points A et B, B et C, A et C ?

Nous prenons un premier vecteur, de direction arbitraire $\overrightarrow{Aa}$ (*fig.* 347) égal à $r'I_e$, puis un vecteur $\overrightarrow{aB}$ perpendiculaire au premier, et de longueur $L'\omega I_e$; pour le second conducteur, l'intensité du courant est la même et a même phase : nous construisons des vecteurs $\overrightarrow{Bb}$ et $\overrightarrow{bC}$, parallèles aux premiers, et de longueurs $r''I_e$ et $L''\omega I_e$. Les valeurs efficaces V'_e, V''_e, V_e des trois différences de potentiel cherchées s'obtiendront en mesurant, avec un double décimètre, les longueurs AB, BC, AC ; la construction donnera également leurs avances de phase φ', φ'', φ sur l'intensité du courant. *On remarquera que, par suite de l'existence d'une différence de phase, φ''' — φ', entre les deux différences de potentiel v'' et v', la différence de potentiel efficace* V_e *est inférieure à la somme* $V'_e + V''_e$.

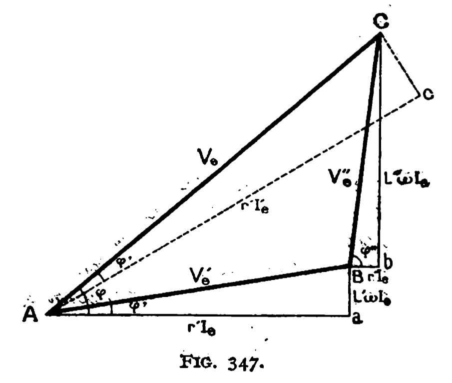


FIG. 347.

Si la différence de potentiel efficace V_e était appliquée directement aux bornes AB du four, on obtiendrait dans son circuit un courant d'intensité efficace I'_e, qu'on calculera en construisant le triangle A*c*C semblable au triangle A*a*B : la longueur A*c* est égale à $r'I'_e$. La figure montre immédiatement qu'elle est supérieure à la longueur A*a* = $r'I_e$: l'introduction, dans un circuit ne comportant que des

résistances et des selfs, d'une bobine à noyau de fer, a pour effet d'y réduire l'intensité du courant. On emploie souvent de telles bobines, dites *bobines de réaction*, pour régler l'intensité du courant alternatif dans un circuit : elles présentent, sur les rhéostats, l'avantage de consommer très peu d'énergie, car la différence de potentiel à leurs bornes est presque en quadrature avec le courant.

295. Courant dans un condensateur. — Réunissons les deux armatures A et B d'un condensateur (*fig.* 348) aux deux bornes A′ et B′ d'un alternateur, de façon à établir entre elles une différence de potentiel alternative : à chaque période, chaque armature se charge alternativement d'électricité positive et d'électricité négative. Les quantités d'électricité correspondantes sont fournies par l'alternateur : la source et les fils de connexions sont parcourus par un courant alternatif, dont la période est celle de la différence de potentiel.

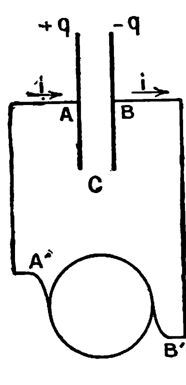


FIG. 348.

Soit $v = V \cos \omega t$ la différence de potentiel $v_A - v_B$, et i l'intensité, à l'instant t, du courant qui parcourt les conducteurs dans le sens des flèches (*fig.* 348). Si la capacité du condensateur est C, la charge de l'armature A à l'instant t est $q = Cv$; pendant le temps dt, elle s'accroît de la quantité d'électricité $dq = i\,dt$ apportée par le courant. *L'intensité du courant $i = dq / dt$ est en quadrature avance sur la charge, et par suite sur la différence de potentiel.* On a :

$$i = \frac{d}{dt}(Cv) = -C\omega V \sin \omega t = + C\omega V \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

L'intensité efficace I_e est donnée par la relation, valable aussi bien en unités pratiques (volts, ampères, farads) qu'en unités C. G. S. :

$$I_e = \frac{C\omega V}{\sqrt{2}} = \frac{V_e}{\frac{1}{C\omega}}.$$

On peut, pour la commodité de la représentation, considérer que le courant i traverse le condensateur de l'armature A à l'armature B, et dire que, *tandis qu'un condensateur s'oppose de façon absolue au passage du courant continu, il laisse passer le courant alternatif. L'intensité efficace du courant qui le traverse, sous une différence de potentiel donnée, est d'autant plus grande que la fréquence $\nu = \omega / 2\pi$ est plus élevée.* Un condensateur de 1 microfarad, placé entre les bornes d'un alternateur à 50 périodes fournissant une différence de potentiel efficace de 100 volts, laisse passer un courant de 0,03 ampère ($I_e = C\omega V_e = 10^{-6}.100\pi.100$) ; la même différence de potentiel, avec une fréquence de 1.000 périodes, y produit un courant de 0,6 ampère ; enfin, si on appliquait au même condensateur la même différence de potentiel en haute fréquence, on obtiendrait, pour une fréquence $\nu = 100.000$, un courant de 60 ampères, si la source était assez puissante pour le fournir : réunir les bornes d'une source à haute

fréquence à un condensateur de grande capacité revient presque à les mettre en court-circuit.

Au point de vue de la représentation géométrique, si le courant qui traverse le condensateur, de l'armature A à l'armature B, est représenté par le vecteur $\overrightarrow{AM}$ (*fig.* 349) de longueur I_e, la différence de potentiel $v_A - v_B$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, de longueur $V_e = I_e \frac{1}{C\omega}$, faisant avec le vecteur $\overrightarrow{AM}$ un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des retards.

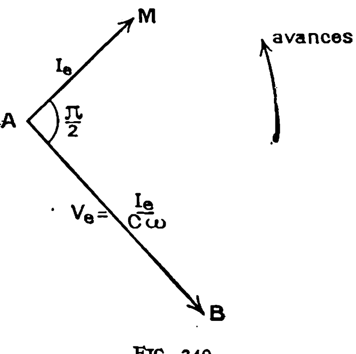


FIG. 349.

296. Circuit comprenant un condensateur et une résistance inductive. — Étudions maintenant un cas plus général : la différence de potentiel sinusoïdale $v = V \cos \omega t$ est appliquée aux bornes AB d'un circuit comprenant en série des conducteurs possédant une self-induction et des condensateurs. Pour plus de simplicité, nous le réduirons (*fig.* 350) à un conducteur AD, de résistance r et de self-inductance L, et un condensateur DB, de capacité C : on se rendra compte facilement que les formules peuvent être appliquées à une série quelconque de conducteurs ou de condensateurs, placés dans n'importe quel ordre, à condition de désigner par r la somme des résistances des conducteurs, par L la self-inductance de leur ensemble (¹), par C la capacité de la série de condensateurs $\left(\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}, \S\ 56\right)$. On peut également les appliquer à un circuit fermé, à condition de remplacer la différence de potentiel aux bornes v par la force électromotrice e.

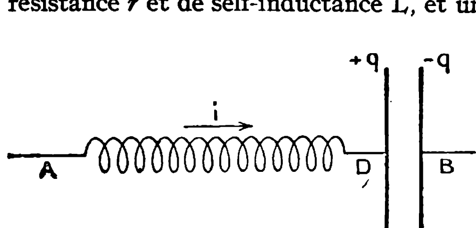


FIG. 350.

On a, entre les valeurs à l'instant t de la charge q de l'armature D du condensateur, de l'intensité i du courant qui va de A vers B et des différences de potentiel $v_A - v_D$ et $v_D - v_B$, les relations :

$$L \frac{di}{dt} + ri = v_A - v_D, \qquad i = \frac{dq}{dt}, \qquad \frac{q}{C} = v_D - v_B.$$

La différence de potentiel v est égale à $(v_A - v_D) + (v_D - v_B)$; on a donc :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v = V \cos \omega t.$$

(¹) Cette inductance n'est pas, en général, égale à la somme des self-inductances des différents conducteurs considérés isolément (§ 231).

La charge q du condensateur est donnée par une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre. L'intégrale générale de l'équation sans second membre est toujours assez rapidement amortie (cf. § 234), et on obtient la valeur de q correspondant au régime périodique en cherchant une intégrale particulière périodique : on substituera à q la fonction $q = Q \sin(\omega t - \varphi)$, et on déterminera Q et φ de façon que l'équation soit satisfaite ; l'intensité du courant sera $i = dq/dt = \omega Q \cos(\omega t - \varphi)$.

Nous ne développerons pas ce calcul, qui est identique à celui que nous ferons au paragraphe 302 sur les phénomènes mécaniques représentés par la même équation différentielle, et nous établirons les formules générales par la méthode graphique.

Soit $\overrightarrow{Aa}$ (*fig.* 351) le vecteur, de direction $\overrightarrow{Ax}$ et de longueur $r\mathrm{I}_e$, qui représente la fonction ri ; traçons le vecteur $\overrightarrow{aD}$, de longueur $\mathrm{L}\omega\mathrm{I}_e$ et de direction $\overrightarrow{ay}$, faisant avec $\overrightarrow{Ax}$ l'angle $\pi : 2$ dans la direction des avances : le vecteur $\overrightarrow{AD}$ représente (§ 294) la différence de potentiel $v_A - v_D$. Quant à la différence de potentiel $v_D - v_B$, elle est représentée (§ 295) par un vecteur $\overrightarrow{DB}$, de longueur $\mathrm{V}''_e = \frac{1}{\mathrm{C}\omega}\mathrm{I}_e$, faisant avec la direction $\overrightarrow{Ax}$ un angle de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des retards, c'est-à-dire dirigé suivant la droite ay, dans le sens $-\overrightarrow{ay}$. La différence de potentiel totale v est représentée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$.

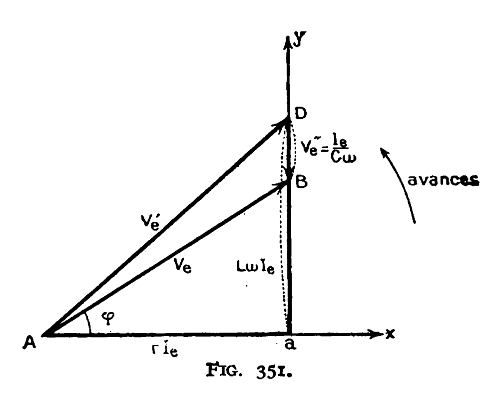


FIG. 351.

D'après la construction, le vecteur $\overrightarrow{aB}$, compté positivement dans la direction $\overrightarrow{ay}$, a pour valeur $\left(\mathrm{L}\omega - \frac{1}{\mathrm{C}\omega}\right)\mathrm{I}_e$: la différence de phase φ entre les fonctions sinusoïdales v et i, comptée positivement dans le sens des avances de la différence de potentiel sur le courant, c'est-à-dire des retards du courant sur la différence de potentiel, est donnée, dans le triangle rectangle AaB, par la relation :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{L}\omega - \frac{1}{\mathrm{C}\omega}}{r}.$$

La valeur efficace V_e de la différence de potentiel est représentée par la longueur AB : on a, dans le même triangle :

$$\mathrm{V}_e^2 = r^2\mathrm{I}_e^2 + \left(\mathrm{L}\omega - \frac{1}{\mathrm{C}\omega}\right)^2 \mathrm{I}_e^2,$$

ou :

$$I_e = \frac{V_e}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Le sens de la différence de phase φ dépend du signe de la quantité $L\omega - \frac{1}{C\omega}$.

Si $\frac{1}{C\omega} < L\omega$, *le courant est en retard sur la différence de potentiel, le circuit se comporte comme un circuit inductif sans condensateur. Mais l'effet de sa self-*

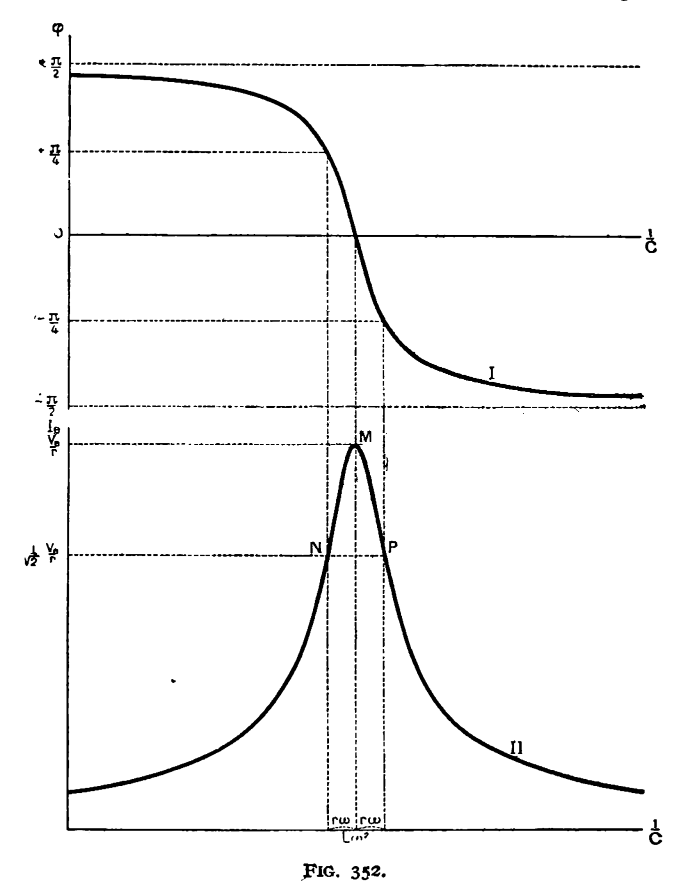


FIG. 352.

induction est partiellement compensé par l'existence du condensateur ; l'introduction de ce dernier diminue le retard φ et augmente l'intensité efficace I_e d'autant plus que C est plus petit et 1 / Cω plus grand et plus voisin de Lω.

Si $\frac{1}{C\omega} > L\omega$, *le courant est en avance sur la différence de potentiel, le circuit se comporte comme s'il comprenait un condensateur et un conducteur sans self-induction. Mais l'effet de la capacité est partiellement compensé par l'existence de la self-induction.* L'avance φ est d'autant plus petite et l'intensité efficace

I_e d'autant plus grande que C est plus grand et $1/C\omega$ plus petit et plus voisin de $L\omega$.

Les courbes I et II de la figure 352 représentent la façon dont varient φ et I_e, lorsqu'on fait varier C, les autres quantités, y compris V_e, restant constantes ; on y a pris comme abscisses les valeurs de $\frac{1}{C}$.

Les formules générales que nous venons d'établir et de discuter peuvent être appliquées en unités pratiques comme en unités C. G. S. Elles comprennent comme cas particuliers les cas déjà étudiés : circuit ne comportant qu'un conducteur $\left(\frac{1}{C} = 0\right)$ ou qu'un condensateur ($r = L = 0$). Elles permettent de calculer l'intensité à partir de la différence de potentiel, ou réciproquement ; ces calculs peuvent être effectués par la méthode graphique : il suffit, dans les constructions du paragraphe 294, de remplacer la quantité $L\omega$ par la quantité $L\omega - \frac{1}{C\omega}$.

297. Résonance. — Lorsqu'on étudie les variations du courant en fonction des variations de l'une des quantités L, C, ou ω, on est toujours conduit à considérer la valeur particulière de la variable qui annule la quantité $L\omega - \frac{1}{C\omega}$, et rend minimum, et égale à la résistance r, la quantité $\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$: elle sépare la région où le rôle de la self-induction est prépondérant, et où le courant est en retard sur la différence de potentiel, de celle où le rôle de la capacité est prépondérant, et où le courant est en avance. *C'est pour cette valeur particulière que l'intensité efficace du courant est maximum ; les effets de la capacité et de la self-induction se détruisent mutuellement, et le courant est le même, en intensité et en phase, que si la résistance r existait seule.*

— *La relation qui la définit peut s'écrire :*

$$LC\omega^2 = 1, \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Elle montre que la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ *du circuit* ADB (§ 234) *est alors égale à la période* T *du courant alternatif :* c'est pourquoi on dit qu'il y a **résonance** (cf. § 303).

Dans certains cas, la courbe qui représente l'intensité peut décroître très rapidement de part et d'autre du maximum M qui correspond à la résonance. Supposons par exemple que la variable soit la capacité (*fig.* 352), et calculons, étant donnée la valeur C de la capacité de résonance, de quelle quantité ΔC il faut la modifier pour diviser l'intensité efficace par $\sqrt{2}$, c'est-à-dire pour la ramener de la valeur V_e/r à la valeur $V_e/r\sqrt{2}$. On a, pour les points N et P correspondants (*fig.* 352), en désignant par $\frac{1}{C} + \Delta\left(\frac{1}{C}\right)$ l'inverse de la capacité $C + \Delta C$:

$$\frac{V_e^2}{r^2 + \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{\omega}\Delta\left(\frac{1}{C}\right)\right]^2} = \frac{V_e^2}{2r^2},$$

ou, puisque $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$:

$$\frac{1}{\omega^2}\left(\Delta \frac{1}{C}\right)^2 = r^2.$$

Supposons ΔC assez petit pour qu'on puisse calculer Δ (1/C) comme **une différentielle**, et le confondre avec $\Delta C/C^2$. On obtient :

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm C\omega r = \pm \frac{r}{L\omega} = \pm \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{L} \cdot T.$$

Si la constante de temps $\tau = L / r$ du conducteur AD est grande par rapport à la période T du courant alternatif, le rapport $\Delta C / C$ est petit : il suffit d'une faible modification de la capacité, à partir de la valeur qui correspond à la résonance, pour réduire notablement l'intensité du courant ; on a une **résonance aiguë.** La discussion, faite par rapport aux variables L ou ω (cf. § 303) conduirait encore à caractériser l'acuité de la résonance par la même quantité $C\omega r = r / L\omega$. *Pour des valeurs données de la capacité et de la self, la résonance est d'autant plus aiguë que la résistance est plus faible, c'est-à-dire que l'amortissement des oscillations propres du circuit* (1) *est plus faible* (§ 234).

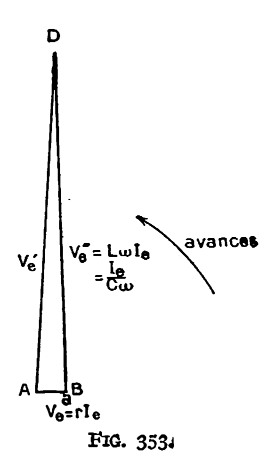


FIG. 353.

Répétons, dans le cas de la résonance (*fig.* 353), la construction géométrique de la figure 351 : on voit immédiatement que, si r est petit vis-à-vis de $L\omega$, les longueurs AD = V'_e et DB = V''_e sont beaucoup plus grandes que la longueur AB = V_e. *Les différences de potentiel* V''_e *et* V'_e *aux bornes du condensateur et de la self sont beaucoup plus grandes que la différence de potentiel totale* V_e ; on dit qu'il apparaît dans le circuit des **surtensions** ; elles sont d'autant plus importantes que la résonance est plus aiguë, car le rapport des différences de potentiel $V''_e = I_e / C\omega$ et $V_e = rI_e$ est précisément égal à la quantité $C\omega r$ qui caractérise l'acuité de la résonance.

Il importe de rappeler que, si le circuit contient des bobines à noyau de fer, les formules ne constituent qu'une première approximation, et qu'en particulier il est impossible d'obtenir une résonance très aiguë : on s'en rendra compte en remarquant que le dégagement irréversible de chaleur dû à l'hystérésis doit agir dans le même sens que celui qui provient de l'effet Joule, c'est-à-dire produire des effets analogues à ceux d'une augmentation de la résistance r.

298. Applications. — Les formules des paragraphes précédents sont d'une application constante dans la pratique industrielle, et les techniciens ont donné un nom à chacune des quantités qui y figurent. La quantité : $\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ est l'**impédance** du circuit, $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ est sa *réactance*.

(1) Si cet amortissement est faible, le rapport $rT/2L$ diffère peu du décrément logarithmique δ et on a $\Delta C/C = \delta/\pi$ (cf. § 303).

Les phénomènes de résonance sont constamment utilisés dans le réglage des circuits à haute fréquence employés en télégraphie sans fil, et les relations qui définissent les conditions de la résonance sont fondamentales dans la théorie de la T. S. F.

La résonance peut également se produire dans les réseaux de distribution d'énergie à basse fréquence, surtout lorsque la capacité des lignes qui constituent le réseau est assez élevée ; si la f. é. m. n'est pas sinusoïdale, la résonance peut aussi s'établir sur un des harmoniques. Ces phénomènes sont à éviter, à cause des surtensions, dangereuses pour les isolants, qu'ils produisent dans le réseau : remarquons, à ce propos, que la différence de potentiel que doit supporter l'isolant est, en réalité, la différence de potentiel instantanée maximum qui est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la différence de potentiel efficace.

Il est facile de se rendre compte expérimentalement de la façon dont l'intensité du courant dépend de la self-induction et de la capacité du circuit, si l'on dispose, par exemple, d'un alternateur à 500 périodes ($\omega = 2\pi \times 500 = 3140$), d'une bobine sans fer à self-induction variable, telle que celle de la figure 288 (§ 231), dont la self peut varier de 0,23 à 0,67 henrys ($L\omega = 720$ à $L\omega = 2100$), pendant que sa résistance conserve une valeur constante de 9 ohms, et d'un condensateur de 0,2 microfarad ($1 / C\omega = 1590$). On mesurera l'intensité du courant avec un ampèremètre thermique sensible et la différence de potentiel aux bornes du circuit d'expérience avec un voltmètre thermique ; on pourra, au besoin, maintenir cette dernière à une valeur constante, par exemple 100 volts, en agissant sur l'excitation de l'alternateur.

Si le circuit se compose uniquement de la bobine de self-induction variable, on vérifiera que le courant diminue quand on augmente la self, et passe de 0,14 à 0,05 ampère quand on passe de la self minimum à la self maximum. Si le circuit se compose uniquement du condensateur de 0,2 microfarad, on vérifiera qu'on obtient un courant de 0,06 ampère. Si l'on place en série la bobine, avec la self maximum, et le condensateur, on constatera qu'on obtient un courant dont l'intensité, 0,2 ampère, est très supérieure à celle (0,05) que laisse passer la self seule.

On réalisera aussi facilement l'expérience de la résonance. Pour éviter que les surtensions ne détériorent les appareils, on réduira d'abord la f. é. m., par exemple à 10 volts, de façon à avoir, quand la self est maximum, un courant de 0,02 ampère ; si l'on diminue la self, l'intensité du courant augmente, passe par un maximum égal à 1,1 ampère correspondant à la résonance, puis diminue, et on peut constater que la résonance est assez aiguë : une rotation de quelques degrés de la bobine suffit à faire passer l'intensité de 1 à 0,5 ampère. On mesurera la différence de potentiel aux bornes du condensateur à l'aide d'un voltmètre électrostatique, par exemple d'un voltmètre multicellulaire (§ 72) : on constatera qu'au moment de la résonance elle atteint plusieurs centaines de volts.

299. Circuits dérivés. — Pour étudier la distribution des courants alternatifs dans un réseau de conducteurs, on appliquera les formules générales à chacun des conducteurs qui le composent. Comme, chaque fois qu'on additionne deux différences de potentiel ou deux intensités, il faut tenir compte de leur différence de phase, les calculs sont assez compliqués, et il est souvent préférable d'employer la méthode graphique.

Traitons, comme exemple, le problème suivant : un alternateur S maintient entre deux points A et B (*fig.* 354) une différence de potentiel alternative v, de valeur efficace V [1] ; les deux points A et B sont réunis par deux circuits dérivés, comprenant, le premier un conducteur de résistance r et de self-inductance L, le second un condensateur de capacité C. On demande de calculer l'intensité du courant I fourni par l'alternateur.

Soit $\vec{AB}$ (*fig.* 355) le vecteur, de longueur V, représentant la différence de potentiel v. Construisons d'abord le vecteur qui représente le courant i_1 dans le

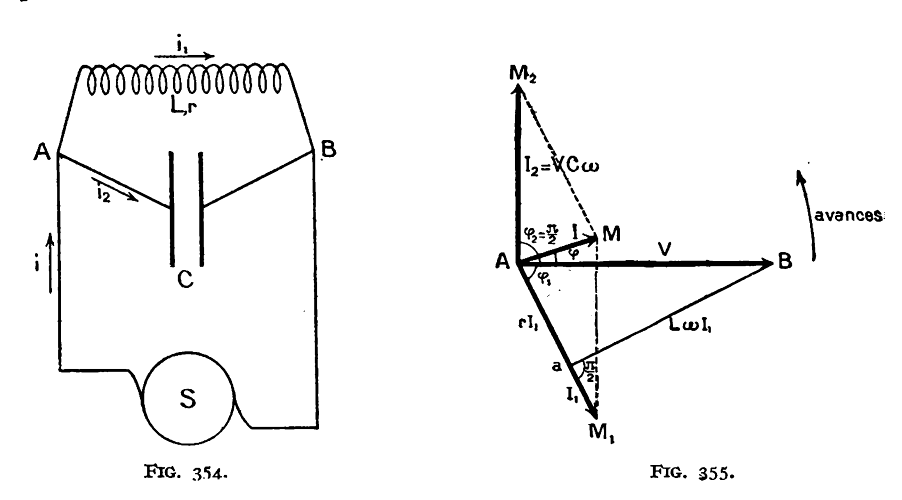


Fig. 354.

Fig. 355.

conducteur r, L ; nous savons construire (§ 294) le triangle AaB, dans lequel le vecteur $\vec{Aa}$ représente ri_1 : le courant i_1 est représenté par le vecteur $\vec{AM_1}$, dirigé suivant $\vec{Aa}$, et de longueur $I_1 = Aa / r$. Quant au courant i_2 dans le condensateur, il est représenté (§ 295) par le vecteur $\vec{AM_2}$, de longueur $I_2 = C\omega V$, perpendiculaire à $\vec{AB}$ dans le sens des avances. Le courant i fourni par l'alternateur est représenté par le vecteur $\vec{AM}$, somme géométrique des vecteurs $\vec{AM_1}$ et $\vec{AM_2}$: avec un double décimètre et un rapporteur, on déterminera sur l'épure la longueur AM, qui mesure l'intensité efficace I, et l'angle φ, qui est la différence de phase entre le courant et la différence de potentiel. Dans le cas de la figure 355, le courant est en avance, et son intensité efficace est inférieure à celle des courants composants.

Supposons que la résistance r soit négligeable vis-à-vis de la quantité $L\omega$: le courant i_1 est en quadrature retard sur la différence de potentiel v (*fig.* 356), et a pour intensité efficace $I_1 = V / L\omega$. Les deux courants i_1 et i_2 sont en opposition de phase, et le courant résultant (vecteur $\vec{AM}$) a pour intensité efficace

[1] Dans ce paragraphe et dans celui qui suit, nous supprimons l'indice e employé jusqu'ici pour distinguer les valeurs efficaces : il est entendu que toutes les valeurs qui y figurent sont des valeurs efficaces.

$I = I_2 - I_1 = V\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$; il est nul si la condition $LC\omega^2 = 1$ est satisfaite, c'est-à-dire si le circuit fermé constitué par les deux dérivations est en résonance sur la période de la f. é. m. de l'alternateur.

En réalité, le courant n'est jamais nul, parce que la résistance r n'est jamais

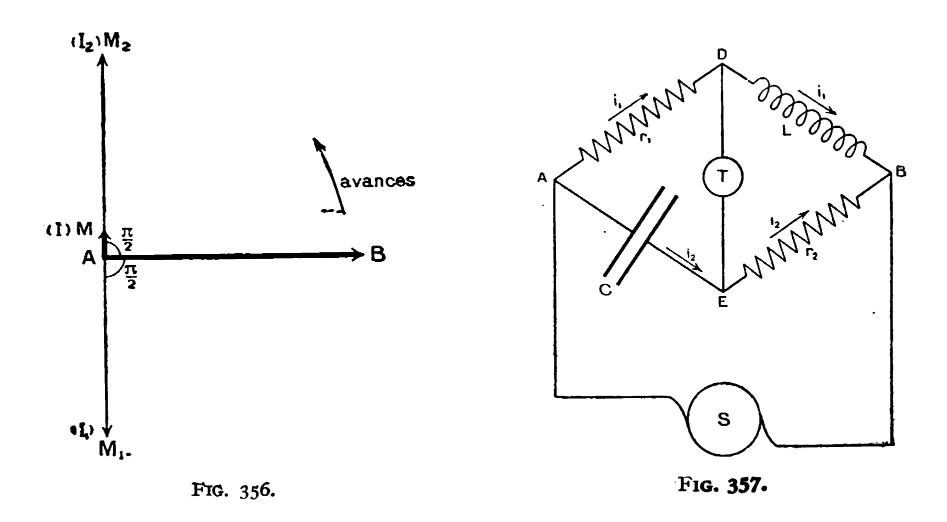


FIG. 356. FIG. 357.

nulle : mais, *si la résonance est aiguë, on peut obtenir dans les conducteurs en dérivation un courant beaucoup plus intense que celui que fournit l'alternateur.* Si la f. é. m. de l'alternateur est la somme de deux f. é. m. sinusoïdales, de pulsations ω et ω', de valeurs efficaces comparables, la f. é. m. de pulsation ω' fournit dans le circuit de l'alternateur un courant beaucoup plus intense que la f. é. m. de pulsation ω : *le circuit dérivé joue le rôle d'un* **filtre,** *ou d'un* **bouchon,** *qui arrête le courant de pulsation* ω. Ces propriétés sont souvent employées en T. S. F. pour éliminer les courants parasites.

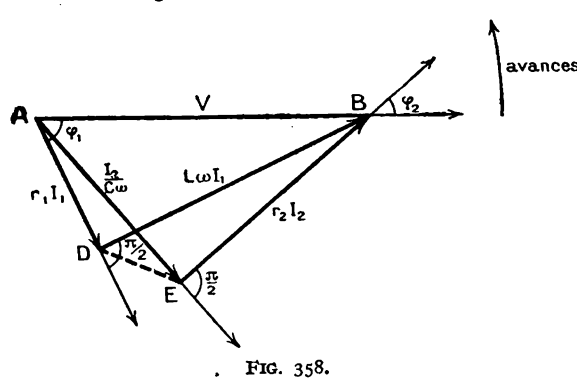


FIG. 358.

300. Pont de Wheatstone. — Nous avons déjà indiqué comment, en prenant comme source de courant un alternateur de fréquence musicale et comme appareil de mesure un téléphone, on peut utiliser le pont de Wheatstone à mesurer le rapport de deux capacités (§ 85) ou le rapport de deux self-inductances (§ 236), en fonction du rapport de deux résistances.

Il serait facile d'appliquer aux montages correspondants les formules et

les constructions géométriques que nous venons d'étudier ; nous donnerons, comme exemple, l'étude d'un autre dispositif, celui qui permet de comparer une self-induction à une capacité : la self L, de résistance négligeable, et la capacité C constituent deux branches opposées DB et AE du pont (*fig.* 357), et les deux autres branches AD et EB sont constituées par des résistances r_1 et r_2 sans self ni capacité.

Soit $\vec{AB}$ (*fig.* 358) le vecteur qui représente la différence de potentiel sinusoïdale $v_A - v_B$, de pulsation ω, établie par la source S entre les points A et B. Supposons d'abord le téléphone T enlevé : les deux branches AD et DB sont parcourues par le même courant i_1, en retard sur la différence de potentiel, les deux branches AE et EB par le même courant i_2, en avance sur la différence de potentiel. La figure 358 représente, une fois effectuée, la construction géométrique qui fournit les intensités efficaces I_1 et I_2 de ces deux courants, et leurs différences de phase φ_1 et φ_2 par rapport à $v_A - v_B$. La différence de potentiel $v_A - v_D$ est représentée par le vecteur $\vec{AD}$, de longueur $r_1 I_1$, en retard d'un angle φ_1 sur le vecteur $\vec{AB}$; la différence de potentiel $v_D - v_B$ est représentée par le vecteur $\vec{DB}$, de longueur $L\omega I_1$, en avance d'un angle $\pi / 2$ sur le vecteur $\vec{AD}$. La différence de potentiel $v_E - v_B$ est représentée par le vecteur $\vec{EB}$, de longueur $r_2 I_2$, en avance d'un angle φ_2 sur le vecteur $\vec{AB}$; la différence de potentiel $v_A - v_E$ est représentée par le vecteur $\vec{AE}$, de longueur $I_2 / C\omega$, en retard d'un angle $\pi / 2$ sur le vecteur $\vec{EB}$. La différence de potentiel $v_D - v_E$ entre les points D et E est représentée par le vecteur $\vec{DE}$.

Pour que le téléphone intercalé entre les points D et E ne soit parcouru par aucun courant et reste silencieux, il faut que cette dernière différence de potentiel soit nulle. Les deux points D et E doivent coïncider et les deux triangles rectangles ADB et AEB se confondre en un seul, dont les deux angles aigus sont les angles φ_1 et φ_2. Ces deux angles sont donnés par les relations :

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{L\omega}{r_1}, \qquad \operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{1}{C\omega r_2},$$

et on obtient la condition d'équilibre du pont en écrivant qu'ils sont complémentaires :

$$\operatorname{tang} \varphi_1 \operatorname{tang} \varphi_2 = 1, \qquad \text{ou} \qquad L = C r_1 r_2.$$

L'expérience consiste à faire varier l'une des résistances r_1 ou r_2 jusqu'à éteindre le son du téléphone; *elle permet de mesurer en henrys une self-inductance* L *si l'on dispose d'une capacité* C *étalonnée en farads et de deux boîtes de résistances sans self ni capacité* (§ 232) *étalonnées en ohms*. La relation obtenue est indépendante de la fréquence : il est inutile de la mesurer, et il n'est pas indispensable que la f. é. m. de la source soit sinusoïdale. Avec une fréquence de l'ordre de 1.000, la mesure est facile, et peut être précise, le téléphone étant un instrument très sensible, qui peut déceler des courants de l'ordre de 10^{-8} ampère.

Il faut toutefois remarquer qu'en réalité le son ne disparaît jamais complètement, la résistance r de la self n'étant jamais rigoureusement nulle ; mais si r est petit par rapport à $L\omega$, on obtient toujours un minimum de son très accentué, et facile à observer ; on peut, au besoin, établir une formule de correction, permettant de tenir compte de la résistance r.

Il est d'ailleurs préférable, si r n'est pas négligeable, de mettre en dérivation sur le condensateur une résistance r', comme l'indique la figure 357 *bis* (*pont de Maxwell*); on peut alors annuler le courant dans la diagonale en agissant sur la résistance r' et sur l'une des résistances r_1 ou r_2. Quand cette condition est réalisée, le diagramme est celui de la figure 358 *bis* : le vecteur AD, de longueur r_1I_1, représente les différences de potentiel égales en grandeur et en phase $V_A - V_D$ et $V_A - V_E$; le vecteur EB, de grandeur r_2I_2, résultante des vecteurs DF et FB de grandeurs rI_1 et $L\omega I_1$, représente les différences de potentiel $V_D - V_B$ et $V_E - V_B$. Le vecteur AM', en phase avec $V_A - V_E$, représente le courant i' dans la résistance r', tandis que le vecteur AM, en quadrature avance avec le précédent, représente le courant i dans le condensateur. La somme de ces courants est le courant i_2 dans la résistance r_2, et est représentée par un vecteur AM_2 parallèle au vecteur DB.

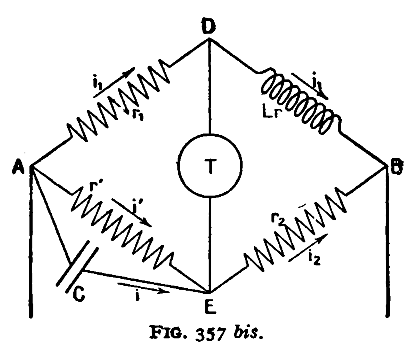


FIG. 357 *bis*.

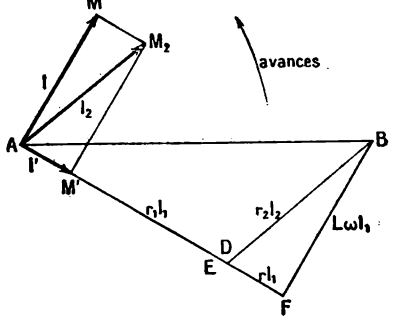


FIG. 358 *bis*.

Ecrivons, d'une part que la même différence de potentiel $V_A - V_D$ produit les courants i_1, i' et i dans les résistances r_1, r' et dans la capacité C, d'autre part que les triangles AM_2M' et DBF sont semblables :

$$r_1I_1 = r'I' = \frac{I}{C\omega}; \quad \frac{I_2}{r_2I_2} = \frac{I'}{rI_1} = \frac{I}{L\omega I_1}.$$

Divisons membre à membre ces deux groupes de relations ; nous obtenons immédiatement les conditions d'équilibre :

$$r_1r_2 = rr' = \frac{L}{C}.$$

L'équilibre est encore indépendant de la fréquence, et l'une des conditions d'équilibre, $L = Cr_1r_2$, est la même que dans le cas simple envisagé primitivement. Ajoutons que la comparaison peut être très précise, même avec les fréquences industrielles, en employant comme indicateur de zéro un galvanomètre à vibration, qui peut être sensible à un courant de 10^{-8} ampère.

CHAPITRE XXIX

ACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

I. — *CHAMPS MAGNÉTIQUES ALTERNATIFS*

301. Généralités. — Si une bobine B (*fig.* 359) est parcourue par un courant alternatif de période T, elle crée en un point O un champ magnétique $\vec{h}$, dont la direction est constante, et dont le sens et l'intensité varient comme le sens et l'intensité du courant. Supposons qu'un aimant *ns* soit placé au point O, et que, lorsque le champ $\vec{h}$ n'existe pas, il soit soumis à un couple directeur — couple magnétique ou couple de torsion — qui lui fasse prendre une position d'équilibre perpendiculaire à la direction du champ $\vec{h}$, ou exécuter, autour de cette position, des oscillations, plus ou moins amorties, de période T_0. Lorsque le champ $\vec{h}$ est établi, l'aimant est soumis en plus à un couple électromagnétique proportionnel à *h*, qui tend à l'écarter de sa position d'équilibre alternativement dans un sens et dans l'autre : les effets de ce couple dépendent de l'ordre de grandeur relatif des périodes T et T_0.

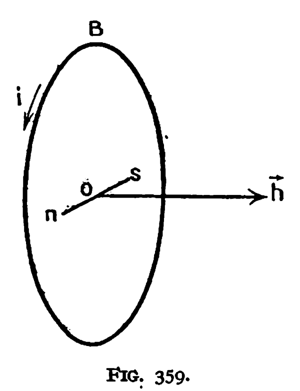
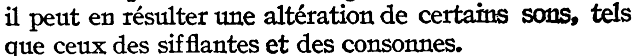


FIG. 359.

Si la période T_0 des oscillations propres du système mobile est grande par rapport à la période T du courant, il n'a pas le temps de se déplacer d'une façon appréciable avant que le couple électromagnétique n'ait changé de sens, et on n'observe aucune action : si l'on fait passer un courant alternatif dans un galvanomètre ou un ampèremètre ordinaire, on n'obtient aucune déviation ; tout au plus observe-t-on, si le courant est intense, des oscillations de très faible amplitude dont la période est celle du courant.

Si T_0 est petit par rapport à T, et si le mouvement du système mobile est assez amorti, il atteint sa position d'équilibre, pour chaque valeur du champ $\vec{h}$, avant que ce champ n'ait eu le temps de varier d'une façon appréciable : ses élongations enregistrent synchroniquement les variations du champ *h*, c'est-à-dire de l'intensité *i* du courant. Ce sont des phénomènes de ce type qui se produisent dans les téléphones : une membrane élastique circulaire PP de fer doux mince, fixée sur tout son pourtour (*fig.* 360), est soumise au champ

magnétique résultant de l'action simultanée d'un aimant A et de deux bobines BB, enroulées sur des noyaux de fer doux EE fixés aux pôles de l'aimant, et parcourues par le courant téléphonique. La force magnétique qui s'exerce sur la membrane de fer doux varie dans le même sens que l'intensité du champ total : elle est augmentée par le passage du courant dans un certain sens, diminuée par son passage en sens contraire ; les vibrations élastiques de la membrane étant très rapides et très amorties, ses déplacements suivent les variations de la force, et produisent un son dont la période est celle du courant. Il convient d'ailleurs de remarquer que, dans les téléphones ordinaires, la période T_0 de la plaque, qui est de l'ordre du millième de seconde, est de l'ordre de grandeur de la période des sons aigus de la voix humaine ;

il peut en résulter une altération de certains sons, tels que ceux des sifflantes et des consonnes.

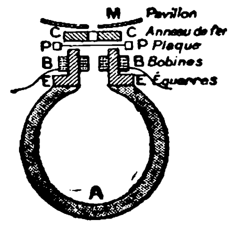


Fig. 360.

Lorsque T_0 est égal à T, toutes les impulsions reçues par le système mobile s'ajoutent, comme s'ajoutent les impulsions communiquées à une balançoire à des instants séparés par un intervalle de temps égal à la période de ses oscillations. Il y a résonance, et le mouvement prend une grande amplitude : nous étudierons en détail ce phénomène dans un des prochains paragraphes.

Les remarques générales que nous venons de faire s'appliquent aussi au mouvement d'un cadre mobile, parcouru par un courant alternatif, et soumis à un champ magnétique constant. Un galvanomètre à cadre mobile ordinaire, dont la période T_0 est grande par rapport à T, ne subit aucune déviation lorsqu'on y fait passer le courant alternatif. Si au contraire la période du galvanomètre est à peu près égale à celle du courant, le cadre exécute des oscillations dont l'amplitude, proportionnelle à l'intensité efficace, du courant, peut facilement être mesurée par l'élargissement du spot ; c'est le principe des **galvanomètres à vibration.** L'inconvénient de ces appareils, comme appareils de mesures, est que leur sensibilité dépend beaucoup de la fréquence ; en particulier elle n'est pas la même pour les différents harmoniques, et si le courant n'est pas sinusoïdal, l'élargissement du spot n'est pas proportionnel à l'intensité efficace. Mais, avec une source à fréquence bien constante, ce sont d'excellents appareils de zéro, et l'on en a construit (§ 292), à cadre mobile et à fer oscillant, qui sont sensibles à 10^{-8} ampère. Enfin, un galvanomètre à cadre mobile de très courte période donne des déviations proportionnelles à chaque instant à l'intensité du courant : c'est le principe des oscillographes, sur lequel nous reviendrons au § 304.

Étudions maintenant l'action mécanique d'une bobine parcourue par un courant alternatif sur une lame de fer doux. Dans ce cas, la force ne change pas de sens quand le courant change de sens, et sa valeur moyenne n'est pas nulle. Si le système mobile a une période T_0 grande par rapport à T, il subit une déviation constante qui mesure l'intensité efficace du courant : c'est ce qui se produit quand on emploie en courant alternatif les ampèremètres à fer doux mobile (cf. § 292). D'autre part, la force reprenant la même valeur au bout du temps T / 2, sa période est T / 2 au lieu de T, et la résonance s'établit pour $T_0 = T / 2$. On emploie quelquefois, pour déterminer la fréquence d'un courant alternatif, un appareil constitué par une série de lames élastiques de fer, de longueurs différentes, encastrées dans un même support, dont les périodes propres sont connues ; on approche successivement des différentes

lames une bobine parcourue par le courant à étudier, et on cherche quelle est celle dont les vibrations prennent la plus grande amplitude : c'est celle dont la période propre est la plus voisine de $T / 2$.

302. Calcul des oscillations forcées. — Reprenons l'équation du mouvement du système mobile — aimant ou cadre mobile — sous la forme générale donnée au paragraphe 258 :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + C\theta = ki.$$

I est le moment d'inertie, — $F d\theta / dt$ le couple d'amortissement, — $C\theta$ le couple directeur, ki le couple électromagnétique produit par le courant d'intensité i. Supposons le courant sinusoïdal, de la forme $i = i_0 \cos \omega t$, et posons $P = ki_0$; le couple électromagnétique est égal à $P \cos \omega t$, et l'équation du mouvement devient :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + C\theta = P \cos \omega t.$$

L'intégrale générale de cette équation s'obtient en ajoutant, à l'intégrale générale de l'équation sans second membre, une intégrale particulière de l'équation avec second membre. Cette intégrale particulière est de la forme $\theta = \theta_0 \cos (\omega t - \varphi)$: elle représente un mouvement oscillatoire de même période que le couple électromagnétique, et correspond à ce qu'on appelle les **oscillations forcées** du système mobile. Quant à l'intégrale générale de l'équation sans second membre, elle représente, soit un mouvement apériodique, soit un mouvement oscillatoire amorti, dont la période T_0 est la période propre du système, donnée par la relation $\omega_0 = 2\pi / T_0 = \sqrt{C / I}$; elle correspond à ses **oscillations propres.**

L'intégrale générale de l'équation avec second membre contient les deux constantes arbitraires de l'intégrale de l'équation sans second membre ; les valeurs de ces deux constantes doivent être déterminées d'après les conditions initiales, élongation et vitesse à l'instant zéro. Au début du mouvement, il y a toujours superposition des deux types d'oscillations, oscillations propres et oscillations forcées ; ce régime dure plus ou moins longtemps, suivant que les oscillations propres disparaissent plus ou moins rapidement par l'effet de l'amortissement ; si le système oscillant est peu amorti, il peut durer assez longtemps pour qu'on observe des battements, dans le cas où les deux périodes T et T_0 sont voisines.

Nous n'étudierons pas cette superposition. *Nous supposerons qu'il existe un terme d'amortissement* ($F \neq 0$), et nous n'étudierons que les oscillations forcées, de période $T = 2\pi / \omega$, qui subsistent seules au bout d'un certain temps, d'autant plus court que l'amortissement est plus fort. Il nous suffit de chercher l'intégrale particulière correspondante de l'équation avec second membre, en y substituant la fonction $\theta = \theta_0 \cos (\omega t - \varphi)$, et effectuant l'identification. On a à substituer dans les différents termes les quantités :

$$\theta = \theta_0 \cos (\omega t - \varphi) = \theta_0 \cos \varphi \cos \omega t + \theta_0 \sin \varphi \sin \omega t,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = - \omega\theta_0 \sin (\omega t - \varphi) = + \omega\theta_0 \sin \varphi \cos \omega t - \omega\theta_0 \cos \varphi \sin \omega t,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \omega^2\theta_0 \cos (\omega t - \varphi) = - \omega^2\theta;$$

et l'identification des coefficients des deux termes en $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ donne les deux relations :

$$(C - I\omega^2)\,\theta_0 \cos\varphi + F\omega\theta_0 \sin\varphi = P, \qquad (C - I\omega^2)\,\theta_0 \sin\varphi - F\omega\theta_0 \cos\varphi = 0.$$

La seconde donne la différence de phase φ :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{F\omega}{C - I\omega^2} = \frac{F}{I}\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{F}{I}\frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega}.$$

En les élevant au carré et en les ajoutant membre à membre. on obtient l'amplitude θ_0 :

$$\theta_0 = \frac{P}{\sqrt{F^2\omega^2 + (C - I\omega^2)^2}} = \frac{P}{\sqrt{F^2\omega^2 + I^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.$$

On rapprochera les formules que nous venons d'obtenir de celles que nous avons établies au paragraphe 296, concernant le régime des oscillations électriques forcées — courant alternatif de période imposée T — dans un circuit dont les oscillations électriques propres ont une période T_0. Nous avons déjà signalé (§ 234) l'identité de forme des équations différentielles qui représentent les oscillations électriques et les oscillations mécaniques ; tous les calculs faits à propos de l'un des phénomènes peuvent être reproduits à propos de l'autre. On remarquera que la variable qui joue, dans l'équation des oscillations électriques, le rôle de l'élongation θ est la charge q du condensateur ; la variable qui joue, dans l'équation des oscillations mécaniques, le rôle de l'intensité du courant $i = dq/dt$ est la vitesse angulaire $d\theta/dt = -\omega\theta_0 \sin(\omega t - \varphi)$. Si nous posons $\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 \cos(\omega t - \psi)$, on a :

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotang}\varphi = \frac{I\omega - \frac{C}{\omega}}{F},$$

et :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \theta_0\omega = \frac{P}{\sqrt{F^2 + \left(I\omega - \frac{C}{\omega}\right)^2}},$$

formules dont on remarquera l'analogie avec les formules fondamentales des courants alternatifs : F correspond à la résistance, I à la self-inductance, et C à l'inverse de la capacité (cf. §§ 234 et 242).

303. Résonance. — Supposons qu'on fasse varier la pulsation ω du couple qui provoque les oscillations forcées, les autres quantités restant constantes.

Lorsque ω croît de 0 à $+\infty$, c'est-à-dire lorsque la période T décroît de $+\infty$ à 0, $\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$, en s'annulant pour $\omega = \omega_0$: $\operatorname{tang}\varphi$ croît de 0 à $+\infty$ quand ω croît de 0 à ω_0, et de $-\infty$ à 0 quand ω croit de ω_0 à $+\infty$. Si l'on se reporte aux équations qui donnent $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ on voit facilement, P et θ_0 étant des quantités essentiellement positives, que

lorsque ω croît de o à ω_0, φ croît de o à $\pi / 2$, et que, lorsque ω croît de ω_0 à $+\infty$, φ croît de $\pi / 2$ à π ; ces variations sont représentées par la courbe (I) de la figure 361. *Le mouvement du système oscillant est toujours en retard sur le couple qui le produit, et la différence de phase augmente à mesure que la période*

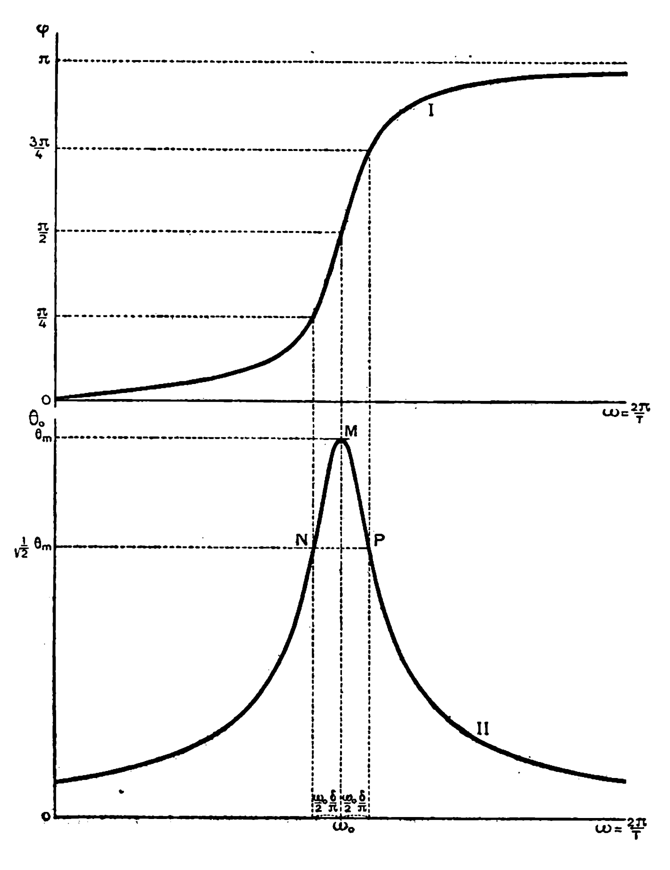


FIG. 361.

des oscillations forcées diminue. L'élongation et le couple sont en phase lorsque cette période est grande par rapport à la période propre du système oscillant; ils sont en opposition de phase lorsqu'elle est petite par rapport à la période propre; ils sont en quadrature, au moment de la résonance, lorsque les deux périodes sont égales.

Pour étudier les variatiors de l'amplitude θ_0, il suffit d'étudier la quantité $y = F^2\omega^2 + I^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ qui figure sous le radical au dénominateur de l'expression de θ_0. Le cas le plus intéressant est celui où l'amortissement est faible : F est petit, et dès que ω diffère un peu de ω_0, on peut confondre y avec son second terme, $I^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2$; sa valeur est d'autant plus grande que ω diffère davantage de ω_0. Les variations de l'amplitude θ_0 sont représentées par la courbe (II) de la figure 361 : *l'amplitude diminue à mesure que la période*

des oscillations forcées s'écarte davantage de la période des oscillations propres. Quand ω est égal à ω_0, la quantité y se réduit au terme $F^2\omega_0^2$; sa valeur est petite, et elle est d'autant plus petite que F est plus petit. *Lorsque la période des oscillations forcées est égale à la période des oscillations propres, l'amplitude présente un maximum,* $\theta_m = P / F\omega_0$, *d'autant plus grand que l'amortissement est plus faible :* c'est le phénomène de la **résonance.**

Si, sans modifier les coefficients I et C, ni par conséquent la période propre T_0, on diminue le couple d'amortissement F, on diminue la valeur de la quantité y correspondant à une pulsation quelconque ω : mais la variation n'est appré-

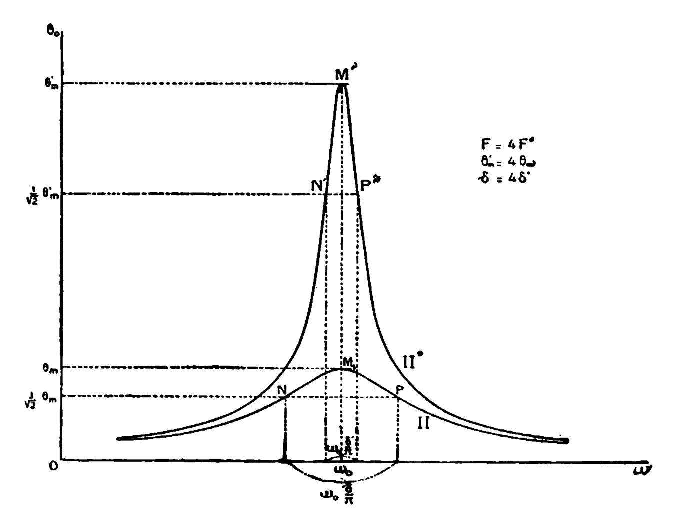


FIG. 362.

ciable qu'autant que le terme $F^2\omega^2$ n'est pas négligeable par rapport au terme $I^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2$. *L'augmentation relative de l'amplitude est d'autant plus grande que l'on se trouve plus près de la résonance;* la nouvelle courbe de résonance (II′) (*fig.* 362) est tout entière au-dessus de l'ancienne (II), et présente un maximum plus accentué. *A mesure que l'on diminue l'amortissement des oscillations propres, on augmente l'amplitude des oscillations forcées, ainsi que le temps nécessaire à leur établissement* (§ 302) *: mais le fait le plus important est que la résonance devient d'autant plus aiguë que l'amortissement devient plus faible.*

Pour faire une discussion plus précise, en étudiant complètement la variation de y, prenons comme variable $x = \omega / \omega_0$, et introduisons (§ 247) le décrément logarithmique des oscillations propres, $\delta = \frac{F}{2I} \cdot T_0 = \pi \frac{F}{I} \cdot \frac{1}{\omega_0}$, en remplaçant F par sa valeur $I \frac{\delta}{\pi} \omega_0$. On a :

$$y = I^2 \left[\frac{\delta^2}{\pi^2} \omega^2\omega_0^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \right] = I^2\omega_0^4 \left[\frac{\delta^2}{\pi^2} x^2 + (1 - x^2)^2 \right],$$

et :

$$\frac{dy}{d(x^2)} = I^2\omega_0^4 \left[\frac{\delta^2}{\pi^2} + 2(x^2 - 1) \right].$$

La fonction y est minimum quand sa dérivée s'annule, c'est-à-dire pour une valeur x_m du rapport ω / ω_0 donnée par :

$$x_m^2 = 1 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}, \qquad \text{d'où} \qquad x_m = 1 - \frac{\delta^2}{4\pi^2},$$

La différence relative $\frac{\omega_m - \omega_0}{\omega_0}$ entre la valeur ω_m de ω correspondant au maximum de l'amplitude et la valeur approchée ω_0 admise plus haut est égale à $x_m - 1$; elle est du second ordre par rapport à δ ; à moins que le mouvement ne soit extrêmement amorti, elle est tout à fait négligeable. Si, par exemple, l'amplitude des oscillations propres diminue de moitié à chaque période, δ est voisin de 0,7, et $\delta^2 / 4\pi^2$ est de l'ordre de $1/80$.

La valeur maximum de l'amplitude correspond à la valeur y_m que donne à y la valeur x_m^2 de x^2; on a :

$$y_m = I^2\omega_0^4 \left[\frac{\delta^2}{\pi^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}\right) + \left(\frac{\delta^2}{2\pi^2}\right)^2\right] = I^2\omega_0^4 \frac{\delta^2}{\pi^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{4\pi^2}\right).$$

La différence relative avec la valeur approchée admise $\left(\theta_m = \frac{P}{F\omega_0}, \text{ correspondant à } y_m = F^2\omega_0^2 = I^2\omega_0^4 \frac{\delta^2}{\pi^2}\right)$ est aussi du second ordre en δ.

Pour nous rendre compte de la façon dont l'acuité de la résonance augmente quand l'amortissement diminue, cherchons la valeur de ω correspondant aux points N et P pour lesquels l'amplitude est réduite à $\theta_m / \sqrt{2}$, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle la quantité y est portée à $2y_m$. On doit avoir :

$$\frac{\delta^2}{\pi^2} x^2 + (1 - x^2)^2 = 2\frac{\delta^2}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\delta^2}{\pi^2}\right),$$

ou

$$(x^2 - 1)^2 = \frac{\delta^2}{\pi^2} + \frac{\delta^2}{\pi^2}(1 - x^2) - \frac{1}{2}\frac{\delta^4}{\pi^4}.$$

On voit que $(x^2 - 1)^2$ est de l'ordre de $\frac{\delta^2}{\pi^2}$, et $x^2 - 1$ de l'ordre de $\frac{\delta}{\pi}$. Si l'on néglige les puissances supérieures de $\frac{\delta}{\pi}$, on a :

$$(x^2 - 1)^2 = \frac{\delta^2}{\pi^2}, \qquad x^2 = 1 \pm \frac{\delta}{\pi}, \qquad x = 1 \pm \frac{1}{2}\frac{\delta}{\pi}.$$

L'acuité de la résonance peut être caractérisée par la variation relative $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = x - 1$, donc par le décrément logarithmique δ, ou par la quantité $\frac{\delta}{\pi} = \frac{F}{I\omega_0} = \frac{F\omega_0}{C}$ (cf. § 297).

304. Oscillographes. — Les oscillographes sont des appareils destinés à enregistrer la forme de la courbe qui représente l'intensité d'un courant en fonction du temps : leurs déviations doivent suivre à chaque instant les

variations de l'intensité. Ils doivent avoir une période propre T_θ très courte par rapport à la période T des courants à étudier, et il est préférable qu'ils soient assez amortis pour que le régime des oscillations forcées s'établisse rapidement.

D'après la discussion faite au paragraphe précédent, il résulte du fait que T_0 est petit par rapport à T, et ω petit par rapport à ω_0, que le mouvement de l'oscillographe est en phase avec le courant à étudier. Pour le calcul de l'amplitude θ_0, la quantité y peut être réduite à son terme principal, $I^2\omega_0^4$; l'élongation θ, produite à l'instant t par le courant d'intensité $i = i_0 \cos \omega t$, a pour expression :

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t = \frac{P}{I\omega_0^2} \cos \omega t = \frac{ki_0}{C} \cos \omega t = \frac{k}{C} i.$$

La déviation est proportionnelle à chaque instant à l'intensité du courant, et le coefficient de proportionnalité est le même qu'en courant continu. Comme ce résultat est indépendant de la période, on peut l'appliquer à la fois au terme fondamental et aux harmoniques qui constituent un courant périodique quelconque : *les variations de la déviation reproduisent fidèlement les variations de l'intensité, même si le courant n'est pas sinusoïdal, et leur enregistrement donne la forme du courant,* à condition que la période des harmoniques qu'il contient reste grande par rapport à la période propre de l'appareil.

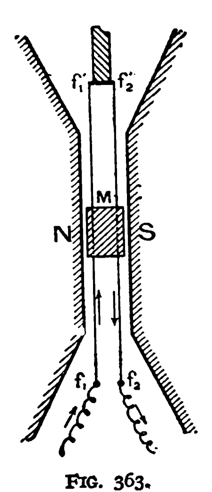


FIG. 363.

Dans l'étude des courants industriels, dont la fréquence est de l'ordre de 50, on emploie des appareils dont la période propre est de l'ordre du millième de seconde : pour obtenir ces courtes périodes sans trop réduire la sensibilité, il est nécessaire de conserver un couple directeur faible et de réaliser un équipage mobile à moment d'inertie très faible. Différents dispositifs ont été employés : la figure 363 représente celui de l'oscillographe Blondel : le cadre mobile est réduit à deux fils métalliques fins $f_1 f'_1$, $f_2 f'_2$, tendus dans l'entrefer d'un aimant, ou mieux d'un électro-aimant, et portant un miroir très léger M, dont la surface est de l'ordre du millimètre carré. Le passage d'un courant produit une flexion en sens inverse des deux fils, et une rotation du miroir M, qu'on peut enregistrer en formant, à l'aide de ce miroir et de lentilles fixes, l'image d'un arc électrique sur une plaque photographique mobile. La période propre est de l'ordre du dix-millième de seconde, la résistance de l'ordre de l'ohm, et on peut obtenir des enregistrements satisfaisants avec des intensités de l'ordre du milliampère.

Le plus souvent, la plaque photographique est fixe, et les déplacements de l'image proportionnels au temps, nécessaires à l'inscription, sont obtenus en la formant à l'aide d'un miroir tournant entraîné par un moteur. Si l'on emploie un moteur synchrone, actionné par un courant alternatif pris sur le même réseau que le courant à étudier, le miroir tournant reprend la même position au bout d'un nombre entier de périodes du courant, et le point lumineux décrit la même courbe sur la plaque à chaque tour du miroir. L'enregistrement est ainsi rendu plus facile par l'augmentation de la quantité de

lumière reçue par la plaque; on peut même remplacer la plaque par un verre dépoli, sur lequel on observe, grâce à la persistance des impressions lumineuses sur la rétine, une courbe lumineuse fixe.

Signalons d'ailleurs que les oscillographes à système oscillant matériel sont de moins en moins employés : on n'emploie plus guère aujourd'hui que les oscillographes cathodiques (§ 378), qui permettent de s'affranchir complètement des limitations dues à l'inertie de l'équipage mobile.

305. Courants induits. — Plaçons, dans le champ alternatif produit par un circuit C parcouru par un courant alternatif d'intensité $i = I \cos \omega t$, un second circuit C' : ce circuit C' est le siège d'une f. é. m. d'induction alternative, qui peut avoir une valeur efficace très élevée, s'il comporte un très grand nombre de spires : c'est là le principe des *transformateurs*, que nous étudierons au chapitre XL.

Si le circuit C' est fermé, il est parcouru par un courant alternatif i' de même période que le courant i, et est soumis à des forces électrodynamiques produites par l'action du courant i sur le courant i'. Dans l'expérience connue sous le nom d'expérience d'Elihu Thomson, le circuit C est constitué par une bobine verticale à noyau de fer doux, et le circuit C' par un anneau de cuivre qu'on enfile sur l'extrémité du noyau : quand on fait passer le courant alternatif dans la bobine, on constate que l'anneau est repoussé avec une force assez grande pour le projeter en l'air. Cette expérience est importante, parce qu'*elle montre la possibilité de produire des forces, et par conséquent de réaliser des moteurs, avec des appareils dont le circuit mobile est fermé sur lui-même, et ne reçoit aucun courant de l'extérieur* (cf. § 310) ; aussi allons-nous donner quelques indications sommaires sur sa théorie.

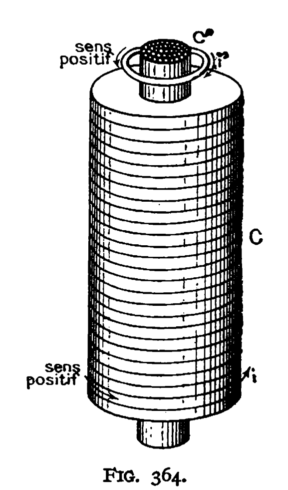


FIG. 364.

Choisissons (*fig.* 364) le même sens positif sur les deux circuits C et C', de façon à avoir pour leur inductance mutuelle M une valeur positive. Les variations de l'intensité i du courant qui parcourt le circuit C produisent dans le circuit C' une f. é. m. d'induction $e' = - M\, di/dt$, dont la phase est opposée à celle de la dérivée di/dt, et qui est, par conséquent, en quadrature retard sur le courant i ; dans le circuit C', constitué par un anneau de cuivre très peu résistant, les effets de la résistance sont négligeables par rapport à ceux de la self-induction : le courant i' qui le parcourt est en quadrature retard sur la f. é. m., donc en opposition de phase avec le courant i, et les deux circuits, parcourus à chaque instant par des courants de sens contraires, se repoussent (cf. § 266).

Si on laisse se déplacer l'anneau C' sous l'action de la force électromagnétique, on recueille du travail ; ce travail, comme l'énergie dissipée par effet Joule dans le circuit C', correspond à une augmentation de l'énergie apportée par le courant alternatif dans le circuit C : *les caractéristiques du circuit* C *sont modifiées du fait de la présence du circuit* C'.

Elles sont d'ailleurs modifiées, même si l'anneau C' est maintenu immobile et si sa résistance est négligeable. En effet, le courant i' produit dans le circuit C une f. é. m. d'induction, $- M di' / dt$, qu'on doit ajouter à la f. é. m. de self-induction $- L di / dt$; dans le cas envisagé, les deux courants i et i' sont en opposition de phase, et il en est de même des deux f. é. m. d'induction, qui sont à chaque instant de signes contraires. On peut dire que la f. é. m. d'induction mutuelle a pour effet de diminuer la f. é. m. de self-induction, et que l'*effet d'une induction mutuelle est équivalent à l'effet d'une réduction de la self*. Si la différence de potentiel aux bornes de la bobine C est maintenue constante, l'intensité efficace du courant qui parcourt cette bobine est augmentée quand on enfile l'anneau C' sur le noyau : on le vérifiera facilement à l'aide d'un ampèremètre thermique.

On pourra rapprocher, du raisonnement fait ici lorsque le circuit C' est parcouru par un courant entièrement déwatté, celui que nous ferons, dans l'étude des transformateurs industriels (§ 448), lorsque le circuit C' est parcouru par un courant presque entièrement watté : là encore, l'existence du courant i' dans le circuit C' augmente l'intensité efficace du courant i dans le circuit C.

II. — *CHAMPS TOURNANTS*

306. Courants polyphasés. — Un **alternateur polyphasé** (voir chap. XL) est un alternateur qui comporte n circuits identiques, fournissant n forces électromotrices de même période, de même valeur efficace, présentant entre elles des différences de phase de $2\pi / n$. On concevra la possibilité de l'existence d'alternateurs polyphasés en imaginant qu'on fasse tourner dans le champ magnétique terrestre, autour d'un axe vertical, un système de n cadres identiques, placés dans des plans verticaux faisant entre eux des angles de $2\pi / n$.

Si les n circuits de l'alternateur polyphasé sont fermés sur n circuits d'utilisation identiques entre eux, on obtient un système de **courants polyphasés**, formé de n courants de même période, de même intensité efficace, présentant entre eux des différences de phase de $2\pi / n$. Leurs intensités à l'instant t peuvent être représentées par les formules :

$$i_1 = I \cos \omega t, \quad i_2 = I \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right), \quad \ldots \quad i_n = I \cos\left[\omega t - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right].$$

Les courants polyphasés employés industriellement correspondent aux deux valeurs $n = 3$ et $n = 4$.

Étudions d'abord le cas de $n = 4$. Les f. é. m., telles que e_1 et e_2, fournies par deux circuits consécutifs de l'alternateur, tels que A_1B_1 et A_2B_2 (*fig.* 365), présentent entre elles une différence de phase de $\pi / 2$; les f. é. m. e_1 et e_3 qui sont fournies par les circuits A_1B_1 et A_3B_3 sont en opposition de phase. Si on réunit les circuits A_1B_1 et A_3B_3 suivant le schéma indiqué par la figure 365, leurs f. é. m. s'ajoutent à chaque instant pour produire un courant d'intensité i_1 dans le circuit extérieur, constitué par la ligne à deux fils F_1F_3 et le circuit d'utilisation D_1D_3. De même, les circuits A_2B_2 et A_4B_4 de l'alternateur peuvent être réunis pour produire un courant d'intensité i_2 dans le

circuit $F_2D_2D_4F_4$. Le système se réduit à deux courants : si les deux circuits sont identiques, ils ont même intensité efficace, et présentent entre eux la même différence de phase $\pi / 2$ que les deux f. é. m. e_1 et e_2. De tels courants

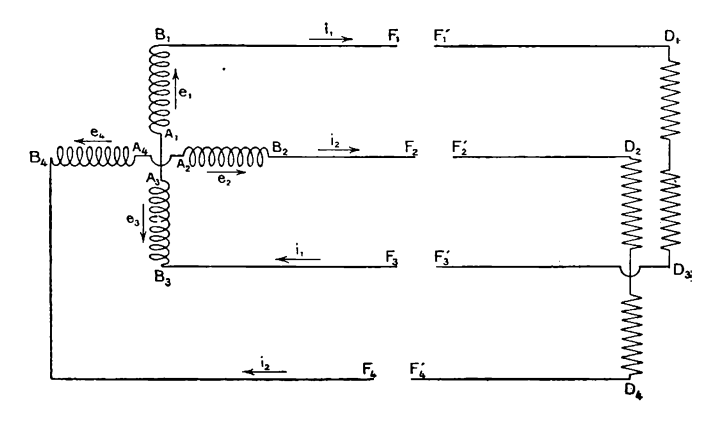


FIG. 365.

s'appellent des **courants diphasés ;** leurs intensités à l'instant t peuvent être représentées par les formules :

$$i_1 = \mathrm{I} \cos \omega t, \qquad i_2 = \mathrm{I} \sin \omega t.$$

Prenons maintenant $n = 3$. On peut d'abord imaginer qu'on réalise trois circuits entièrement distincts : chacun d'eux comprend un des circuits A_1B_1 de l'alternateur triphasé, un des circuits d'utilisation D_1E_1, et deux fils, un fil d'aller B_1D_1 et un fil de retour E_1A_1. Si les trois circuits sont identiques, les courants qui les parcourent forment un système de **courants triphasés,** dont les intensités peuvent être représentées par les formules :

$$i_1 = \mathrm{I} \cos \omega t, \qquad i_2 = \mathrm{I} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad i_3 = \mathrm{I} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

De même qu'on peut assurer le retour de plusieurs lignes télégraphiques par la terre, formant un conducteur de retour unique, de même on peut réunir en un seul les trois fils de retour des trois courants triphasés ; on réunira en un même point O (*fig.* 366) les extrémités correspondantes des trois enroulements de l'alternateur, et en un même point O' les extrémités correspondantes des trois circuits d'utilisation : le fil de retour ff' est parcouru à l'instant t par un courant d'intensité $i = i_1 + i_2 + i_3$. Calculons i par la méthode graphique (*fig.* 367) : les trois courants i_1, i_2 et i_3 sont représentés par des vecteurs de même longueur, $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$, qui font entre eux des angles de $2\pi / 3$; la figure qu'ils forment est un triangle équilatéral, et leur somme $\overrightarrow{OM_3}$ est nulle. *Le fil de retour ff' n'est parcouru par aucun courant, et peut être supprimé.*

Le montage que nous venons de décrire est appelé le **montage en étoile.** Lorsque les circuits sont ouverts, la différence de potentiel $v_3 - v_2$ entre deux

fils de ligne F_2 et F_3 est égale à la différence $e_3 - e_2$ des f. é. m. qui existent dans les deux circuits correspondants de l'alternateur. Représentons graphiquement les trois f. é. m. e_1, e_2, e_3, de valeur efficace commune E_e (*fig.* 368) :

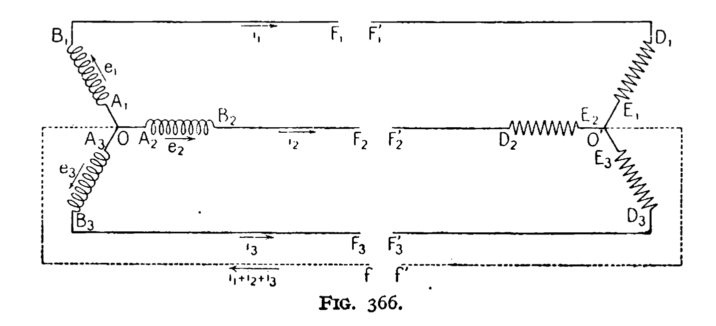


FIG. 366.

elles sont représentées par trois vecteurs $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_2}$, $\overrightarrow{OB_3}$, de longueur E_e, faisant entre eux des angles égaux à $2\pi / 3$. La différence $\overrightarrow{OB_3} - \overrightarrow{OB_2}$ est le

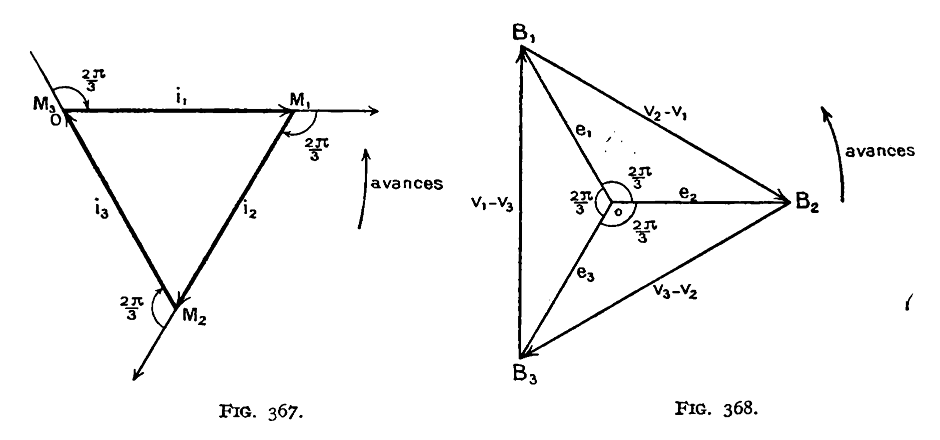


FIG. 367. FIG. 368.

vecteur $\overrightarrow{B_2B_3}$: les différences de potentiel entre les fils sont représentées par les vecteurs $\overrightarrow{B_2B_3}$, $\overrightarrow{B_3B_1}$ et $\overrightarrow{B_1B_2}$, qui sont les trois côtés d'un triangle équilatéral ; elles forment un système de différences de potentiel triphasées, de valeur efficace $2E_e \cos\frac{\pi}{6} = E_e\sqrt{3}$, décalé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport aux f. é. m.

On peut remplacer, soit à l'alternateur, soit aux circuits d'utilisation, soit des deux côtés, le montage en étoile par un **montage en triangle ;** on placera par exemple (*fig.* 369) chacun des circuits d'utilisation entre deux des trois fils $F_1F_2F_3$ qui amènent les courants triphasés. On établit ainsi entre leurs extrémités des différences de potentiel triphasées : s'ils sont identiques, ils sont parcourus par des courants triphasés, dont on calculera facilement les intensités i_1, i_2, i_3, si l'on connaît les différences de potentiel entre les fils et les caractéristiques des circuits. Les intensités des courants

qui parcourent les trois fils F_1, F_2 et F_3 sont, d'après la première loi de Kirchhoff, $i_2 - i_3$, $i_3 - i_1$ et $i_1 - i_2$: on les calculera par la méthode graphique (*fig.* 370), en représentant les trois courants i_1, i_2, i_3 par les trois vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$, de longueur I_e; les courants dans les fils sont représentés par les vecteurs $\overrightarrow{M_3M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_2M_1}$: la figure montre immédiatement

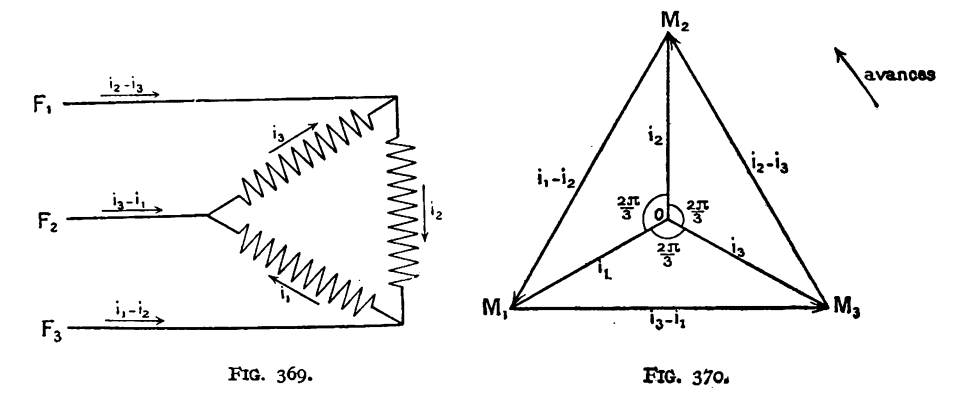


FIG. 369. FIG. 370.

qu'ils forment un triangle équilatéral et représentent un système de courants triphasés d'intensité efficace $I_e\sqrt{3}$ (1).

307. Champs tournants. — L'importance industrielle des courants polyphasés provient de la possibilité qu'ils offrent de réaliser des moteurs particulièrement simples et robustes, grâce à l'emploi des champs magnétiques tournants, qu'ils permettent d'obtenir à l'aide de bobines fixes.

Considérons d'abord le cas des courants diphasés :

$$i_1 = I\cos\omega t \qquad i_2 = I\sin\omega t,$$

et supposons qu'ils parcourent deux bobines B_1B_2 (ou deux groupes de bobines) produisant en un point O des champs magnétiques rectangulaires (*fig.* 371). Le courant i_1 passe dans la bobine B_1, et produit en O un champ dirigé suivant Ox, proportionnel à l'intensité i_1, que nous pouvons représenter par : $H_1 = Gi_1 = GI\cos\omega t$; le courant i_2 passe dans la bobine B_2, et produit en O un champ dirigé suivant Oy, $H_2 = Gi_2 = GI\sin\omega t$. Les bobines sont identiques, et disposées de la même façon par rapport au point O, de sorte que le coefficient G est le même pour les deux champs.

Le champ magnétique $\overrightarrow{H}$ en O est la résultante des deux champs compo-

(1) Dans la figure 370, on a supposé que les différences de potentiel entre les fils sont données par les vecteurs $\overrightarrow{B_2B_3}$, $\overrightarrow{B_3B_1}$ et $\overrightarrow{B_1B_2}$ de la figure 368, et que les 3 conducteurs montés en triangle sont des résistances sans self : les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OM_3}$ sont respectivement parallèles aux vecteurs $\overrightarrow{B_2B_3}$, $\overrightarrow{B_3B_1}$ et $\overrightarrow{B_1B_2}$. Les courants $i_2 - i_3$, $i_3 - i_1$, $i_1 - i_2$ dans les 3 circuits de l'alternateur sont alors respectivement en phase avec les 3 f. é. m. e_1, e_2, e_3.

sants H_1 et H_2 : ses composantes suivant les deux axes Ox et Oy sont :

$$H_x = H_1 = GI\cos\omega t, \qquad H_y = H_2 = GI\sin\omega t.$$

Son intensité H est :

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = GI,$$

et il fait avec Ox l'angle α donné par :

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{H_y}{H_x} = \text{tang}\,\omega t, \qquad \alpha = \omega t.$$

Le champ magnétique créé en O *par les deux bobines fixes parcourues par les courants diphasés a une intensité* H *constante, et sa direction tourne avec*

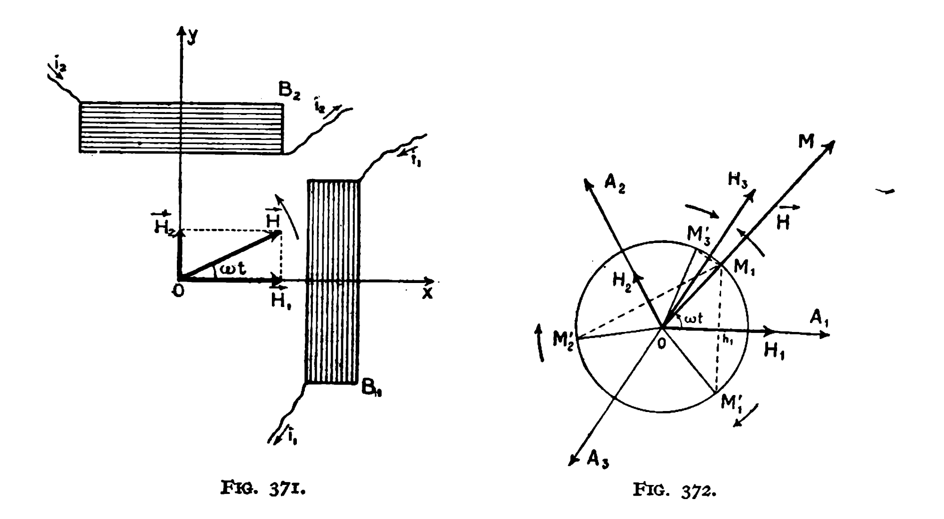


FIG. 371. FIG. 372.

une vitesse angulaire ω *égale à la pulsation des courants, c'est-à-dire fait par seconde un nombre de tours égal à la fréquence des courants.* C'est un tel champ qu'on appelle un **champ tournant.**

Considérons maintenant le cas des courants triphasés :

$$i_1 = I\cos\omega t, \qquad i_2 = I\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad i_3 = I\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

On les fait passer respectivement dans trois bobines identiques B_1, B_2, B_3, occupant des positions qu'on peut déduire les unes des autres par des rotations de $2\pi/3$ autour d'un axe passant par le point O (*fig.* 372). Les champs magnétiques qu'elles créent en O sont dirigés suivant 3 axes OA_1, OA_2, OA_3, faisant entre eux des angles égaux de $2\pi/3$; ils ont même valeur maximum GI, et présentent entre eux des différences de phase égales à $2\pi/3$.

Considérons le premier de ces champs, représenté à l'instant t par le vecteur $OH_1 = GI \cos \omega t$: ce vecteur peut être considéré (cf. § 286) comme la somme $2Oh_1$ (*fig.* 372) des projections des deux vecteurs OM_1 et OM'_1, de grandeur $GI/2$, tournant en sens inverses avec la même vitesse angulaire ω, et dont la direction est confondue à l'instant $t = 0$ suivant la direction OA_1; il revient au même de dire que le champ alternatif $\vec{H}_1$ est la résultante des deux champs tournants représentés par les vecteurs OM_1 et OM'_1. Considérons maintenant le champ $\vec{H}_2$ dirigé suivant OA_2 : il est aussi la résultante de deux champs tournants de sens inverses, de même grandeur $GI/2$, dont les directions sont confondues entre elles et avec OA_2 à l'instant $t = T/3$; comme l'angle $2\pi/3$ de OA_2 avec OA_1 est précisément parcouru dans un temps égal à $T/3$, celui de ces deux champs qui tourne dans le sens positif est représenté à l'instant t par le même vecteur OM_1 déjà considéré pour le champ $\vec{H}_1$, l'autre est représenté par le vecteur OM'_2 symétrique de OM_1 par rapport à OA_2. De même le champ $\vec{H}_3$ est la somme de deux champs tournants de sens inverses d'intensité $GI/2$: celui qui tourne dans le sens positif est représenté par le même vecteur OM_1 que les précédents, tandis que celui qui tourne dans le sens négatif est représenté par le vecteur OM'_3 symétrique de OM_1 par rapport à OA_3.

Pour former à l'instant t le champ résultant $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3$, il faut faire la somme des 6 vecteurs que nous venons de définir; trois d'entre eux — OM'_1, OM'_2, OM'_3 — sont parallèles aux 3 côtés d'un triangle équilatéral et ont une somme nulle; les trois autres sont confondus entre eux : le champ résultant $\vec{H}$ est donc un vecteur OM dirigé suivant OM_1, dont la longueur, $OM = 3OM_1$, a la valeur constante $3GI/2$; il tourne, comme le vecteur OM_1, avec la vitesse angulaire ω dans le sens positif, et passe sur les trois directions OA_1, OA_2, OA_3 aux instants $0, T/3$ et $2T/3$. *Les courants triphasés, comme les courants diphasés, comme d'ailleurs tous les courants polyphasés, permettent de réaliser, avec des bobines fixes, des champs magnétiques tournants, faisant un tour à chaque période du courant.*

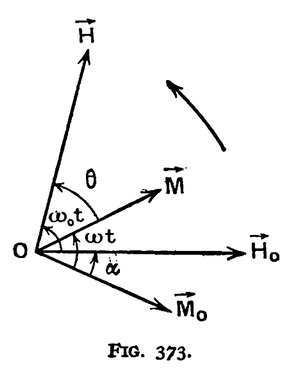


FIG. 373.

308. Action d'un champ tournant sur un aimant. — En un point O, où existe un champ magnétique tournant d'intensité H et de vitesse angulaire ω_0, créé par des courants polyphasés de fréquence $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$, plaçons un aimant permanent, dont le moment magnétique a pour grandeur M, et supposons qu'il tourne, autour du même axe que le champ, avec une vitesse angulaire ω. Soient $\vec{H}_0$ et $\vec{M}_0$ (*fig.* 373) les directions du champ et du moment magnétique à l'instant $t = 0$, $\vec{H}$ et $\vec{M}$ leurs directions à l'instant t ; convenons de compter les angles positivement dans le sens de la rotation du champ : ω_0 sera positif, ω pourra être positif ou négatif; posons

$(\vec{M}_0, \vec{H}_0) = \alpha$. Les différents vecteurs font entre eux les angles : $(\vec{H}_0,\vec{H}) = \omega_0 t$, $(\vec{M}_0,\vec{M}) = \omega t$, $(\vec{M},\vec{H}) = (\vec{M},\vec{M}_0) + (\vec{M}_0,\vec{H}_0) + (\vec{H}_0,\vec{H}) = (\omega_0 - \omega) t + \alpha$

Le champ magnétique $\vec{H}$ produit à l'instant t sur l'aimant $\vec{M}$ un couple Γ, dont la valeur, comptée positivement dans le sens de la rotation du champ, est :

$$\Gamma = MH \sin(\vec{M}, \vec{H}) = MH \sin[(\omega_0 - \omega) t + \alpha].$$

Si les vitesses angulaires ω et ω_0 sont différentes, ce couple, alternativement positif et négatif, est alternativement moteur et résistant; sa valeur moyenne est nulle, et il ne fournit au total aucun travail.

Si l'aimant est lancé, dans le sens de rotation du champ, avec une vitesse angulaire ω inférieure à ω_0, ou s'il est lancé en sens inverse avec une vitesse angulaire quelconque, et si son mouvement n'est pas entretenu par une force extérieure, sa vitesse se ralentit peu à peu par l'effet des frottements, et il finit par s'arrêter complètement.

Si l'aimant est lancé, dans le sens de rotation du champ, avec une vitesse angulaire ω égale à ω_0, c'est-à-dire si les deux rotations sont **synchrones,** l'angle $\vec{M}, \vec{H}$ conserve la valeur constante α, et le couple conserve une valeur constante :

$$\Gamma = MH \sin\alpha.$$

D'après les conventions de signes faites pour compter les angles, le couple est moteur si Γ est positif, par conséquent si le retard α du mouvement de l'aimant sur celui du champ est compris entre o et π.

Si l'aimant est lancé à la vitesse du synchronisme, l'action du champ tournant est susceptible d'entretenir son mouvement, et même de vaincre un couple résistant appliqué à l'aimant.

C'est le principe des **moteurs synchrones** (cf. chap. XI) : on remarquera qu'ils sont incapables de démarrer d'eux-mêmes; il faut préalablement les lancer à la vitesse du synchronisme, ou, comme l'on dit souvent, les *accrocher* sur le courant.

Soit Γ_r la valeur du couple résistant, produit par les frottements et par les machines entraînées par le moteur : le retard α se fixe à une valeur telle que le couple moteur, $\Gamma = MH \sin \alpha$, soit égal à Γ_r. Supposons que, pour une raison quelconque, le couple résistant Γ_r vienne à augmenter : le mouvement de l'aimant tend à se ralentir, son retard α sur le champ augmente ; si α est compris entre o et $\pi / 2$, sin α augmente : le couple moteur augmente, et il s'établit un nouveau régime de rotation synchrone, correspondant à une valeur plus grande du retard. *A intensité constante du champ, les régimes de rotation correspondant à des retards compris entre* o *et* $\pi / 2$ *sont stables, ceux qui correspondent à des retards compris entre* $\pi / 2$ *et* π *sont instables.*

Lorsqu'un moteur synchrone tourne à vide, et si les frottements sont négligeables, il s'établit un régime correspondant à une valeur nulle du couple moteur Γ, donc du retard α; à mesure qu'on charge le moteur, c'est-à-dire qu'on augmente le couple résistant Γ_r, le retard α augmente. Il atteint la valeur $\pi / 2$ lorsque le couple résistant atteint la valeur MH; l'aimant est

alors, à chaque instant, normal au champ; il est constamment soumis au couple maximum que le champ peut exercer sur lui. Si l'on surcharge le moteur, c'est-à-dire si l'on donne au couple résistant une valeur supérieure à la valeur maximum MH que peut atteindre le couple moteur, l'aimant se ralentit et s'arrête : on dit que le moteur *se décroche*.

309. Forces électromotrices induites par le mouvement de l'aimant. — Le travail fourni par un moteur synchrone provient évidemment de l'énergie électrique apportée par les courants polyphasés dans les bobines qui créent le champ tournant. Le flux envoyé par l'aimant à travers ces bobines varie au cours de la rotation, et y crée des f. é. m. d'induction polyphasées qui représentent la force contre-électromotrice du moteur. Il résulte du théorème général sur la corrélation entre les phénomènes d'induction et les phénomènes électromagnétiques [1] que le travail fourni par le couple moteur Γ est à chaque instant égal à l'énergie électrique absorbée par les forces contre-électromotrices; bien entendu, cette énergie ne se partage pas également à chaque instant entre les différentes bobines, et ce n'est qu'en prenant la valeur totale de l'énergie pour une période entière qu'on trouvera que les différents courants qui constituent le système de courants polyphasés apportent au moteur des énergies égales.

La valeur efficace de la force électromotrice induite dans un des circuits par le mouvement de l'aimant ne dépend pas du retard α de ce mouvement sur la rotation du champ : lorsque la charge varie, la variation correspondante de la puissance électrique consommée dans chaque circuit provient de la variation du facteur de puissance. Quand le moteur travaille à pleine charge ($\alpha = \pi / 2$), la puissance consommée est maximum, la [illegible]
en opposition de phase avec le courant. Autrement dit, leur différence de phase φ est égale à π, et on a $\cos \varphi = -1$. Quand la charge diminue, $\cos \varphi$ diminue en valeur absolue, et quand le moteur tourne à vide et que la puissance consommée est nulle, la f. é. m. est en quadrature avec le courant.

Supprimons les courants polyphasés qui alimentaient le moteur, et faisons tourner l'aimant avec la même vitesse angulaire ω_0 que précédemment : les valeurs efficaces des f. é. m. induites par l'aimant dans les bobines ne sont pas modifiées, et l'appareil fonctionne comme un alternateur polyphasé. Si les bobines sont fermées sur des circuits extérieurs identiques, ne contenant pas de générateurs, il s'y établit un système de courants polyphasés ; les bobines parcourues par ces courants créent encore un champ tournant : mais cette fois, l'appareil fournit de l'énergie électrique et consomme une puissance mécanique équivalente. Le couple électromagnétique, $\Gamma = MH \sin \alpha$, est un couple résistant; d'après nos conventions de signes, sa valeur doit être négative, et le mouvement de l'aimant est en avance sur la rotation du champ d'un angle $-\alpha$ dont la valeur dépend de la différence de phase φ entre la f. é. m. et le courant; si la f. é. m. est, dans chaque circuit, en phase avec le courant, la valeur de $\sin \alpha$ est égale à -1, et la direction du moment magnétique de l'aimant est à chaque instant en avance de $\pi / 2$ sur celle du champ tournant (cf. §§ 439 et 442).

[1] Nous avons démontré ce théorème (§ 240) dans le cas d'un circuit mobile dans le champ magnétique constant créé par un aimant ; il est évident qu'il s'applique encore quand le circuit est fixe et l'aimant mobile.

On peut résumer cette discussion en disant que *l'alternateur et le moteur synchrone forment un seul et même appareil, qui permet de réaliser la transformation réversible de l'énergie mécanique en énergie électrique, et réciproquement : la force électromotrice d'induction a toujours la même valeur efficace ; seule sa différence de phase* φ *avec le courant varie, en même temps que l'angle* α *du moment magnétique de l'aimant et du champ tournant créé par les bobines : dans le fonctionnement moteur, on a* $\sin\alpha > 0$ *et* $\cos\varphi < 0$; *dans le fonctionnement générateur, on a* $\sin\alpha < 0$ *et* $\cos\varphi > 0$.

310. Action d'un champ tournant sur un circuit fermé. — Plaçons en O (*fig.* 374), dans le champ tournant d'intensité H et de vitesse angulaire ω_0, un circuit plan C, de surface S, de résistance r, de self-inductance L ; supposons que son plan contienne l'axe autour duquel tourne le champ magnétique, et tourne lui-même autour de cet axe avec une vitesse angulaire ω. Choisissons sur le circuit un sens positif pour compter les f. é. m. et les courants ; nous choisissons par là même, d'après la règle d'Ampère, un sens positif $\overrightarrow{ON}$ sur la normale à son plan.

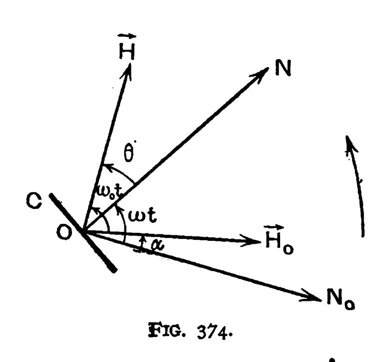


FIG. 374.

La valeur de l'angle $(\overrightarrow{ON}, \vec{H})$ à l'instant t, comptée positivement dans le sens de la rotation du champ, est $\theta = (\omega_0 - \omega)\,t + \alpha$; le flux du champ $\vec{H}$ à travers le circuit C est $\Phi = \mathrm{SH}\cos\theta$, et la f. é. m. induite dans le cadre a pour valeur :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \mathrm{SH}\,(\omega_0 - \omega)\sin[(\omega_0 - \omega)\,t + \alpha].$$

C'est une f. é. m. sinusoïdale, de pulsation $\omega_0 - \omega$; elle produit, dans le cadre, un courant sinusoïdal de même pulsation :

$$i = \mathrm{I}\sin[(\omega_0 - \omega)\,t + \alpha - \varphi] = \mathrm{I}\sin(\theta - \varphi),$$

dont l'intensité maximum I et le retard φ sont donnés par les relations :

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{SH}\,(\omega_0 - \omega)}{\sqrt{r^2 + \mathrm{L}^2\,(\omega_0 - \omega)^2}}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{L}\,(\omega_0 - \omega)}{r}.$$

Le courant i est soumis, de la part du champ $\vec{H}$, au même couple qu'un aimant dont le moment magnétique serait dirigé suivant $\overrightarrow{ON}$, et aurait pour valeur Si. La valeur de ce couple, comptée positivement dans le sens de la rotation du champ, est :

$$\Gamma = \mathrm{S}i\mathrm{H}\sin\theta = \mathrm{SIH}\sin\theta\sin(\theta - \varphi) = \frac{\mathrm{SIH}}{2}\cos\varphi - \frac{\mathrm{SIH}}{2}\cos(2\theta - \varphi).$$

Quand t varie de 0 à $\dfrac{2\pi}{\omega_0 - \omega}$, θ varie de α à $2\pi + \alpha$, et la valeur moyenne

de cos $(2\theta - \varphi)$ est nulle. La valeur moyenne du couple moteur est, en désignant par $\Phi_0 = SH$ le flux maximum à travers le cadre :

$$\Gamma_m = \frac{1}{2} SIH \cos\varphi = \frac{1}{2} SH \frac{SH(\omega_0 - \omega)}{\sqrt{r^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{r^2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Phi_0^2 r(\omega_0 - \omega)}{r^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}.$$

Lorsque le cadre tourne dans le même sens que le champ, avec une vitesse angulaire inférieure ($\omega < \omega_0$), *il est soumis à un couple moteur dont la valeur moyenne n'est pas nulle, et il peut fournir du travail :* c'est le principe des **moteurs asynchrones**, dans lesquels le circuit mobile ne reçoit aucun courant de l'extérieur.

Pour étudier la variation du couple moyen Γ_m en fonction de la vitesse angulaire ω, nous l'écrirons sous la forme $\Gamma_m = \frac{\Phi_0^2}{2y}$, en posant $y = \frac{r}{\omega_0 - \omega} + \frac{L^2}{r}(\omega_0 - \omega)$. La quantité y est la somme de deux termes, dont le produit est constant ; elle est minimum quand les deux termes, sont égaux, c'est-à-dire pour la valeur ω_M de la vitesse donnée par $(\omega_0 - \omega_M)^2 = r^2 / L^2$; elle décroît à mesure que ω s'écarte de ω_M, enfin on peut remarquer qu'elle reprend la même valeur absolue quand $\omega_0 - \omega$ change de signe en gardant la même valeur absolue. Il est dès lors facile de construire (*fig.* 375) la courbe qui représente les variations de Γ_m en fonction de ω : le couple part de 0 pour $\omega = -\infty$, croît jusqu'à un maximum $\Gamma_M = \frac{\Phi_0^2}{4L}$, atteint pour $\omega_M = \omega_0 - \frac{r}{L}$, puis décroît jusqu'à 0 quand ω croît jusqu'à ω_0; aux valeurs supérieures de ω correspond une seconde branche de courbe CM'D symétrique de la première par rapport au point C.

Le couple moyen Γ_m est moteur lorsqu'il est de même signe que la vitesse angulaire ω, c'est-à-dire sur la branche de courbe BMC. Aux vitesses angulaires négatives correspondent des couples électromagnétiques résistants, dont les valeurs, données par la branche de courbe AB, sont toujours faibles ; lorsque la vitesse ω vient à dépasser la vitesse ω_0 du synchronisme, le couple électromagnétique Γ_m devient résistant, et prend rapidement des valeurs assez fortes, données par la partie CM' de la courbe.

Supposons que le moteur ait à vaincre un couple résistant Γ_r, produit par les frottements et les machines qu'il entraîne. Si le cadre est primitivement au repos, il est soumis à un couple moteur Γ_0 représenté par le point B ; si Γ_0 est supérieur à Γ_r, il se met en mouvement dans le sens de la rotation du champ. Tant que le point figuratif du mouvement reste sur l'arc BMP de la courbe, le couple moteur est supérieur au couple résistant, et le mouvement s'accélère ; quand il arrive en P, les deux couples sont égaux, et le moteur a atteint son régime. On peut alors le charger davantage, c'est-à-dire augmenter Γ_r : le mouvement du cadre se ralentit, le point figuratif se rapproche de M et le couple moteur augmente jusqu'à équilibrer le couple résistant.

En résumé, *un moteur asynchrone à champ tournant est susceptible de démarrer sous charge réduite* ($\Gamma_r < \Gamma_0$) *; pour une valeur donnée du flux induc-*

teur Φ_0, on obtient un fonctionnement stable du moteur, correspondant à la branche MC *de la courbe, pour des couples compris entre* o *et* $\Gamma_M = \Phi_0^2 / 4L$ *; la vitesse du cadre tournant est toujours inférieure à celle du synchronisme, et lui est d'autant plus inférieure que la charge est plus forte.* Pour la charge maximum,

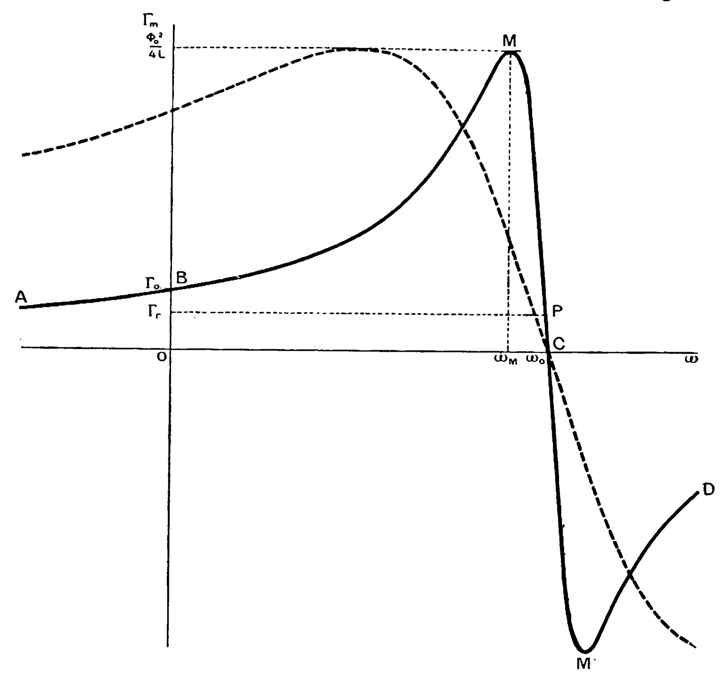


FIG. 375.

la différence relative $\frac{\omega_0 - \omega_M}{\omega_0}$ est égale à $\frac{r}{L\omega_0}$; nous verrons que, dans les moteurs industriels, dont le circuit tournant comporte un noyau de fer doux, elle est de l'ordre de 3 à 4 o/o.

Le couple Γ_0 s'appelle le **couple de démarrage** : pour son calcul, on peut négliger r^2 par rapport à $L^2\omega_0^2$, et on obtient $\Gamma_0 = \frac{\Phi_0^2 r}{2L^2\omega_0} = \Gamma_M \frac{2r}{L\omega_0}$. On voit qu'on augmente sa valeur en introduisant dans le circuit mobile une résistance supplémentaire : la courbe en pointillé de la figure 375 représente la variation du couple moteur Γ_m pour une résistance du circuit mobile cinq fois plus grande que celle qui correspond à la courbe en traits pleins.

310 *bis*. Action simultanée de deux champs tournants de sens inverses sur un circuit fermé. — Supposons maintenant que le circuit C soit soumis simultanément à deux champs, d'intensités H et H', tournant en sens inverses avec la même vitesse angulaire ω_0. Ces deux champs font à l'instant t avec la direction H_0 (*fig.* 374) les angles $\omega_0 t$ et $-\omega_0 t$ et avec la normale au circuit les angles $\theta = (\omega_0 - \omega) t + \alpha$ et $\theta' = -(\omega_0 + \omega) t + \alpha$. En répétant les

calculs du paragraphe précédent, on trouve pour le courant dans le circuit une expression de la forme :

$$i = \mathrm{I} \sin(\theta - \varphi) + \mathrm{I}' \sin(\theta' - \varphi').$$

Les quantités I, I′ φ et φ' peuvent être calculées en considérant les deux champs séparément, car l'équation différentielle qui relie le courant i à la f. é. m. e est linéaire, et le courant produit à l'instant t par la superposition de deux f. é. m. est la somme des courants que produiraient séparément à cet instant les deux f. é. m. agissant seules.

Le couple exercé sur le courant i à l'instant t par le champ résultant est :

$$\Gamma = \mathrm{S}i\mathrm{H} \sin\theta + \mathrm{S}i\mathrm{H}' \sin\theta' = \mathrm{SIH} \sin\theta \sin(\theta - \varphi) + \mathrm{SI'H'} \sin\theta' \sin(\theta' - \varphi')$$
$$+ \mathrm{SIH'} \sin\theta' \sin(\theta - \varphi) + \mathrm{SI'H} \sin\theta \sin(\theta' - \varphi).$$

Mais les angles θ et θ' varient avec des périodes différentes: les valeurs moyennes des deux derniers termes sont nulles, et le couple moyen se réduit à la somme des valeurs moyennes des deux premiers termes : *le couple moyen produit par l'action de deux champs tournant en sens inverses est égal à la somme des deux couples moyens que produiraient ces deux champs agissant séparément.*

Comme premier exemple, supposons le circuit C placé dans un champ alternatif de direction fixe et de valeur maximum H : ce champ peut être considéré comme résultant de la superposition de deux champs circulaires de grandeur $h = \mathrm{H}/2$ tournant en sens inverses, avec une vitesse angulaire ω_0 égale à la

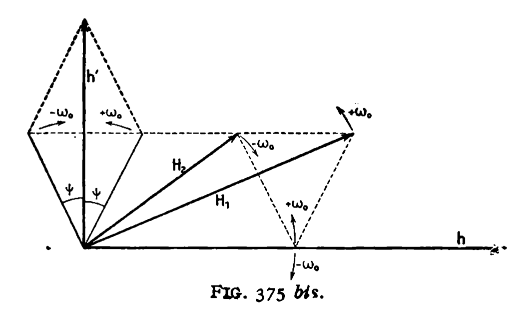


FIG. 375 *bis*.

pulsation du champ alternatif. Si le circuit est immobile, le couple résultant est nul; mais s'il est lancé avec une vitesse ω voisine de ω_{M}, il est soumis, de la part du champ qui tourne dans le même sens, à un couple moteur élevé, représenté, sur la courbe de la figure 375, par un point voisin de M; le second champ exerce au contraire un couple résistant faible, qui est représenté par un point de l'arc AB des vitesses négatives, et que l'on peut négliger vis-à-vis du premier. C'est le principe des **moteurs asynchrones monophasés** (§ 445), qui sont susceptibles de fournir du travail à condition qu'on les ait fait démarrer par un artifice convenable.

Comme second exemple, supposons le circuit C soumis à deux champs alternatifs de directions rectangulaires, de même pulsation ω_0, de valeurs maxima h et h', et présentant entre eux une différence de phase ψ. Chacun de ces champs

peut être décomposé en deux champs tournants inverses, de grandeurs $h/2$ et $h'/2$, et la figure 375 *bis*, représentant la position des vecteurs à l'instant où le champ h est maximum, montre que les deux champs qui tournent avec la vitesse $+\omega_0$ présentent entre eux une différence de phase $\pi/2 - \psi$, tandis que ceux qui tournent avec la vitesse $-\omega_0$ présentent la différence de phase $\pi/2 + \psi$. Ajoutons alors par la règle de Fresnel les champs qui tournent dans le même sens : le circuit est soumis à l'action de deux champs tournants de sens inverses, dont les intensités sont données par les relations :

$$H_1^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{h'}{2}\right)^2 + 2\,\frac{h}{2}\,\frac{h'}{2}\sin\psi, \qquad H_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{h'}{2}\right)^2 - 2\,\frac{h}{2}\,\frac{h'}{2}\sin\psi.$$

Supposons la self- induction du circuit mobile assez faible pour qu'on puisse réduire à son premier terme r^2 le dénominateur de la formule établie au paragraphe précédent pour le couple moyen; en posant $S^2/2r = 2A$, l'application de cette formule aux deux champs tournants donne pour le couple résultant :

$$\Gamma = 2A\,(\omega_0 - \omega)\,H_1^2 - 2A\,(\omega_0 + \omega)\,H_2^2 = 2A\omega_0 hh' \sin\psi - A\omega\,(h^2 + h'^2).$$

Le dispositif que nous venons d'étudier est, en principe, celui des **compteurs à induction**, qui sont à peu près les seuls compteurs d'énergie employés dans la pratique, depuis que les distributions d'énergie se font presque uniquement en courant alternatif. Le conducteur mobile, où se développent par induction les courants i, est un disque de cuivre placé dans l'entrefer d'électro-aimants dont le fer est assez loin de la saturation pour que les champs soient proportionnels aux courants d'excitation. L'électro qui produit le champ h est parcouru par le courant $i = I\cos(\omega_0 t - \varphi)$ du circuit à contrôler, le champ correspondant est $h\cos(\omega_0 t - \varphi)$, avec $h = gI$; l'électroaimant qui produit le champ h' est alimenté en dérivation par la tension $e = E\cos\omega_0 t$, et est construit de façon que sa résistance soit négligeable devant sa self-induction, de sorte qu'il consomme un courant en retard de $\pi/2$ sur la tension, et produit un champ $h'\cos(\omega_0 t - \pi/2)$, avec $h' = g'E$, décalé de $\psi = \pi/2 - \varphi$ sur le champ h. Un aimant permanent produit un couple d'amortissement $-B\omega$ (cf. § 221), de sorte que la vitesse de régime est donnée par la relation :

$$-B\omega + 2A\omega_0 hh'\sin\psi - A\omega\,(h^2 + h'^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \omega = \frac{2A\omega_0 gg' EI\cos\varphi}{B + A\,(g^2I^2 + g'^2E^2)}.$$

Dans la pratique, la tension E est constante; il suffit de réaliser une construction telle que le terme Ag^2I^2 du dénominateur soit négligeable par rapport aux autres pour que la vitesse de rotation soit proportionnelle à $EI\cos\varphi$, c'est-à-dire à la puissance consommée, et que la rotation totale soit proportionnelle à l'énergie consommée (cf. § 257).

CHAPITRE XXX

COURANTS DE HAUTE FRÉQUENCE

I. — *PRODUCTION DES COURANTS DE HAUTE FRÉQUENCE*

311. Oscillations amorties. — Les premiers courants de haute fréquence obtenus ont été les courants alternatifs produits par la décharge d'un condensateur dans un circuit de faible résistance. Nous avons étudié ces courants au paragraphe 234 (3°) ; ce sont descourants pseudo-périodiques, dont les variations de l'intensité en fonction du temps sont représentées par des courbes analogues à celle de la figure 376.

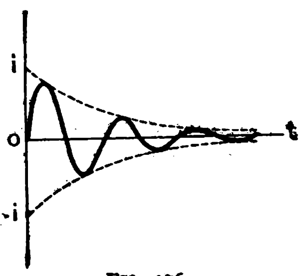


FIG. 376.

La figure 377 indique le schéma de l'un des dispositifs qu'on peut employer pour leur production : on charge le condensateur C, en le mettant en relation avec les deux bornes PQ du secondaire S d'une bobine d'induction, et on le décharge dans un circuit comprenant une self-induction L, formée de quelques spires de gros fil de cuivre ; le circuit de décharge est interrompu par un éclateur EE', formé de deux sphères métalliques placées à quelques millimètres l'une de l'autre. Lorsque le fonctionnement de la bobine a chargé le condensateur à une différence de potentiel suffisante, une étincelle jaillit entre les boules EE', et la décharge oscillante s'établit comme si l'on avait réuni ces deux boules par un conducteur de faible résistance ; le secondaire S de la bobine, qui se trouve en dérivation sur le circuit de décharge, n'y joue aucun rôle, car sa self-induction est trop grande pour qu'il puisse être parcouru par des courants de haute fréquence.

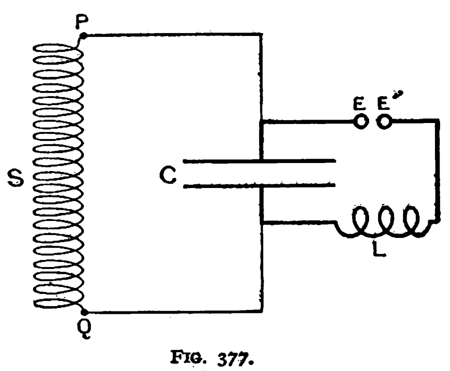


FIG. 377.

Il est facile d'obtenir avec ce dispositif des fréquences de l'ordre de 100.000 ; l'étincelle ayant toujours une certaine résistance, la valeur du décrément logarithmique ne peut guère descendre au-dessous de 1/10 : au bout d'une

centaine d'oscillations, c'est-à-dire après un temps de l'ordre du millième de seconde, l'intensité du courant est réduite à moins de un dix-millième de sa valeur primitive, et on peut considérer que la décharge est terminée. Si, par exemple, le fonctionnement de la bobine charge le condensateur 50 fois par seconde, on aura dans le circuit oscillant 50 trains d'oscillations amorties, durant chacun 1/1.000 de seconde, et séparés par des intervalles pendant lesquels les conducteurs ne sont parcourus par aucun courant ; la courbe représentant l'intensité en fonction du temps a la forme représentée schématiquement par la figure 378 : les étincelles jaillissent aux instants

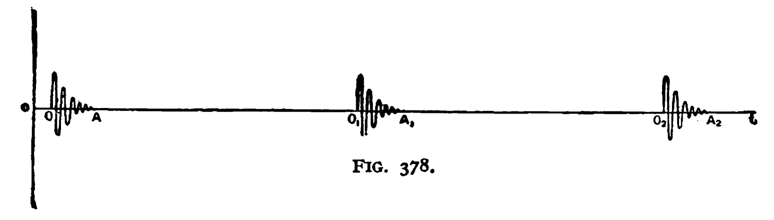


FIG. 378.

représentés par les points O, O_1, O_2, et donnent naissance chacune à un train d'oscillations OA, O_1A_1, O_2A_2, ...

Les courants ainsi obtenus dans le circuit de décharge, ainsi que ceux qu'ils peuvent fournir par induction dans d'autres circuits, soit directement, soit après propagation des ondes qu'ils créent (Télégraphie sans fil), *ne sont pas à proprement parler des courants alternatifs.* Leur intensité n'est pas une fonction périodique du temps, mais une fonction **pseudo-périodique,** et on doit, dans leur étude, tenir compte constamment de l'amortissement. Nous nous bornerons, le plus souvent, à l'étude des courants périodiques, et nous nous contenterons en général, en ce qui concerne les courants pseudo-périodiques, de l'approximation qu'on obtient en admettant qu'ils ont les mêmes propriétés que les courants alternatifs de même fréquence.

312. Vérification de la formule $T = 2\pi\sqrt{LC}$. — Lorsque l'amortissement n'est pas trop grand, on peut confondre la pseudo-période des oscillations amorties avec la période propre du circuit :

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

L'importance de cette formule a conduit de nombreux expérimentateurs à en entreprendre la vérification. On construit un condensateur calculable, et on détermine, par des mesures géométriques, la valeur c_s de sa capacité en u. é. s. ; on construit une bobine calculable, et on détermine également par des mesures géométries la valeur l_m de sa self-inductance en u. é. m. ; enfin on détermine en secondes le nombre t qui mesure la période.

Appliquons la formule en u. é. m. ; la capacité est mesurée en u. é. m. par le nombre $c_m = \frac{c_s}{C^2}$ (§ 279), et on a :

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l_m c_s}{C^2}}, \qquad \text{ou} \qquad C = \frac{2\pi\sqrt{l_m c_s}}{t}.$$

L'expérience peut être considérée comme une mesure du rapport des unités c : la vérification de la formule résultera de l'accord des nombres ainsi obtenus avec ceux que fournissent les autres méthodes.

On peut déterminer *t* en examinant l'étincelle au miroir tournant : son éclat est maximum en même temps que l'intensité du courant, et elle s'éteint quand le courant s'annule. On observe une série de taches lumineuses séparées, qu'on peut photographier, chaque période correspondant à deux taches. On mesure la vitesse de rotation du miroir, sa distance à la plaque et l'intervalle des taches, et on peut alors calculer la valeur de la période. Si le miroir peut tourner à 500 tours par seconde, et si l'on place la plaque photographique à 1 mètre du miroir, on peut mesurer des périodes de l'ordre de 10^{-7} seconde, correspondant chacune à une longueur de l'ordre du demi-millimètre sur la plaque.

La formule théorique a toujours été vérifiée d'une façon satisfaisante par les expériences : les valeurs trouvées pour le rapport **c** ont toujours été comprises entre 2,9 et $3{,}1 \cdot 10^{10}$ C. G. S., et les meilleures déterminations ont donné des valeurs qui ne diffèrent pas de plus de 1/100 de la valeur $3 \cdot 10^{10}$ donnée par les autres méthodes.

Il est difficile d'espérer une précision meilleure : le calcul des self-inductances présente toujours une certaine incertitude, due au fait que leur valeur dépend de la répartition des courants dans les conducteurs (§ 230); d'autre part, pour les très hautes fréquences, correspondant aux faibles capacités, la capacité des fils qui constituent la self peut n'être pas négligeable. Aussi considérerons-nous que la formule $T = 2\pi \sqrt{LC}$ est bien vérifiée par l'expérience : nous la prendrons comme formule fondamentale des oscillations électriques. Rappelons qu'on peut l'utiliser en unités pratiques (§ 277), aussi bien qu'en unités électrostatiques ou électromagnétiques.

313. Oscillations entretenues. — Les oscillations amorties sont actuellement remplacées, dans la plupart des applications, par des oscillations entretenues, qui sont de véritables courants alternatifs de haute fréquence ; c'est leur emploi qui a permis la plupart des progrès récents de la télégraphie sans fil, ainsi que la réalisation de la téléphonie sans fil.

Le premier procédé qui a permis leur obtention est celui de **l'arc chantant.** Le schéma du montage est donné par la figure 379 : on fait jaillir, entre deux charbons AB placés, autant que possible, dans une atmosphère d'hydrogène ou d'hydrocarbures, un arc entretenu par le courant continu d'une source S; l'intensité du courant continu est réglée par un rhéostat R, et le circuit qu'il parcourt contient une bobine L' possédant une self-induction assez grande pour s'opposer au passage du courant de haute fréquence. Les oscillations électriques se produisent dans un circuit constitué par l'arc, une self-induction faible L et un condensateur C : leur période est la période propre de ce circuit, $T = 2\pi \sqrt{LC}$. On réalise facilement l'expérience en prenant une source de f. é. m. égale à 200 volts, et réglant l'intensité du courant continu à 3 ampères ; on prend pour l'arc deux charbons homogènes, et on le place dans la flamme d'un bec Bunsen ; lorsque les charbons sont rapprochés, à une distance de l'ordre du millimètre, il s'établit dans le circuit oscillant des courants alternatifs dont l'intensité efficace, mesurée par l'ampèremètre

thermique G, peut atteindre plusieurs ampères. Si leur fréquence est une fréquence musicale, l'arc, parcouru par ces courants, fait entendre le son correspondant : d'où le nom d'arc chantant donné au dispositif ; en réduisant L et C, on peut réduire la période jusqu'à dépasser la limite des sons perceptibles, et on peut obtenir des fréquences de l'ordre de 100.000.

On peut comparer les oscillations électriques d'un circuit aux vibrations élastiques d'un diapason. On comparera les oscillations amorties aux vibrations qu'on obtient en excitant le diapason par un choc, et les trains d'oscillations amorties obtenues par le montage du paragraphe 311 aux séries de vibrations qu'on obtient en frappant le diapason avec un marteau à des intervalles réguliers, assez espacés pour qu'il ait le temps de revenir au repos entre deux séries de vibrations. Quant aux oscillations entretenues par l'arc chantant, on les comparera aux vibrations du diapason entretenues par le frottement d'un archet.

On sait d'ailleurs que ce n'est pas là le procédé d'entretien habituellement employé pour le diapason : le procédé usuel consiste à placer entre ses branches une bobine, dans laquelle on fait passer le courant d'une pile au moyen d'un contact commandé par le mouvement même du diapason. On emprunte au mouvement un peu d'énergie pour manœuvrer le contact ; mais le courant qu'il établit crée des forces d'attraction, qui restituent de l'énergie au diapason à chaque période, en quantité suffisante pour compenser à la fois celle que dissipe l'amortissement et celle qu'absorbe la manœuvre du contact. Comme elle est fournie à des instants fixés par le mouvement même du diapason, la fréquence des vibrations entretenues est très approximativement la fréquence propre du diapason oscillant librement.

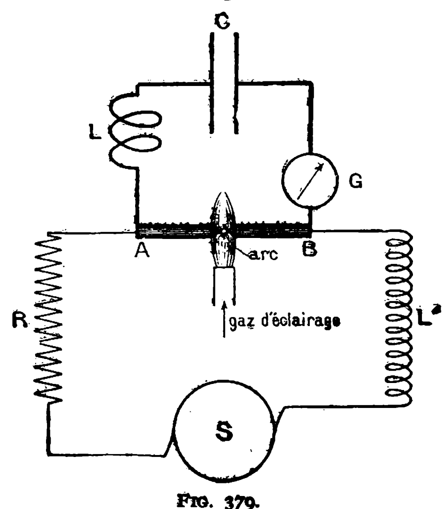


FIG. 379.

Les lampes à trois électrodes (§ 360) permettent de manœuvrer le courant d'une batterie d'accumulateurs en empruntant une énergie très faible au circuit qui commande cette manœuvre, et on peut les monter de façon à réaliser, au point de vue des énergies mises en jeu, le schéma même que nous venons de décrire à propos du diapason : les **oscillateurs à lampes** (§ 361) permettent de produire des courants alternatifs, dont la période est la période propre du circuit oscillant, $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Les fréquences obtenues vont depuis celles des sons les plus graves jusqu'à des fréquences de l'ordre de 10^{10} par seconde, et ces appareils constituent à l'heure actuelle les générateurs les plus parfaits et les plus pratiques pour la production des courants de haute fréquence, tant que les puissances à obtenir ne dépassent pas une centaine de kilowatts.

On peut d'ailleurs encore mieux comparer au diapason entretenu les **oscillateurs à quartz piézoélectrique,** dans lesquels les oscillations électriques sont

induites par les vibrations mécaniques d'une lame de quartz **convenablement** taillée, placée entre les armatures du condensateur du circuit oscillant. Les lampes à trois électrodes servent alors à la fois à amplifier les oscillations électriques et à restituer au quartz, par le jeu des forces électrostatiques qu'il subit, l'énergie nécessaire à l'entretien de ses vibrations. Comme dans le diapason entretenu, *la fréquence est très sensiblement la fréquence propre du vibrateur mécanique oscillant librement*; si les réactions des oscillations électriques sur les oscillations mécaniques ne sont pas trop fortes, elle est indépendante des caractéristiques du circuit oscillant (cf. § 321) : il y a là une différence essentielle avec l'arc chantant ou l'oscillateur à lampes sans quartz, dans lesquels *la période des oscillations est la période propre du circuit oscillant.*

Signalons enfin qu'on a pu construire des **alternateurs à haute fréquence** (§ 441), donnant des f. é. m. dont la fréquence atteint 20.000. Ici encore, la fréquence est indépendante des caractéristiques du circuit oscillant; elle ne dépend que de la vitesse de rotation de l'alternateur.

314. Courants induits par les courants de haute fréquence. — Au voisinage d'un circuit P parcouru par un courant de haute fréquence existe un champ magnétique alternatif de même fréquence : un second circuit S placé dans ce champ sera le siège d'une f. é. m. d'induction et sera parcouru par un courant induit de haute fréquence. Le montage ainsi réalisé, avec un *circuit primaire* P et un *circuit secondaire* S entièrement distincts et agissant par induction mutuelle l'un sur l'autre, est dit le **montage Tesla** (*fig.* 380).

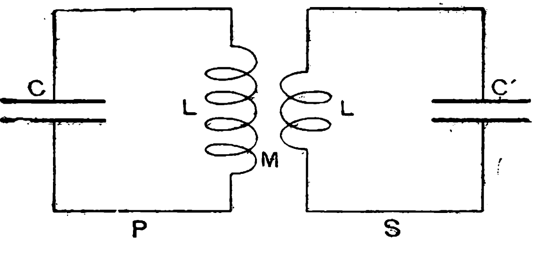


FIG. 380.

Si les self-inductances L et L' des deux circuits sont constituées par deux bobines enroulées sur la même carcasse, leur inductance mutuelle M est aussi élevée que possible, on dit qu'on a réalisé un **couplage serré.** Si elles sont constituées par deux bobines distinctes, l'inductance mutuelle diminue à mesure qu'on les éloigne l'une de l'autre : lorsque sa valeur est devenue très faible, on dit qu'on a réalisé un **couplage lâche.**

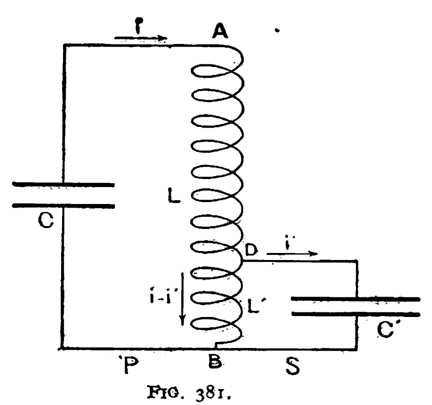


FIG. 381.

On réalise quelquefois l'accouplement de deux circuits par le **montage Oudin,** représenté par la figure 381 : la self L' du circuit S est constituée par quelques-unes des spires de la self L du circuit P, et le couplage est d'autant plus serré que la self commune aux deux circuits forme une partie plus importante de la self L. On écrira facilement les équations

différentielles qui relient entre elles les intensités i et i' des courants dans les deux circuits ; on doit tenir compte, dans le calcul des f. é. m. d'induction qui existent dans les conducteurs AD et DB, parcourus par les courants i et $i - i'$, à la fois de leur self-induction et de leur induction mutuelle.

Enfin, l'accouplement peut être réalisé par **influence électrostatique**, suivant, par exemple, le schéma représenté par la figure 382. Les deux points AA', réunis au sol, sont constamment au potentiel 0 ; le courant de haute fréquence qui parcourt le circuit P se dérive en partie, par le condensateur γ, dans le circuit S, et y entretient des oscillations. Si la capacité γ est faible, le courant ainsi dérivé est petit par rapport au courant primaire, et le couplage est lâche ; si la capacité γ est grande, le couplage est serré.

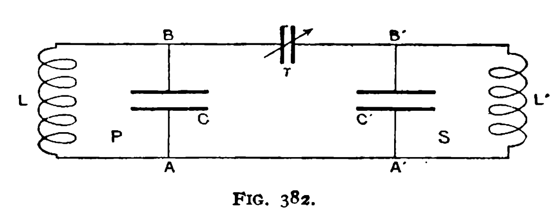


FIG. 382.

L'accouplement par induction mutuelle se prête particulièrement à l'obtention de différences de potentiel très élevées : c'est dans ce but qu'il a été employé pour la première fois par Tesla. Il produisait, à l'aide d'une étincelle EE' (*fig.* 383), des oscillations amorties dans un circuit dont la self, formée de quelques spires de gros fil de cuivre, constituait le primaire P d'un transformateur ; le circuit secondaire S, formé d'un grand nombre de spires de fil fin, entourait les spires primaires, et le tout était placé dans une cuve remplie d'huile isolante.

Avec le dispositif de Tesla, on obtient, entre les extrémités AB du circuit secondaire, des différences de potentiel qui peuvent dépasser 100.000 volts et même atteindre 1 million de volts. L'espace qui les sépare est le siège d'un champ électrique intense ; des aigrettes jaillissent de tous les fils, on peut tirer des étincelles d'un conducteur quelconque approché du circuit, un tube à gaz raréfié, sans électrodes, placé entre deux plateaux communiquant avec A et B, s'illumine par l'effet des courants qu'y produit le champ électrique alternatif. Il est assez remarquable que les oscillations amorties, à haute fréquence et à différence de potentiel élevée, ainsi obtenues, n'exercent aucune action fâcheuse sur l'organisme. On peut impunément prendre dans les mains les bornes A et B, tandis que des différences de potentiel du même ordre de grandeur en basse fréquence seraient foudroyantes : il semble que les nerfs sensitifs et moteurs ne sont plus excitables quand la fréquence des oscillations électriques dépasse 30.000, de même que les nerfs auditifs ne sont plus excités quand la fréquence des oscillations sonores dépasse 40.000.

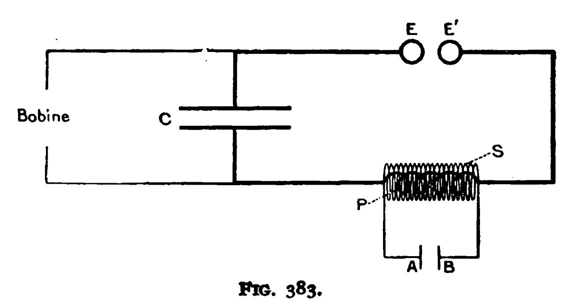


FIG. 383.

315. Périodes propres des circuits couplés. — Étant donnés deux circuits C et C′ couplés, la production d'un courant alternatif i dans le circuit primaire C provoque le passage d'un courant alternatif i' dans le circuit secondaire C′ ; le courant secondaire réagit sur le circuit primaire, et modifie ses propriétés. Nous avons déjà signalé ce phénomène (§ 305), et nous aurons l'occasion d'y revenir, en ce qui concerne les courants de basse fréquence, dans l'étude des transformateurs industriels. Son étude est particulièrement importante dans le cas des courants de haute fréquence, dont la fréquence est le plus souvent déterminée par les caractéristiques du circuit où ils se produisent . *la présence du circuit secondaire peut avoir pour effet de modifier, non seulement l'intensité et la phase, mais encore la période du courant primaire.*

Considérons deux circuits distincts, C et C′, couplés par induction mutuelle, et supposons qu'un courant alternatif soit produit dans le circuit C par un arc chantant ou un oscillateur à lampes ; le courant secondaire i' réagit sur le circuit primaire C en y créant une f. é. m. d'induction $-M di'/dt$, qui devient négligeable lorsque l'inductance mutuelle M des deux circuits est assez faible. *Si le couplage est lâche, les oscillations entretenues dans le circuit* C *ne sont pas modifiées par la présence du circuit secondaire; elles ont pour période la période propre* T *du circuit primaire. Les courants qu'elles produisent par induction dans le circuit secondaire* C′ *ont pour période* T, *que ce circuit contienne un condensateur ou non ; leur intensité efficace est maximum* (§ 297) *quand le circuit* C′ *est lui-même un circuit oscillant, de période propre* T′ *égale à* T, *c'est-à-dire en résonance sur le circuit primaire.*

Mais, si le couplage est serré, la période du courant primaire est modifiée : les oscillations qui prennent naissance dans deux circuits oscillants couplés ont des périodes différentes de leurs périodes propres T et *T′*. Lorsque les amortissements des deux circuits sont négligeables, on démontre (*Cours de Mécanique*, § 309) qu'il y a superposition dans chacun d'eux de deux courants sinusoïdaux de périodes différentes T_1 et T_2 : *même lorsque les deux circuits sont en résonance* (T = T′), *les deux périodes* T_1 *et* T_2 *sont différentes ; toutes deux diffèrent d'autant plus de la période commune T que le couplage est plus serré.*

316. Résonance de deux circuits couplés. — Supposons maintenant qu'on produise le courant dans le circuit primaire C en y plaçant un alternateur : les deux circuits sont parcourus par des courants alternatifs, dont la période T_0 est celle de la f. é. m. fournie par l'alternateur, et qu'on peut considérer comme des oscillations forcées. Lorsqu'on fait varier T_0 en maintenant constante la f. é. m. de l'alternateur, l'intensité dans le circuit secondaire passe par deux maxima, en général inégaux, pour $T_0 = T_1$ et $T_0 = T_2$; ces deux périodes de résonance sont toujours différentes lorsque le couplage est serré.

Lorsque le couplage devient très lâche, et que M tend vers 0, on peut négliger la réaction du circuit secondaire sur le circuit primaire ; le calcul montre que les deux périodes T_1 et T_2 tendent alors vers les deux périodes T et T′ des deux circuits, et il est facile de se rendre compte qu'on obtient effectivement des maxima de l'intensité secondaire lorsque la période de l'alternateur passe par les deux valeurs T et T′. Lorsque T_0 passe par la valeur T, le circuit primaire C est en résonance sur l'alternateur, et l'intensité efficace du courant alternatif i qui le parcourt passe par un maximum ; la valeur efficace de la f. é. m. $-M\, di/dt$ induite dans le circuit secondaire C′ passe aussi par un

maximum, et il en est de même de l'intensité efficace du courant secondaire qu'elle produit. Lorsque T_0 passe par la valeur T′, les variations de l'intensité du courant i et de la f. é. m. — $M\,di\,/\,dt$ ne présentent aucune particularité ; mais le circuit secondaire, de période T′, est en résonance sur la f. é. m. — $M\,di\,/\,dt$ de période T_0, et l'intensité efficace du courant secondaire passe par un maximum.

Lorsque le couplage est lâche et que les deux circuits sont en résonance, on a $T_1 = T_2 = T = T'$; quand T_0 varie, on obtient, pour la valeur $T_0 = T = T'$, un maximum unique, beaucoup plus accentué que dans tous les autres cas, puisqu'en s'écartant de cette valeur, on réduit à la fois l'intensité du courant primaire et l'intensité du courant secondaire produit par un courant primaire donné.

En résumé, *si le couplage des deux circuits est serré, on doit les considérer comme un ensemble, qu'on doit mettre en résonance sur l'alternateur ; au voisinage de l'une des périodes de résonance, l'acuité de la résonance est comparable à celle que donnerait un seul circuit. Si le couplage est lâche, on doit mettre séparément chacun des deux circuits en résonance sur l'alternateur, et la résonance peut être beaucoup plus aiguë que celle que donnerait un seul circuit.*

317. Oscillations amorties dans les circuits couplés. — Si l'on étudie les oscillations libres de deux circuits couplés, en tenant compte de l'amortissement des deux circuits, on trouve (*Cours de Mécanique*, §§ 313 à 316) que les courants qui se superposent sont des courants pseudopériodiques, dont les périodes et les décréments sont en général différents ; si les amortissements ne sont pas trop forts, les pseudopériodes diffèrent peu des périodes T_1 et T_2 qui correspondent à des amortissements nuls.

Dans le cas du couplage lâche, les périodes T_1 *et* T_2 *sont les périodes propres* T *et* T′ *des deux circuits, et les décréments sont leurs décréments caractéristiques* δ *et* δ'. Si le circuit secondaire C′ est plus amorti que le circuit primaire C, ($\delta' > \delta$), ses oscillations propres, de période T′, s'amortissent beaucoup plus vite que les oscillations forcées, de période T, qui y sont produites par le courant primaire, et au bout d'un certain temps, ces oscillations forcées subsistent seules. C'est ce qui se produit lorsqu'un circuit à oscillations entretenues agit, par un couplage lâche, sur un autre circuit, qui possède nécessairement un amortissement : le problème est alors le même que le problème des oscillations forcées étudié au paragraphe 302, et nous avons donné au paragraphe 315 le résultat essentiel de sa discussion.

Si, au contraire, le circuit primaire C est plus amorti que le circuit secondaire C′, ce sont les oscillations de période T′ qui subsistent seules au bout d'un certain temps. C'est ce qui se produit lorsqu'on fait agir, sur un circuit C′ de résistance faible, un circuit C où l'on crée, par une étincelle, des oscillations amorties. Les oscillations primaires amorties produisent dans le secondaire des courants induits, qui sont, au début, les courants résultant de la superposition des deux courants pseudo-périodiques de périodes T et T′. Au bout d'un temps très court, l'étincelle primaire s'éteint, et le circuit C, qui n'est plus parcouru par aucun courant, n'exerce plus aucune action ; le circuit secondaire, qui a emmagasiné pendant ce temps une certaine énergie, continue à osciller seul, avec sa période propre T′. C'est ce qu'on appelle **l'excitation par choc** : *le secondaire, lancé par les oscillations primaires comme*

un pendule est lancé par un choc, continue à osciller avec sa période propre.

En réalité, il y a tout de même eu dans le primaire plusieurs oscillations ; il est avantageux, pour obtenir une grande amplitude dans le circuit C′, que leurs impulsions s'ajoutent, comme il est avantageux, si l'on donne plusieurs chocs au pendule, de les donner à la même phase de son mouvement : *on mettra les deux circuits en résonance, en donnant au circuit* C *la même période qu'au circuit* C′. On remarquera d'ailleurs que la *résonance du circuit* C′ *sur les oscillations amorties du circuit* C *ne peut pas être aiguë ;* l'existence d'une résonance aiguë suppose (§ 303) que le temps d'établissement du régime des oscillations forcées est long par rapport à leur période, et il ne peut en être ainsi si la cause qui les produit disparaît rapidement.

L'excitation par choc peut également être employée avec un couplage serré, car, lorsque l'étincelle primaire est éteinte, le circuit C ne joue plus aucun rôle : le secondaire oscille avec sa période propre. Les quelques oscillations du circuit C fournissent alors davantage d'énergie au circuit C′.

II. — *MESURES EN HAUTE FRÉQUENCE*

318. Détection et amplification. — Avant d'étudier les procédés qui permettent de mesurer l'intensité d'un courant alternatif de haute fréquence, nous étudierons ceux qui permettent de déceler son existence dans un circuit quand son intensité est faible. En basse fréquence, le procédé le plus commode est d'intercaler un téléphone dans le circuit ; il n'est plus applicable en haute fréquence, car les courants dont la période propre est très faible par rapport à celle de la membrane du téléphone sont sans action sur elle. Les seuls appareils qui soient directement sensibles au passage d'un courant de haute fréquence sont les appareils thermiques, mais leur sensibilité est très inférieure à celle du téléphone ou des appareils à courant continu : *il est avantageux, pour déceler leur existence, de transformer les courants alternatifs de haute fréquence en courants continus ou en courants de fréquence musicale.*

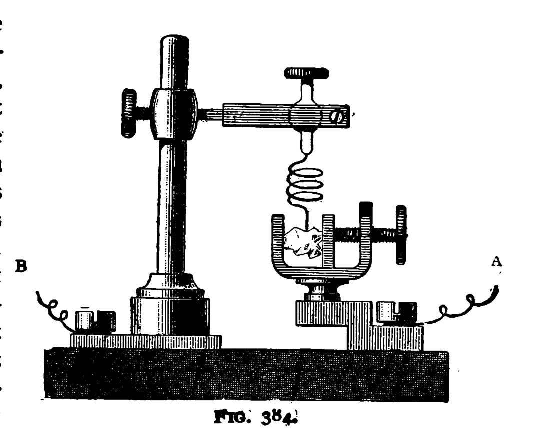


FIG. 384.

La transformation du courant alternatif en un courant redressé, conservant toujours le même sens, s'effectue à l'aide d'appareils appelés **détecteurs.** Citons, parmi les plus employés, les *détecteurs à cristaux,* constitués par une pointe métallique s'appuyant sur un cristal (*fig.* 384), qui est presque toujours un cristal de galène (sulfure de plomb naturel). Lorsqu'on a choisi convenablement sur le cristal le point de contact et bien réglé la pression qu'y exerce la pointe, le détecteur ne laisse pratiquement plus passer le courant

que dans un seul sens : si on établit entre ses bornes A et B une différence de potentiel alternative, le courant ne passe que pendant la moitié de la période correspondant à ce sens.

FIG. 385.

On construit la caractéristique du détecteur en établissant entre ses bornes des différences de potentiel $V_A - V_B$ continues, et en mesurant, pour chaque valeur de $V_A - V_B$, l'intensité i du courant qui le traverse. La caractéristique d'un détecteur à galène (*fig.* 385) se compose de deux droites, se raccordant très sensiblement à l'origine : on peut dire que, lorsque la pointe est négative, le détecteur se comporte comme une résistance faible (de l'ordre de 1.500 ohms) et que, lorsqu'elle est positive, il se comporte comme une résistance forte (de l'ordre de 15.000 ohms).

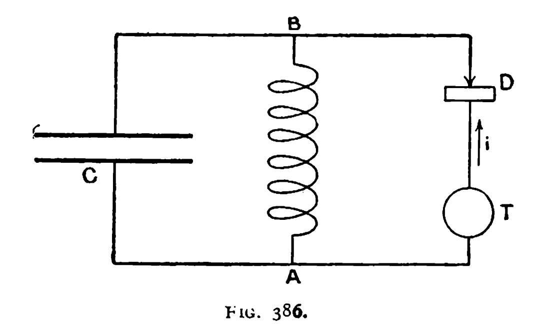


FIG. 386.

Pour rechercher si un circuit est parcouru par un courant alternatif, on place en dérivation, entre deux points A et B de ce circuit (*fig.* 386), le détecteur D et le galvanomètre T. La différence de potentiel $V_A - V_B$ est représentée par une courbe sinusoïdale (*fig.* 387) ; le courant i qui traverse le détecteur et le galvanomètre est représenté par une courbe périodique dissymétrique, ayant la forme indiquée par la figure 387, et son intensité moyenne i_0 n'est pas nulle. Le galvanomètre T, dont la période est toujours très grande par rapport à celle du courant, prend une déviation permanente, correspondant à la valeur i_0 de l'intensité ; la sensibilité du montage est maximum si l'on choisit, pour la résistance intérieure du galvanomètre, une valeur du même ordre que la résistance du détecteur, c'est-à-dire de l'ordre de 1.500 ohms (cf. §§ 251 et 253).

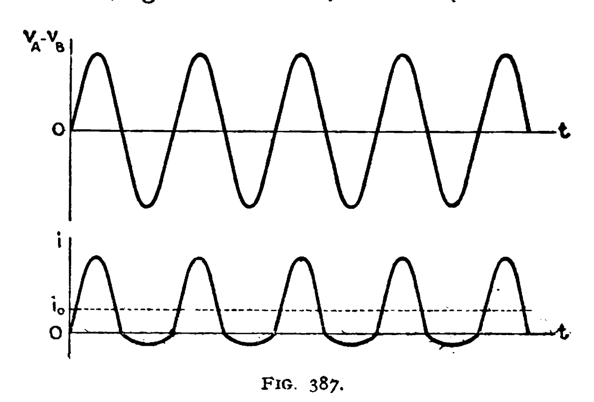


FIG. 387.

La sensibilité de ces montages a pu être beaucoup augmentée par l'emploi des lampes à trois électrodes (voir chap. XXXIII), dont nous avons déjà signalé l'emploi comme oscillateurs au paragraphe 313. Elles permettent, à l'aide d'un courant

très faible emprunté au circuit à étudier, de manœuvrer un courant plus intense fourni par une batterie d'accumulateurs, et de lui faire subir des variations périodiques, dont la période est la même que celle du courant primitif et dont l'intensité est plus grande. Suivant les montages employés, les courants périodiques obtenus peuvent être des courants alternatifs, à intensité moyenne nulle, ou des courants redressés : *la lampe peut fonctionner comme* **amplificateur** *ou comme* **détecteur.** On peut réaliser plusieurs amplifications successives par l'emploi d'une série de lampes, et redresser le courant final par une dernière lampe : on arrive, à partir de courants alternatifs de haute fréquence de l'ordre de 10^{-12} ampère, à obtenir des courants redressés de l'ordre de plusieurs milliampères, susceptibles d'agir sur un ampèremètre de modèle courant, ou sur un galvanomètre enregistreur à courte période, ou même sur un récepteur Morse ou un relai télégraphique.

319. Emploi du téléphone. — Lorsque, dans le montage représenté par la figure 386, on remplace le galvanomètre T par un téléphone, les bobines du téléphone sont parcourues par le courant périodique de haute fréquence redressé, représenté par la courbe de la figure 387 : la membrane subit un déplacement permanent, correspondant au passage d'un courant continu d'intensité i_0, et le téléphone ne rend aucun son. *Pour obtenir un son, il faut faire subir à l'intensité i_0 des variations périodiques de fréquence musicale.*

Le procédé qui nécessite le montage le moins compliqué consiste à supprimer périodiquement le courant i_0, en coupant le circuit du téléphone au moyen d'un contact établi par une lame vibrante, à vibrations entretenues électriquement, qu'on appelle un **ticker.** La hauteur du son perçu dans le téléphone est celle des vibrations de la lame, son intensité dépend uniquement de l'intensité i_0 du courant fourni par le détecteur. Le principal inconvénient de l'emploi du ticker est que l'énergie qu'on pourrait recueillir pendant les interruptions est perdue.

Actuellement, on emploie plutôt le montage **hétérodyne :** dans le circuit où l'on veut déceler le passage d'un courant alternatif de fréquence ν, on produit, par un oscillateur à lampes, un autre courant alternatif de fréquence ν'. Si les deux fréquences ν et ν' sont peu différentes, la superposition des deux courants donne naissance à des battements électriques, et on a par seconde $n = \nu - \nu'$ battements. Le courant i_0 obtenu après détection présente par seconde n maxima et n minima ; l'attraction qu'il exerce sur la membrane du téléphone varie périodiquement, avec la fréquence n, et le téléphone rend le son correspondant ; si, par exemple, on a $\nu = 100.000$ et $\nu' = 99.000$, on entendra dans le téléphone le son de hauteur 1.000. Les courbes de la figure 388 donnent une idée du phénomène : les deux courbes I représentent les deux courants de fréquence ν et ν', la courbe II le courant résultant de leur superposition, la courbe III le courant redressé donné par le détecteur, et la courbe IV le courant à basse fréquence équivalent, au point de vue de l'action sur le téléphone, au courant redressé. Ces courbes ne sont que des schémas : la différence relative des deux fréquences ν et ν' a en réalité une valeur beaucoup plus petite que la valeur de 1/10 à laquelle elles correspondent, car la fréquence $\nu - \nu'$ doit être une fréquence musicale, très petite vis-à-vis des hautes fréquences ν et ν'.

Grâce à la grande sensibilité du téléphone, ce procédé peut être extrême-

ment sensible, surtout si l'on amplifie, soit le courant haute fréquence à déceler, soit le courant basse fréquence obtenu après détection, et si la membrane du téléphone est en résonance sur la fréquence n. Il a l'avantage de fournir au téléphone un son musical très pur, facile à distinguer même au milieu de

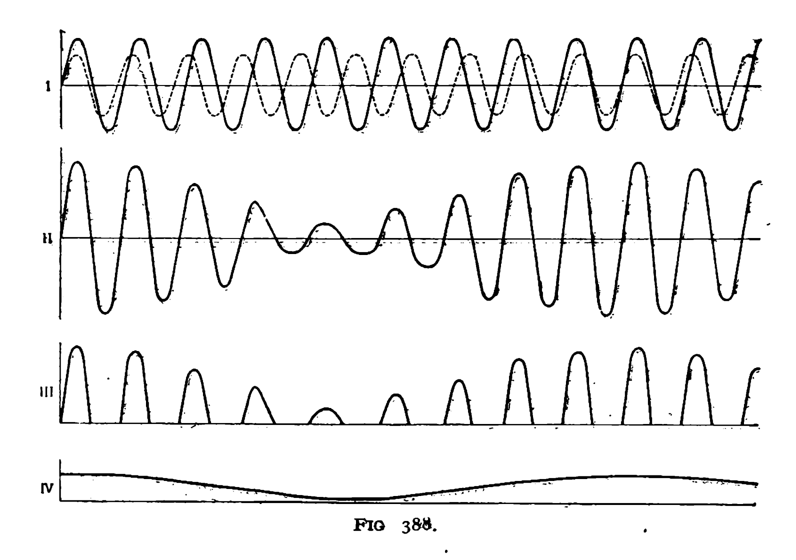


FIG 388.

bruits parasites, et ne comportant pas les crachements que produit toujours l'étincelle de rupture du ticker. Il permet de rechercher successivement dans le même circuit les courants de fréquences différentes qui peuvent y coexister : il suffit de faire varier la fréquence ν' de l'oscillateur auxiliaire, en modifiant

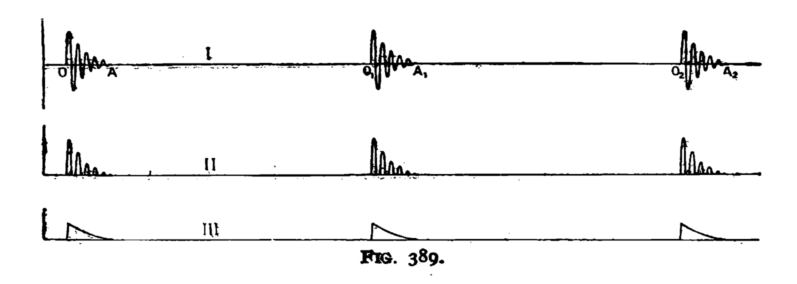


FIG. 389.

par exemple la capacité de son circuit oscillant, de manière à amener successivement chacun de ces courants à donner un son de hauteur n observable. Si, par exemple, on a dans le circuit des courants de fréquence $\nu_1 = 100.000$ et $\nu_2 = 105.000$, et si l'on choisit $\nu' = 99.000$, le courant de fréquence ν_1 donne un son, facilement observable, de hauteur $n_1 = \nu_1 - \nu' = 1.000$, le courant de fréquence ν_2 donne un sifflement, de hauteur $n_2 = \nu_2 - \nu' = 6.000$, qui n'est pas perceptible au téléphone ; si ensuite on donne à ν' la valeur 106.000, c'est le courant de fréquence ν_2 qui donne le son observable

de hauteur 1.000, et le courant de fréquence ν_1 qui donne le sifflement de hauteur 6.000.

Signalons enfin que, si le courant de haute fréquence à déceler est constitué par les trains d'oscillations amorties de la figure 378 (§ 311), on peut, après détection, l'observer au téléphone, sans employer aucun dispositif auxiliaire. Le courant redressé se trouve naturellement établi et interrompu à chaque train d'oscillations, et le téléphone rend un son dont la hauteur correspond à la fréquence des trains d'oscillations. La figure 389 représente dans ce cas le courant de haute fréquence (courbe I), le courant redressé (courbe II) et le courant périodique de basse fréquence équivalent à ce dernier au point de vue de l'action sur le téléphone (courbe III). S'il y a, par exemple, 20 trains d'ondes par seconde, on entend un ronflement dans le téléphone ; s'il y en a 500, on entend un son musical facile à percevoir.

320. Mesure des intensités et des différences de potentiel. — Les différents procédés qui permettent de déceler l'existence d'un courant de haute fréquence dans un circuit permettent également de mesurer, plus ou moins grossièrement, son intensité.

L'emploi du téléphone ne permet guère que de classer les courants en courants intenses et en courants faibles, suivant que le son perçu est intense ou faible ; il permet aussi de reconnaître dans quel sens varie l'intensité du courant, lorsqu'on fait varier l'un des facteurs dont elle dépend, par exemple quand on modifie l'une des caractéristiques du circuit qu'il parcourt. C'est le procédé qu'on emploie généralement pour réaliser le réglage de ce circuit : on fait varier d'une façon continue la grandeur réglable, qui est souvent la capacité d'un condensateur variable (*fig.* 102, § 85) intercalé dans le circuit, et on choisit la valeur qui donne au téléphone le son le plus intense.

La mesure galvanométrique du courant redressé par un détecteur (*fig.* 386) fournit une mesure, en valeur relative, de la valeur efficace de la différence de potentiel alternative $V_A - V_B$ qui existe entre les bornes du circuit dérivé formé par le détecteur et le galvanomètre, et par suite de l'intensité efficace du courant qui parcourt le circuit principal. Ce procédé exige que le détecteur reste toujours identique à lui-même, ce qui n'est certainement pas le cas pour les détecteurs à cristaux : il semble qu'on obtienne de meilleurs résultats avec les redresseurs à oxyde de cuivre, dans lesquels l'élément rectifiant est constitué par une rondelle de cuivre rouge oxydée superficiellement, de sorte que le redressement a lieu dans la masse de l'élément, au contact intime de l'oxyde avec le cuivre. Ces redresseurs présentent une grande capacité, de sorte que leur impédance varie notablement avec la fréquence et que leurs indications dépendent de la fréquence et de la forme du courant ; on sait d'ailleurs compenser ces variations pour des courants de basse fréquence ou de fréquence musicale, mais il ne semble pas qu'on ait jusqu'ici utilisé ces appareils pour des fréquences supérieures à 20.000.

En haute fréquence, on ne peut guère employer que la détection par une lampe. On peut même placer entre les points A et B un circuit dérivé n'empruntant au circuit principal qu'un très faible courant, amplifier ce courant par une série de lampes amplificatrices, le redresser par une lampe détectrice, et mesurer le courant redressé par un milliampèremètre ordinaire : les indications du milliampèremètre sont proportionnelles à la différence de potentiel

efficace $V_A - V_B$. L'appareil ainsi réalisé est appelé **voltmètre amplificateur** (Abraham et Bloch) ; sa sensibilité est pratiquement indépendante de la fréquence ; il permet de mesurer, en valeur relative, des différences de potentiel de l'ordre du millivolt, en empruntant au circuit où elles sont produites une énergie de l'ordre de 10^{-11} watt.

En dehors des **électromètres** et des **voltmètres électrostatiques** (§ 72), les seuls appareils qui permettent les mesures sans étalonnage spécial en haute fréquence sont les **appareils thermiques.** L'échauffement d'un conducteur suffisamment fin ne dépend que de l'intensité efficace du courant qui le parcourt, et est indépendant de sa fréquence; si le conducteur est dépourvu de self-induction, le rapport de l'intensité efficace du courant à la différence de potentiel efficace aux bornes ne dépend pas non plus de la fréquence : les indications des ampèremètres et voltmètres thermiques, étalonnés en courant continu, restent valables en haute fréquence.

On obtient une grande sensibilité avec les appareils à résistance de chauffage fixe et couple thermoélectrique si l'on mesure le courant thermoélectrique par un galvanomètre sensible : les **thermogalvanomètres** peuvent donner, avec une période d'oscillation de 10 secondes, une déviation appréciable lorsqu'on y dépense une puissance de l'ordre de 10^{-8} watt.

On obtient une sensibilité du même ordre en mesurant l'échauffement du conducteur par la mesure de sa résistance au pont de Wheatstone : c'est le procédé du **bolomètre** (§ 139). On augmente encore la sensibilité en plaçant dans le vide le fil chauffé par le courant de haute fréquence, de façon qu'il ne soit pas refroidi par les courants de convection; si le galvanomètre du pont a une période de 10 secondes, on arrive à obtenir une déviation appréciable lorsque le fil bolométrique reçoit une puissance de 10^{-8} watt. On remarquera qu'on reste encore très loin de la sensibilité des appareils à courant continu : pour la même période de 10 secondes, un galvanomètre peut donner une déviation mesurable lorsque le courant continu lui apporte une puissance de 10^{-19} ou même 10^{-20} watt ($r = 4.10^4$ ohms, $i = 0,5.10^{-12}$ ampère, cf. §§ 251 et 254). On est également loin de la sensibilité d'un téléphone, qui donne un son perceptible lorsqu'un courant de basse fréquence lui apporte, pendant une fraction de seconde, une puissance de l'ordre de 10^{-13} watt ($r = 1000$ ohms, $i = 10^{-8}$ ampère).

321 Mesure des fréquences. — On détermine en général la période des courants alternatifs de haute fréquence en utilisant les phénomènes de résonance. L'appareil employé s'appelle un **ondemètre** ou **contrôleur d'ondes :** la partie essentielle en est un circuit oscillant à période propre variable, constitué par une bobine de self-induction L et un condensateur variable C (*fig.* 390), dans lequel on crée des oscillations forcées, de même fréquence que le courant i à étudier, en approchant de la self L une bobine B parcourue par ce courant, et en ayant soin que le couplage reste très lâche. On fait varier la capacité C jusqu'à ce que le courant créé soit aussi intense que possible; le circuit du contrôleur d'ondes est alors en résonance sur le courant i, et la période du courant est égale à la période propre de ce circuit, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ Le condensateur variable est en général du modèle représenté par la figure 102 (§ 85); on gradue la division devant laquelle se déplace l'index qui mesure les rotations de l'armature mobile de façon qu'elle donne directement la

période du courant de haute fréquence, ou plutôt la longueur d'onde, $\lambda = cT$ des ondes hertziennes correspondantes (§ 326).

Pour suivre les variations de l'intensité du courant dans le circuit du contrôleur d'ondes, on peut y intercaler un ampèremètre thermique, ou simplement une lampe à incandescence dont on cherche à rendre l'éclat maximum. Dans les appareils de précision, il est nécessaire, pour avoir une résonance aiguë, de ne pas intercaler de résistance dans le circuit où l'on étudie les oscillations forcées; il est également nécessaire, pour ne pas altérer les périodes, d'employer un couplage très lâche, et par suite d'utiliser un dispositif de mesure sensible. On peut, par exemple, utiliser le dispositif représenté par la figure 390 *a* : le courant qui parcourt le circuit étalonné crée, par induction de la bobine A sur la bobine E, un courant de même période dans un circuit récepteur sans condensateur, et on suit dans un téléphone T les variations de ce dernier courant, redressé par le détecteur D et interrompu avec une fréquence musicale par un ticker V; la mesure consiste à rendre le son du téléphone aussi intense que possible. On peut même, pour réduire encore le couplage nécessaire, fermer le circuit de la bobine E sur un amplificateur. et suivre l'intensité du son de battements que donne le montage hétérodyne.

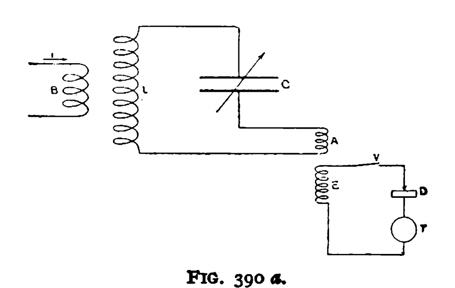


FIG. 390 *a*.

Les contrôleurs d'ondes peuvent servir à mesurer la fréquence des oscillations amorties aussi bien que celle des oscillations entretenues; mais ce n'est qu'avec ces dernières qu'on peut réaliser des résonances aiguës (§ 317). On arrive à choisir la valeur de la capacité qui donne la résonance avec une erreur relative de l'ordre du millième.

On peut améliorer la précision, et atteindre à peu près le 1/10.000, en modifiant la méthode de résonance de façon à en faire une méthode de zéro. La self L et le condensateur C forment l'une des branches d'un pont de Wheatstone (*fig.* 390 *b*), dont les autres branches sont constituées par des résistances sans self-induction ni capacité; le courant i à étudier induit un courant de même fréquence dans la diagonale A du pont, et on fait varier la capacité C et l'une des résistances jusqu'à ce qu'il ne passe plus aucun courant dans l'appareil de mesure G (galvanomètre avec détecteur), placé dans l'autre diagonale. Les potentiels en P et Q sont alors constamment égaux; puisque MP et MQ sont des résistances pures, les courants dans les deux parties de circuit MPN et MQN ont même phase : ce résultat ne peut être atteint que si le conducteur PN se comporte comme une résistance pure, c'est-à-dire si l'on a $LC\omega^2 = 1$ (§ 296), si la période est $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

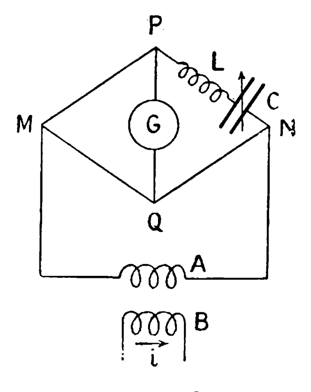


FIG. 390 *b*.

La comparaison des fréquences ν et ν' de deux courants i et i' peut être réalisée avec une précision encore plus grande lorsque ces fréquences sont

voisines, en superposant dans un même circuit, comprenant un détecteur et un téléphone, des courants induits par les deux courants i et i' : on perçoit dans le téléphone un son de hauteur $n = \pm (\nu - \nu')$. On détermine le signe de $\nu - \nu'$ en cherchant dans quel sens varie la hauteur du son lorsqu'on modifie la fréquence ν' : s'il devient plus aigu, c'est-à-dire si la différence $\nu - \nu'$ augmente en valeur absolue, quand on diminue ν', c'est que ν est supérieur à ν'. On mesure exactement la valeur de n en amenant le son du téléphone à l'unisson du son d'un diapason étalon, dont la hauteur est n_0. Si la fréquence ν vient alors à varier, le son du téléphone, $n = \nu - \nu'$, donne des battements acoustiques avec le son n_0 du diapason; on peut très bien percevoir ces battements lorsqu'ils se produisent à raison de 1 par 10 secondes, c'est-à-dire lorsque la différence $n - n_0$ est égale à 0,1. *On peut donc constater et mesurer, lorsque les fréquences de comparaison ν' et n_0 restent fixes, une variation de la fréquence ν de l'ordre de* 0,1, *c'est-à-dire, si* $\nu = 100.000$, *une variation relative de l'ordre du millionième.* Ces mesures sont parmi les plus précises de la physique moderne, et ne peuvent guère se comparer qu'aux mesures interférentielles de l'Optique. La même méthode permet d'ailleurs de comparer à la fréquence ν' une fréquence ν voisine d'un de ses multiples entiers $p\nu'$ à condition que le courant i' soit assez riche en harmoniques pour qu'on puisse observer les battements de l'harmonique p avec le courant i.

Signalons en passant que cette méthode permet de vérifier, avec la même précision, l'égalité de deux capacités : il suffit de les substituer l'une à l'autre dans un circuit où un oscillateur à lampes crée des oscillations entretenues, et de vérifier l'égalité des fréquences obtenues.

Les méthodes de mesure que nous venons de décrire sont des méthodes de mesures relatives, car il est impossible de calculer la période d'un circuit, d'après ses données géométriques, avec une précision égale à celle avec laquelle on peut comparer entre elles les périodes de deux circuits. *Les contrôleurs d'ondes et les oscillateurs étalons de fréquence doivent être étalonnés expérimentalement; la période des étalons principaux doit être comparée directement à celle du pendule d'une horloge astronomique.*

La réalisation des étalons de fréquence et la mesure absolue de leurs périodes sont rendues possibles par la propriété que possèdent les oscillateurs à lampes que, si l'on couple par induction, avec un couplage même lâche, les circuits oscillants de deux oscillateurs de fréquences propres très voisines, il se synchronisent par l'effet de leurs réactions mutuelles, et donnent des oscillations ayant exactement même période. Si le premier oscillateur est construit de façon à donner une vibration riche en harmoniques, la synchronisation peut également s'effectuer sur la période d'un des harmoniques : le second oscillateur produira, par exemple, un courant dont la fréquence sera exactement quinze fois plus grande que celle du courant produit par le premier.

L'étalon de fréquence peut être un diapason qu'on compare au pendule par les procédés d'enregistrement habituels; le premier oscillateur à lampes a pour circuit oscillant le circuit d'entretien du diapason; si l'on a par exemple quatre autres oscillateurs, accrochés chacun sur le quinzième harmonique du précédent, le dernier a une fréquence exactement égale à $15^4 = 50.625$ fois celle du diapason étalon. Avec un diapason de fréquence 1000, on réalise ainsi un oscillateur étalon de fréquence 50.625.000 : en faisant successivement l'accrochage sur divers harmoniques, on réalise une gamme de fréquences étalons,

Toutes ces fréquences sont connues avec la même précision que celle du diapason, puisque leurs rapports à cette dernière sont toujours exactement des nombres entiers et qu'un de ces rapports est le produit de quatre nombres entiers inférieurs à 15, faciles à compter sans erreurs.

Les étalons les plus précis semblent aujourd'hui être ceux dont le *maître oscillateur* est un oscillateur à quartz piézoélectrique. Un quartz de fréquence 160.000 peut par exemple être le quatrième oscillateur d'une série d'oscillateurs accrochés par l'harmonique 10 : le premier donnera un courant alternatif de fréquence 160, facile à comparer à une horloge astronomique. On peut même actionner par ce courant un moteur synchrone qui, par un train d'engrenages démultiplicateur convenable, commande le mouvement d'un rouage ordinaire d'horloge; on réalise ainsi une véritable pendule, dont le régulateur est constitué par le quartz piézoélectrique, et les périodes des différents étages de démultiplication, du quartz à l'aiguille des heures, peuvent être déterminées avec une précision de l'ordre du millionième, qui ne paraît limitée que par la précision des observations astronomiques.

322. Mesure de l'amortissement d'un circuit. — D'après les formules que nous avons établies pour la décharge d'un condensateur (§ 234), le décrément logarithmique, $\delta = \lambda T$, qui caractérise l'amortissement des oscillations, est égal à $rT/2L$. En réalité, cette formule n'a à peu près aucune signification : *l'amortissement dépend de toute l'énergie perdue à chaque oscillation*, non seulement par effet Joule, mais aussi par les autres phénomènes qui se produisent : hystérésis du diélectrique du condensateur ou de celui qui constitue l'isolant de la bobine, courants induits dans les pièces métalliques qui avoisinent le circuit oscillant, par exemple dans les pylônes qui supportent une antenne de T. S. F., effluves qui partent des conducteurs portés à un potentiel élevé, énergie rayonnée par le circuit sous forme d'ondes hertziennes (voir § 327). Les deux derniers phénomènes, qui ont une importance assez grande dans les circuits d'émission de télégraphie sans fil, sont à peu près inexistants dans les circuits de réception ou dans les circuits de mesure tels que ceux des contrôleurs d'onde; lorsqu'on veut obtenir dans ces derniers circuits une résonance aiguë, c'est-à-dire un amortissement faible, on doit y réduire autant que possible l'importance des deux premiers phénomènes, en constituant leurs capacités par des condensateurs à lame d'air, et en évitant d'en approcher des conducteurs métalliques de surface notable.

Quant à l'énergie perdue par effet Joule, il est en général impossible d'en calculer la valeur à partir de la valeur, mesurée en courant continu, de la résistance des conducteurs que parcourt le courant de haute fréquence. Le passage d'un courant alternatif dans un conducteur crée, dans la masse de ce conducteur, un champ magnétique alternatif, et par conséquent des f. é. m. d'induction, analogues à celles qui produisent les courants de Foucault; leur effet est, d'après la loi de Lenz, de s'opposer au passage du courant, si bien qu'en fait, *le courant ne passe que dans une couche très mince à la surface du conducteur* (*effet de coque*, ou *effet pelliculaire*) : l'énergie dissipée par effet Joule est plus grande que celle qui correspond au passage d'un courant continu de même intensité, également réparti dans toute la section du conducteur. C'est ainsi que, si l'on calcule, pour un fil de cuivre, la profondeur x à laquelle la densité du courant est réduite au millième de la valeur corres-

pondant à la surface, on trouve, pour un courant téléphonique de fréquence 1.000, $x = 14$ millimètres et, pour un courant de fréquence 100.000, $x = 1^{mm},4$.

Si ce phénomène n'a pas d'importance pour des fils très fins, tels que le fil dilatable d'un ampèremètre thermique, il peut devenir gênant pour les conducteurs de grande section, tels que ceux qui transportent les courants intenses qu'on utilise dans les circuits d'émission de télégraphie sans fil; il devient encore plus gênant quand ces conducteurs sont enroulés de façon à constituer une bobine de self-induction, car chaque fil est soumis au champ magnétique créé par les autres spires. On emploie comme conducteurs des lames minces, ou de gros tubes creux; pour les bobines à plusieurs couches, on emploie un artifice analogue à celui qu'on utilise pour réduire les courants de Foucault dans le fer des appareils industriels, et on réduit l'énergie dissipée par effet Joule dans les selfs en les construisant avec du fil divisé, formé d'un faisceau de fils fins isolés les uns des autres.

Quoique la formule $\delta = \frac{rT}{2L}$ n'ait pas de signification théorique, on peut l'employer pour définir, à partir de la valeur du décrément logarithmique δ déterminée expérimentalement, une résistance r, qui sera la **résistance d'amortissement** du circuit : c'est la valeur qu'il faudrait donner à la résistance pour produire, par l'effet Joule seul, l'amortissement que produit en réalité l'ensemble des diverses pertes d'énergie.

La mesure du décrément logarithmique δ ou de la résistance d'amortissement r d'un circuit résulte de la mesure de l'acuité de la résonance dans ce circuit : on y produit un courant induit par l'action d'un courant alternatif de haute fréquence donné par un oscillateur à lampes; on mesure l'intensité de ce courant induit en valeur relative par un ampèremètre thermique ou un voltmètre amplificateur, et on trace la courbe de résonance, soit en faisant varier la capacité du circuit à étudier (§ 297), soit en faisant varier la période de l'oscillateur (§ 303). Si l'on constate, par exemple, qu'on obtient la résonance pour la valeur C de la capacité, avec la pulsation $\omega = 2\pi\nu$, et que, pour une capacité $C + \Delta C$, l'intensité du courant est $\sqrt{2}$ fois plus faible qu'à la résonance, on a (§ 297) :

$$\frac{\Delta C}{C} = C\omega r, \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{\Delta C}{2\pi\nu C^2}.$$

La mesure de la résistance en haute fréquence peut également être faite par le pont à résonance décrit au paragraphe précédent (*fig.* 390 *b*). Lorsque ce pont est équilibré, la branche PN se comporte comme une résistance pure, et sa résistance pour la fréquence employée est liée à celle des trois autres branches par la formule usuelle du pont de Wheatstone, $r_4/r_3 = r_2/r_1$ (§ 142).

CHAPITRE XXXI

PROPAGATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

I. — *THÉORIE DE MAXWELL*

323. Relations de Maxwell. — Le courant alternatif qui parcourt un circuit oscillant produit au voisinage de ce circuit un champ magnétique alternatif; les différences de potentiel alternatives qui existent entre ses points produisent dans tout l'espace qui l'environne un champ électrique alternatif. Nous avons d'ailleurs déjà vu (§ 227) que ces deux phénomènes — champ magnétique variable et champ électrique variable — sont inséparables l'un de l'autre; la production de l'un d'entre eux dans une région de l'espace y entraîne nécessairement la production de l'autre.

Désignons par $\vec{H}$ et $\vec{B}$ les vecteurs champ et induction magnétiques, $\vec{E}$ et $\vec{i}$ les vecteurs champ et courant électrique. Il existe, entre ces quatre vecteurs, deux relations indépendantes de la nature du milieu : la **relation de Maxwell-Ampère** (§ 187), qui exprime la loi fondamentale de la création des champs magnétiques par les courants, et la **relation de Maxwell-Faraday** (§ 227), qui exprime la loi fondamentale de l'induction. Si les quatre grandeurs H, B, *i* et E des quatre vecteurs sont exprimées dans un système d'unités défini par ses unités mécaniques et par les valeurs ε_0 et μ_0 des coefficients des lois de Coulomb, ces relations s'écrivent (§§ 189 et 245 *bis*):

$$\frac{4\pi\vec{i}}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \text{rot}\,\vec{H}, \qquad \frac{1}{c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\text{rot}\,\vec{E}.$$

A ces deux premières relations, indépendantes de la nature du milieu, on peut en ajouter deux autres, qui dépendent de ses propriétés. Nous nous bornerons au cas où le milieu est un diélectrique parfait, de pouvoir inducteur spécifique ε; les courants s'y réduisent aux courants de déplacement (§ 207) et les vecteurs courant électrique et champ électrique y sont liés par la relation :

$$\vec{i} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Quant aux vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{B}$, ils sont liés par la relation $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ (§ 190); la valeur de la perméabilité μ étant toujours extrêmement voisine de 1, nous la confondrons avc l'unité, et nous prendrons comme quatrième relation :

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}.$$

Pour développer les calculs, il est commode de choisir un **système d'unités symétrique,** c'est-à-dire de choisir pour les deux coefficients ε_0 et μ_0 des valeurs égales. Posons donc $\varepsilon_0 = \mu_0$; portons les valeurs de $\vec{i}$ et $\vec{B}$ données par les deux dernières équations dans les deux relations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday; nous obtenons les *équations fondamentales du champ électromagnétique variable dans un diélectrique :*

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \text{rot}\,\vec{H}\cdot \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\,\text{rot}\,\vec{E}.$$

Les théoriciens emploient souvent un système symétrique d'unités, dites unités rationnelles ou unités d'Heaviside, défini en prenant $\varepsilon_0 = \mu_0 = 4\pi$; ils choisissent même parfois les unités de longueur et de temps de façon que la constante **c**, qui ne dépend (§ 132) que de ces unités, soit égale à 1. On obtient ainsi des formules ne contenant plus que très peu de coefficients numériques; mais on est toujours obligé de revenir aux systèmes usuels lorsqu'on veut mesurer expérimentalement les différentes grandeurs. Aussi conserverons-nous les unités mécaniques usuelles, qui seront en principe les unités C. G. S. ($c = 3.10^{10}$), et *nous définirons notre système symétrique d'unités par la condition* $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Comme les unités électriques sont définies entièrement, à partir des unités mécaniques, par la valeur choisie pour le coefficient ε_0, tandis que les unités magnétiques sont définies entièrement par la valeur de μ_0, *les unités que nous adoptons ainsi sont identiques, pour le champ électrique* E *et le courant électrique i aux unités électrostatiques, et pour le champ magnétique* H *et l'induction magnétique B aux unités électromagnétiques.* Avec ce choix d'unités, les équations de Maxwell prennent la forme :

$$\frac{4\pi\vec{i}}{c} = \text{rot}\,\vec{H}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\,\text{rot}\,\vec{E}, \qquad \vec{i} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{H},$$

les relations entre les champs étant, comme dans tous les systèmes symétriques :

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \text{rot}\,\vec{H}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\,\text{rot}\,\vec{E}.$$

324. Équation de propagation du champ électromagnétique. — Prenons la dérivée partielle par rapport à t des deux membres de la première équation ; remarquons qu'on a $\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\vec{H}) = \text{rot}\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, puisqu'on peut toujours intervertir l'ordre des dérivations partielles par rapport aux différentes variables x, y, z, t; enfin, remplaçons $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ par sa valeur $-\,c\,\text{rot}\,\vec{E}$, tirée de la seconde équation. On obtient :

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\,c\,\text{rot rot}\,\vec{E}.$$

Or on a identiquement (§ 189) :

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta\vec{E} + \overrightarrow{\text{grad}} \, (\text{div } \vec{E}).$$

Le vecteur $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, égal au rotationnel du vecteur $\frac{c}{\varepsilon} \vec{H}$, a une divergence nulle, et on a $\frac{\partial}{\partial t}$ (div $\vec{E}$) = o. Le champ électrique peut résulter de la superposition d'un champ électrostatique constant et d'un champ variable ; si nous nous limitons à l'étude de ce dernier, l'équation $\frac{\partial}{\partial t}$ (div $\vec{E}$) = o entraîne la relation div $\vec{E}$ = o. L'équation qui donne $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ se réduit, en posant :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}},$$

à :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \vec{E}.$$

Cette équation est l'*équation de propagation du champ électrique variable ;* sous la forme symbolique où nous l'avons écrite, elle représente trois équations aux dérivées partielles, auxquelles doivent satisfaire les trois fonctions des quatre variables x, y, z, t qui donnent les valeurs des trois composantes du vecteur $\vec{E}$:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= v^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= v^2 \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= v^2 \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right). \end{aligned}\right.$$

325. Propagation d'une onde plane. — Nous nous bornerons à l'étude de la propagation d'une onde plane polarisée rectilignement ; nous supposerons qu'à tout instant, en un point quelconque, le champ électrique $\vec{E}$ est parallèle à un vecteur donné $\vec{A}$, et qu'en un point quelconque sa variation est une variation sinusoïdale, de période $T = 2\pi / \omega$ et d'amplitude A. On aura :

$$\vec{E} = \vec{A} \cos(\omega t - \varphi),$$

A et ω étant des constantes, et φ n'étant fonction que des cordonnées x, y, z.

Choisissons comme plan des xOy un plan parallèle aux plans d'onde. Par définition, un plan d'onde est un plan tel qu'en tous ses points le champ électrique sinusoïdal ait même phase ; la quantité φ est la même en tous les points d'un plan quelconque parallèle à xOy, et par conséquent ne dépend que de la variable z. Nous écrirons :

$$\vec{E} = \vec{A} \cos[\omega t - \varphi(z)].$$

Si l'on porte cette valeur de la fonction $\vec{E}$ dans l'équation de propagation, on trouve que, pour que cette équation soit satisfaite quelle que soit la valeur de t, on doit avoir $\varphi(z) = \pm \frac{\omega z}{v}$; le double signe correspond à la possibilité d'avoir la propagation des ondes dans l'un et l'autre sens de l'axe des z.

Prenons $\varphi(z) = \frac{\omega z}{v}$, c'est-à-dire :

$$\vec{E} = \vec{A} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{A}\omega^2 \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right), \qquad \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\frac{\vec{A}\omega^2}{v^2} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right).$$

Le champ électrique, $\vec{A} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$, qui existe à l'instant t en un point d'un plan situé à une distance z du plan xOy, a même valeur que le champ $\vec{A} \cos \omega t'$ qui existait à l'instant $t' = t - \frac{z}{v}$ en un point du plan xOy ; les variations du champ électrique mettent pour aller de l'un à l'autre de ces plans d'onde, un temps $t - t' = \frac{z}{v}$: *elles se propagent avec une vitesse v dans le sens positif de l'axe Oz.*

Nous avons montré, au paragraphe précédent, que la quantité div $\vec{E}$ était nulle ; comme $\vec{E}$ n'est fonction que de z, cette quantité se réduit ici à $\frac{\partial E_z}{\partial z} = A_z \frac{\omega}{v} \sin \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$; pour qu'elle soit nulle, quel que soit t, on doit avoir $A_z = 0$, donc $E_z = 0$. *Le vecteur champ électrique est situé dans le plan d'onde*, ce qu'on exprime en disant *qu'il se propage par des ondes transversales.*

Choisissons l'axe Ox, dans le plan de cordonnées xOy, de façon que sa direction soit celle du champ électrique $\vec{E}$. Les composantes de ce champ sont alors :

$$E_x = A \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right), \qquad E_y = 0, \qquad E_z = 0.$$

Le champ magnétique est donné par l'équation $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}$; on a :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -c\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = 0, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -c\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -c\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\frac{c}{v} A\omega \sin \omega \left(t - \frac{z}{v}\right),$$

d'où, puisque $\vec{H}$ est une fonction périodique :

$$H_x = 0, \qquad H_y = A\sqrt{\varepsilon} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right), \qquad H_z = 0.$$

Le champ magnétique se propage avec la même vitesse v *que le champ électrique ; il est aussi situé dans le plan d'onde et y est perpendiculaire au champ électrique ; en un point quelconque, le champ électrique et le champ magnétique sont en phase.*

Si le milieu dans lequel se propagent les ondes est le vide ($\varepsilon = 1$), *la vitesse de propagation* v *est égale au rapport* c *des unités électromagnétique et électrostatique de quantité d'électricité, c'est-à-dire à* 300.000 *kilomètres par seconde. Si le milieu est un diélectrique, la vitesse* v *est égale à la vitesse de propagation dans le vide, divisée par la racine carrée du pouvoir inducteur spécifique.* En particulier, la vitesse de propagation dans l'air est un peu inférieure à la vitesse de propagation dans le vide, et en diffère d'environ 3 dix-millièmes.

326. Représentation géométrique. Longueur d'onde. — Figurons, en chaque point M de l'axe Oz, les vecteurs champ électrique et champ magnétique

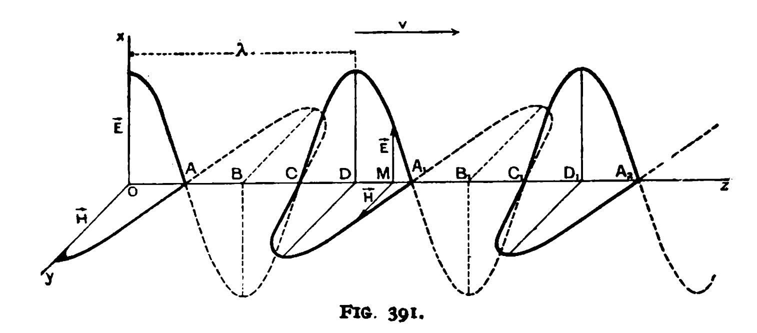


FIG. 391.

tique à l'instant $t = 0$ (*fig.* 391) ; les lieux des extrémités de ces vecteurs, qui se réduisent à leurs composantes $E_x = A \cos \frac{\omega z}{v}$ et $H_y = A\sqrt{\varepsilon} \cos \frac{\omega z}{v}$, sont deux sinusoïdes des plans zOx et yOz, qui coupent l'axe des z aux mêmes points et dont les ordonnées sont maxima en même temps.

Pour construire la figure, il importe de remarquer que la forme des équations de Maxwell est essentiellement liée à la convention que nous avons faite sur le sens du trièdre $Oxyz$; le résultat trouvé tout à l'heure, que les deux champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ ont même phase, peut se traduire géométriquement par l'énoncé suivant : *en un point* M *quelconque, et à un instant* t *quelconque, le champ électrique* $\vec{E}$, *le champ magnétique* $\vec{H}$ *et la direction de propagation* $\vec{Oz}$ *forment un trièdre de même sens que le trièdre fondamental d'Ampère ;* l'onde se propage vers la gauche d'un observateur placé suivant le champ électrique et regardant dans la direction du champ magnétique.

Supposons qu'on veuille tracer les courbes de la figure 391, non plus à l'instant 0, mais à l'instant t : en un point M′, à une distance z' de l'origine, il faut porter en ordonnées des quantités proportionnelles à $\cos \frac{\omega (z' - vt)}{v}$. Ce sont les mêmes ordonnées que celles qui correspondaient à l'instant 0 au

point M, et qui étaient proportionnelles à $\cos \frac{\omega z}{v}$, si l'on a $z' - vt = z$, ou $\overrightarrow{MM'} = z' - z = vt$; il suffira de déplacer les deux sinusoïdes, dans la direction $\overrightarrow{Oz}$, d'une longueur vt : c'est la représentation géométrique du fait que les ondes se propagent avec une vitesse v dans le sens $\overrightarrow{Oz}$, et parcourent une longueur vt dans le temps t.

A un instant quelconque, les deux vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$ ont la même valeur en deux points M et M_1 tels que les quantités correspondantes $\frac{\omega z}{v}$ et $\frac{\omega z_1}{v}$ diffèrent de 2π. La longueur $z_1 - z$, qui est la période dans l'espace des sinusoïdes que nous venons de tracer, s'appelle la **longueur d'onde** de l'onde électromagnétique. On a :

$$z_1 - z = 2\pi \frac{v}{\omega} = vT.$$

La longueur d'onde est la plus petite distance de deux plans d'onde dans lesquels les champs électriques et magnétiques ont même phase. La longueur d'onde λ *dans le vide d'une onde électromagnétique de période donnée est égale au produit de la période* T *par le rapport des unités* **c**. *La longueur d'onde* λ' *dans un diélectrique est plus petite que la longueur d'onde* λ *dans le vide ; elle est égale à cette longueur* λ *divisée par la racine carrée du pouvoir inducteur spécifique* ε *du diélectrique :*

$$\lambda = cT\,; \qquad \lambda' = vT = cT \cdot \frac{v}{c} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Lorsqu'on définit la période d'une oscillation électrique en se donnant sa longueur d'onde, il s'agit toujours, par définition, de sa longueur d'onde dans le vide. La longueur d'onde, réellement observable, dans l'air n'en diffère que d'une quantité de l'ordre de trois dix-millièmes, qui est négligeable dans la plupart des expériences.

Les calculs que nous venons de faire s'appliquent uniquement à des ondes planes indéfinies. Si l'on a une source de très petites dimensions, et un champ électromagnétique rayonnant dans toutes les directions à partir de cette source, les ondes obtenues sont des *ondes sphériques*, qui correspondent à une autre solution de l'équation de propagation $\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \overrightarrow{E}$. Au voisinage de la source, les deux champs ne sont pas en phase, et la vitesse de propagation de la phase n'est pas égale à v. Ce n'est qu'à une distance de la source grande par rapport à la longueur d'onde $\lambda = vT$, c'est-à-dire quand le rayon de courbure de la surface d'onde est devenu grand par rapport à la longueur d'onde, qu'on peut admettre que les ondes sphériques jouissent des mêmes propriétés que les ondes planes : les deux champs en un point M forment, avec le rayon $\overrightarrow{OM}$ qui joint la source à ce point, un trièdre trirectangle dont le sens est défini par la règle d'Ampère ; ils ont même phase, le rapport de leurs intensités est $\sqrt{\varepsilon}$, et ils se propagent dans la direction $\overrightarrow{OM}$

avec la vitesse v. D'autre part, l'amplitude diminue à mesure qu'on s'écarte de la source, et que l'onde s'étale sur une sphère de surface plus grande ; lorsqu'on est loin de la source, on peut admettre que l'amplitude diminue en raison inverse de la distance à la source (cf. § 327).

327. Énergie transportée par l'onde électromagnétique. — Reprenons le cas des ondes planes : un élément de volume dv, situé au point M, où les champs électrique et magnétique sont $E_x = A \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$ et $H_y = A\sqrt{\varepsilon} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$, contient, à l'instant t, une énergie dU qui est la somme de l'énergie électrostatique et de l'énergie électromagnétique (§ 64 et § 244) localisées dans cet élément ; on a, avec les unités choisies ($\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$) :

$$dU = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 dv + \frac{1}{8\pi} H^2 dv = \left[\frac{\varepsilon}{8\pi} A^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) + \frac{1}{8\pi} A^2 \varepsilon \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)\right] dv = \frac{\varepsilon}{4\pi} A^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) . dv.$$

A l'instant t', l'élément de volume dv situé au point M contiendra une quantité différente d'énergie, et pourra même n'en plus contenir du tout ; mais un élément de volume égal, situé au point M′ tel qu'on ait $MM' = v\,(t' - t)$, contiendra précisément la quantité d'énergie dU que contenait l'élément dv à l'instant t. Il est naturel, pour satisfaire au principe de la conservation de l'énergie, de dire que l'énergie dU a été transportée de M en M′ : *les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie électromagnétique, qui se propage normalement au plan d'onde, avec une vitesse* v.

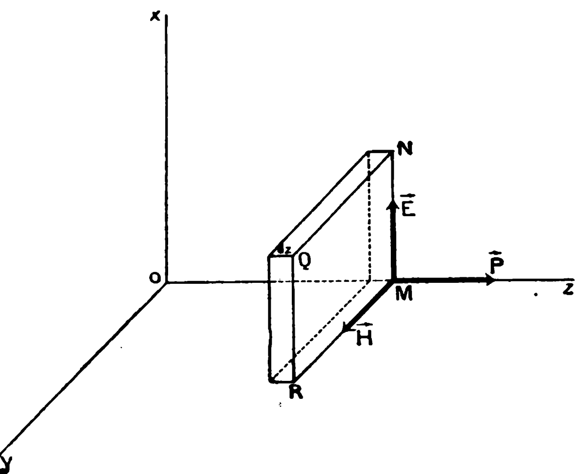


FIG. 392.

Si nous considérons un élément de surface $MNQR = dS$ du plan d'onde passant par M, la quantité d'énergie dU qui le traverse entre les instants t et $t + dt$ est celle qui est localisée, à l'instant t, dans un élément de volume (*fig.* 392) de base dS, de hauteur $dz = v\,dt$, et de volume $dv = v\,dS\,dt$:

$$dU = \frac{\varepsilon}{4\pi} A^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) \cdot v\,dS\,dt = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon}\, A^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) dS\,dt = \frac{c}{4\pi} \cdot E_x H_y . dS . dt.$$

L'énergie qui traverse la surface dS pendant une seconde s'obtiendra, puisque la période T est très petite par rapport à la seconde, en remplaçant $\cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$ par sa valeur moyenne $\frac{1}{2}$; elle est égale à $\frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon}\ A^2 dS$. *Dans un milieu donné*, elle est proportionnelle au carré de la quantité A : c'est ce qu'on exprime en disant que l'*intensité du rayonnement est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration.*

De même qu'on peut représenter, dans l'écoulement d'un fluide, la quantité de fluide qui traverse une surface pendant un certain temps par le flux, à travers cette surface et pendant ce temps, du vecteur vitesse, de même ici on peut représenter la quantité d'énergie dU qui traverse la surface dS pendant le temps dt par le flux, à travers cette surface et pendant ce temps, d'un vecteur $\vec{P}$ (*fig.* 392) défini par l'équation qui donne dU : il est dirigé suivant la direction $\vec{Oz}$ de propagation, c'est-à-dire perpendiculairement au plan défini par les deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, et forme avec eux un trièdre $\vec{E}, \vec{H}, \vec{P}$ direct ; sa grandeur $\frac{c}{4\pi} E_x H_y$ est égale au produit par $\frac{c}{4\pi}$ de l'aire du rectangle de côtés E_x et H_y. On peut résumer cette définition en écrivant :

$$\vec{P} = \frac{c}{4\pi} \cdot \vec{E} \wedge \vec{H}.$$

Le vecteur $\vec{P}$ est dit le **vecteur radiant**, ou **vecteur de Poynting.** La relation symbolique qui le définit est générale : *dans un champ électromagnétique variable quelconque, la diminution pendant un temps dt de la quantité d'énergie localisée dans un volume* V *quelconque est toujours égale au flux, pendant ce même temps, du vecteur* $\vec{P} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \wedge \vec{H}$ *à travers la surface* Σ *qui le limite.* De même que, dans l'écoulement d'un fluide, les lignes de vitesses représentent les trajectoires des particules liquides, de même ici on peut considérer les courbes tangentes en chaque point au vecteur $\vec{P}$ comme les trajectoires de l'énergie : ce sont les **rayons** électromagnétiques — ou les rayons lumineux — ; dans un milieu isotrope ils sont normaux en chaque point à la surface d'onde dont le plan tangent est défini par les deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

Dans le cas des ondes sphériques, ces rayons sont les rayons des sphères qui constituent les surfaces d'onde ; l'énergie qui était comprise à l'instant t entre les sphères de rayons r et $r + a$ est comprise à l'instant t' entre les sphères de rayons r' et $r' + a$, définis par la relation $r' - r = v\,(t' - t)$. Les volumes qu'elle occupe aux instants t et t' sont proportionnels aux carrés des rayons r et r' ; les énergies moyennes localisées dans chaque unité de volume du champ électromagnétique périodique sont inversement proportionnelles aux carrés de leurs distances à la source, et il en est de même de celles qui traversent l'unité de surface de chaque surface d'onde : l'intensité du rayonnement est inversement proportionnelle au carré de la distance à la source, et l'amplitude est inversement proportionnelle à cette distance.

II. — *EXPÉRIENCES DE HERTZ*

328. Oscillateur de Hertz. — Les oscillations électriques que nous avons étudiées jusqu'ici étaient produites dans un circuit fermé, constitué en réunissant par un fil conducteur les deux armatures d'un condensateur (*fig.* 393). Leur rayonnement électromagnétique est toujours faible, car deux éléments opposés du circuit, tels que MN et M'N', parcourus à l'instant *t* par le même courant d'intensité *i* (cf. § 335), produisent, en un point P un peu éloigné, des champs magnétiques opposés qui s'annulent presque complètement. De même, le champ électrique est très faible en dehors de l'espace limité par les armatures du condensateur : la plus grande partie de l'énergie électrostatique reste localisée dans cet espace presque fermé, comme la plus grande partie de l'énergie électromagnétique reste localisée au voisinage immédiat du circuit oscillant.

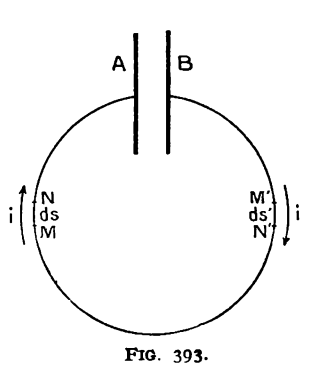


FIG. 393.

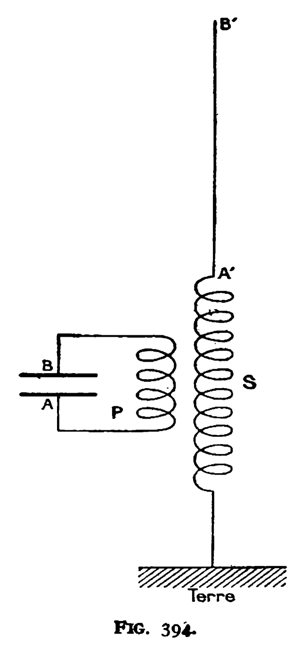


FIG. 394.

Pour obtenir un rayonnement plus intense, on fait passer, par induction mutuelle, l'énergie du circuit oscillant fermé P dans un **oscillateur ouvert,** constitué, par exemple, par un conducteur linéaire A'B' réuni au sol à l'une de ses extrémités et isolé à l'autre (*fig.* 394). C'est alors le courant alternatif de haute fréquence induit dans l'**antenne** A'B' qui produit le champ électromagnétique rayonnant observable à de très grandes distances. Nous reviendrons plus tard (§§ 333 et 452) sur ce dispositif, qui est celui de la télégraphie sans fil, et nous nous bornerons à décrire ici l'*oscillateur de Hertz,* au moyen duquel Hertz a obtenu pour la première fois, en 1888, les **ondes hertziennes.**

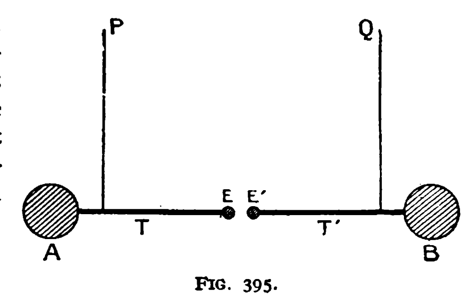


FIG. 395.

Dans l'oscillateur de Hertz, les armatures AB du condensateur sont réduites à deux boules métalliques (*fig.* 395), et le circuit de décharge est réduit à deux tiges conductrices TT' terminées par deux petites boules EE', entre lesquelles jaillit l'étincelle oscillante. L'appareil est chargé à la manière ordinaire en réunissant les boules aux deux bornes PQ d'une bobine d'induction (cf.

§ 311). L'oscillateur possède la même symétrie qu'un système de deux charges électriques, égales et de signes contraires, placées en deux points A et B (*fig.* 396), et réunies par un élément de courant AB; en un point M, situé dans le plan perpendiculaire à AB en son milieu O, le champ électrique $\vec{E}$ est parallèle à AB, et le champ magnétique $\vec{H}$ est perpendiculaire au plan MAB; *si la distance* OM *est grande par rapport à la longueur d'onde*, les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ forment une onde électromagnétique dont les propriétés peuvent être confondues avec celles d'une onde plane.

FIG. 396.

La décharge oscillante qui traverse l'oscillateur est amortie : les ondes obtenues sont des **ondes amorties.** Les sinusoïdes qui représentent les champs à un instant donné aux différents points de l'espace, comme celles qui représentent les variations du champ avec le temps en un point donné, doivent être remplacées par des courbes analogues à celles de la figure 376 (§ 311); à chaque étincelle correspond, dans l'oscillateur, un train d'oscillations (*fig.* 378), et, dans l'espace, un train d'ondes.

Le dispositif représenté schématiquement par la figure 394 permet au contraire d'obtenir des **ondes entretenues** si les oscillations du circuit primaire P sont des oscillations entretenues : les oscillateurs à lampes permettent d'obtenir couramment des fréquences de l'ordre de 10^8 par seconde, et, par suite, des ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre du mètre; on a pu, avec des montages spéciaux, abaisser la longueur d'onde jusqu'à un centimètre ; les longueurs d'onde plus courtes n'ont pu être obtenues qu'en ondes amorties. Dans l'oscillateur de Hertz, la capacité C, réduite à celle des boules, et la self L, réduite à celle d'un courant rectiligne, sont très faibles; leurs mesures c_s (en u. é. s.) et l_m (en u. é. m.) sont de l'ordre de grandeur des dimensions de l'appareil, et il en est de même de la longueur d'onde $\lambda = cT = 2\pi\sqrt{l_m c_s}$ (cf. § 333). Il suffit donc, pour produire des ondes très courtes, de réduire les dimensions des boules : en provoquant la formation d'étincelles entre des grains de limaille de cuivre ou d'aluminium en suspension dans l'huile minérale, on a pu obtenir des ondes hertziennes de longueurs d'onde extrêmement courtes, descendant jusqu'à 30 microns (cf. § 336).

FIG. 397.

329. Résonateurs. — La recherche, dans l'espace, du champ électromagnétique qui s'y propage s'effectue au moyen de résonateurs, c'est-à-dire de circuits dans lesquels il produit des courants oscillants. Le *résonateur de Hertz* (*fig.* 397) se compose d'un cerceau en gros fil de cuivre interrompu par une coupure étroite BP de longueur réglable, ménagée entre une boule B et la

pointe P d'une vis V : le passage d'un courant oscillant dans le résonateur se manifeste par des étincelles qui éclatent à la coupure.

Le *résonateur de Blondlot* est formé d'un petit condensateur plan C et d'un circuit Γ de forme géométrique simple, par exemple rectangulaire (*fig.* 398) de période propre $T' = 2\pi\sqrt{LC}$, approximativement calculable d'après ses dimensions. Son amortissement est très faible, et son emploi est particulièrement intéressant pour l'étude des ondes entretenues : il est alors possible de régler sa période, en réglant la distance des plateaux du condensateur, de façon à avoir une très bonne résonance avec la période propre des ondes, et d'obtenir, dans son circuit, des courants suffisamment intenses pour faire briller une lampe qu'on y intercale ; on peut également étudier ces courants par l'un quelconque des procédés indiqués au chapitre précédent.

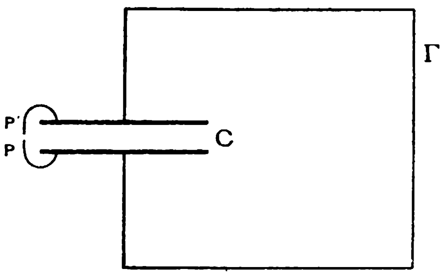


FIG. 398.

Supposons qu'une onde électromagnétique se propage suivant la direction Oz, le champ électrique $\vec{E}$ étant parallèle à Ox, et le champ magnétique $\vec{H}$ parallèle à Oy : c'est l'onde qu'on obtient en plaçant l'excitateur de Hertz AB suivant l'axe Ox (*fig.* 399). Si l'on place le résonateur dans la position I, avec le circuit Γ dans le plan xOz, et les plateaux du condensateur dans des plans parallèles à xOy, le champ électrique, parallèle aux plateaux, n'exerce sur eux aucune influence; mais le circuit Γ, traversé par le champ alternatif $\vec{H}$, est le siège d'une f. é. m. d'induction et, par suite, d'un courant alternatif, *dont l'intensité mesure l'amplitude des variations du champ magnétique*. Plaçons au contraire le résonateur dans la position II, avec le circuit Γ dans le plan xOy et les plateaux du condensateur parallèles au plan yOz : le champ magnétique, parallèle au plan du circuit Γ, n'y produit aucun phénomène d'induction, mais le champ électrique alternatif $\vec{E}$ développe, par influence électrostatique, des charges électriques, alternativement positives et négatives, sur les plateaux du condensateur ; leur passage à travers le circuit Γ y fournit un courant alternatif, dont l'*intensité mesure l'amplitude des variations du champ électrique.*

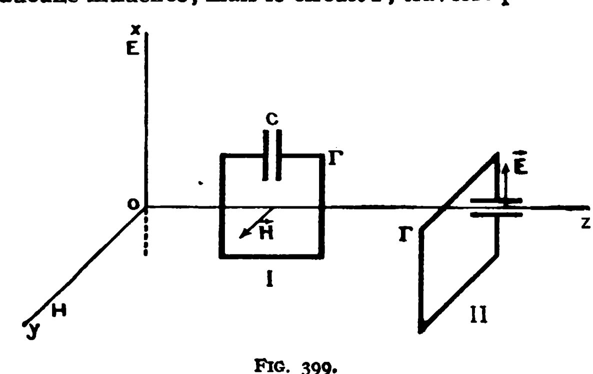


FIG. 399.

La présence du condensateur donne toujours au résonateur que nous venons

d'étudier une période propre assez longue, correspondant à une longueur d'onde d'au moins quelques décimètres. Pour l'étude des ondes très courtes, on emploie un **radiomètre,** dont l'équipage mobile, formé de lames de mica suspendues dans le vide par un fil de quartz, porte un résonateur sur l'une de ses faces; ce résonateur est constitué par une couche très mince d'argent ou de platine déposée sur le mica et découpée en portions isolées de dimensions telles qu'elles s'accordent sur les ondes étudiées. Les courants qui y sont induits produisent un échauffement du résonateur, et une déviation de l'équipage radiométrique proportionnelle à l'énergie de l'onde incidente.

330. Ondes stationnaires. — L'expérience fondamentale, par laquelle Hertz a montré l'existence des ondes hertziennes et qui a fourni la première mesure de leur vitesse de propagation, est l'expérience des ondes stationnaires.

Reprenons l'onde électromagnétique plane étudiée aux paragraphes 325 et 326, dont les courbes I de la figure 400 représentent les champs électrique et magnétique à l'instant t ; ces champs, dirigés respectivement suivant Ox et Oy, ont pour valeurs, en posant $A\sqrt{\varepsilon} = B$:

$$E_1 = A \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right), \qquad H_1 = B \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right).$$

FIG. 400.

Considérons une onde électromagnétique plane de même amplitude, se propageant en sens inverse, dans la direction Oz'. Nous devons, pour obtenir les mêmes équations, la rapporter à un trièdre de même sens que le trièdre Oxyz : nous prendrons le trièdre O$x'yz'$ (*fig.* 400, II) ; si l'origine O est convenable-

ment choisie sur l'axe $z'z$, les valeurs des champs, rapportées au trièdre $Ox'yz'$, sont pour cette deuxième onde :

$$E'_2 = A \cos \omega \left(t - \frac{z'}{v}\right), \qquad H_2 = B \cos \omega \left(t - \frac{z'}{v}\right).$$

Rapportons-la au trièdre $Oxyz$: on a $z = -z'$, et $E_2 = -E'_2$, donc :

$$E_2 = -A \cos \omega \left(t + \frac{z}{v}\right), \qquad H_2 = B \cos \omega \left(t + \frac{z}{v}\right).$$

Les champs résultant, à l'instant t, de la superposition des deux ondes (*fig.* 400, III) ont pour expression :

$$E = E_1 + E_2 = 2A \sin \frac{\omega z}{v} \sin \omega t, \qquad H = H_1 + H_2 = 2B \cos \frac{\omega z}{v} \cos \omega t.$$

Les courbes de la figure 401 représentent les variations des champs E et H en fonction de la distance z, à différents instants : $t = 0$ pour les courbes I, $t = T/8$ pour les courbes II, $t = T/4$ pour les courbes III, $t = 3T/8$ pour

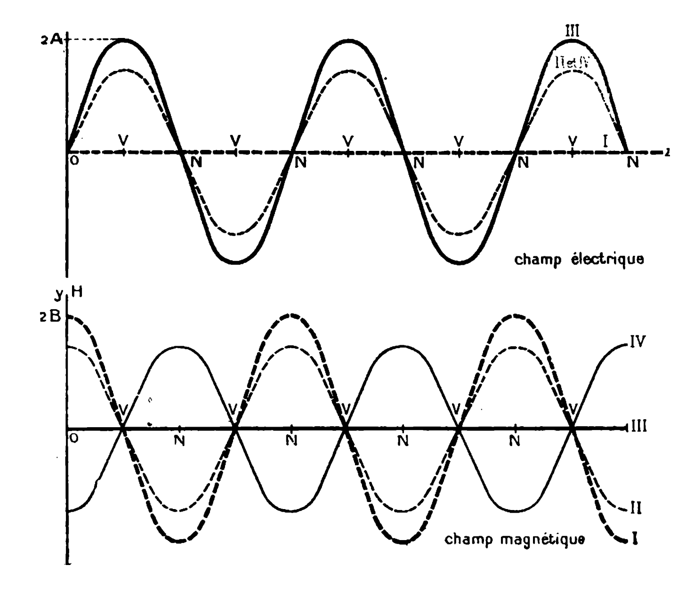


FIG. 401.

les courbes IV. On reconnaîtra facilement sur ces courbes les principales propriétés du champ électromagnétique, qui se déduisent immédiatement des équations donnant les valeurs de E et de H.

Chacun des deux champs électrique et magnétique a même phase en tous les points de l'espace où les deux ondes se superposent, et ces deux champs sont en quadrature : le champ électrique s'annule partout à l'instant $t = 0$, alors qu'à cet instant le champ magnétique est maximum en chaque point (*fig.* 401, courbes I).

L'amplitude de la variation du champ électrique, $2A \sin \frac{\omega z}{V} = 2A \sin \frac{2\pi z}{\lambda}$, *est nulle pour les points* N *dont la distance z à l'origine est un multiple entier de* $\frac{\lambda}{2}\left(z = k\frac{\lambda}{2}, \frac{2\pi z}{\lambda} = k\pi\right)$, *elle est **maximum pour les points** V **dont la distance à l'origine** est un multiple entier impair de* $\frac{\lambda}{4}\left(z = (2k+1)\frac{\lambda}{4}, \frac{2\pi z}{\lambda} = k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. *Les points* N *sont les* **nœuds** *du champ électrique, les points* V *en sont les* **ventres** *: la distance de deux nœuds ou de deux ventres consécutifs est égale à la moitié de la longueur d'onde ; la distance d'un nœud au ventre le plus voisin est égale au quart de la longueur d'onde.*

L'amplitude de la variation du champ magnétique, $2B \cos \frac{\omega z}{V}$, *est au contraire maximum pour les points* N $\left(\frac{\omega z}{V} = k\pi\right)$ *et nulle pour les points* V $\left(\frac{\omega z}{V} = k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$: *les nœuds du champ électrique sont des ventres pour le champ magnétique, et les ventres du champ électrique sont des nœuds pour le champ magnétique.*

Dans la propagation d'une onde unique, les champs électrique et magnétique atteignent leur maximum successivement en tous les points de l'espace; les sinusoïdes I et II de la figure 400 se déplacent dans la direction de propagation Au contraire, dans la superposition de deux ondes qui se propagent en sens inverse, les champs sont nuls et atteignent, à chaque instant, leurs

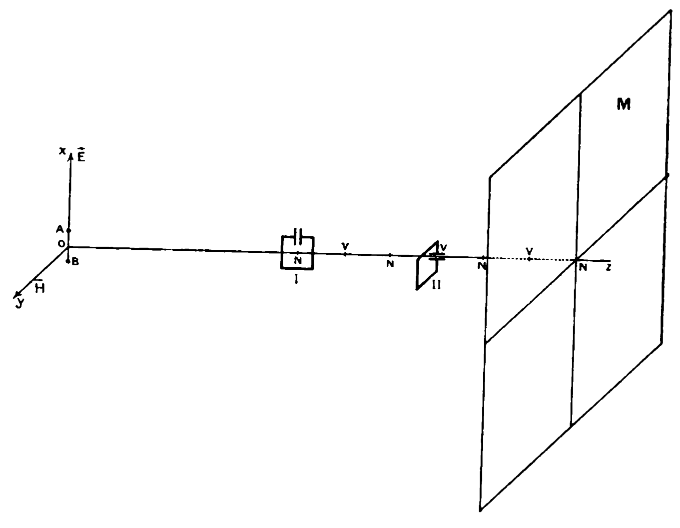


FIG. 402.

maxima en des points fixes; les sinusoïdes III de la figure 400 se déforment sans se déplacer (*fig.* 401), d'où le nom d'**ondes stationnaires** donné à ces ondes.

Les ondes stationnaires ont été obtenues par Hertz, au moyen de la réflexion de l'onde fournie par l'excitateur sur un miroir métallique plan M,

de dimensions grandes par rapport à la longueur d'onde : l'onde réfléchie forme avec l'onde incidente un système d'ondes stationnaires semblable à celui que nous venons d'étudier. Le champ électrique est nul dans le conducteur qui constitue le miroir : *la surface du miroir est un plan nodal pour le champ électrique.*

Hertz a effectivement observé des nœuds et des ventres, à l'aide du résonateur, et a vérifié leur alternance. Si on place le résonateur dans la position I (*fig.* 402), on observe des maxima de courants en des points N′ équidistants dont le premier est sur la surface du miroir ; il n'est parcouru par aucun courant en des points V′, situés au milieu des intervalles des points N′. Si on le place dans la position II, le courant qui le parcourt est au contraire maximum aux points V′, nul aux points N′.

331. Mesure de la vitesse de propagation des ondes hertziennes. — Les expériences que nous venons d'indiquer permettent de mesurer l'intervalle *d* de deux nœuds consécutifs; si les ondes étudiées sont des ondes entretenues, on peut, de la mesure de leur période T, déduire leur vitesse de propagation $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2d}{T}$. La longueur d'onde doit naturellement être petite par rapport aux dimensions du miroir employé, et il faut éliminer les réflexions parasites telles que celles qui peuvent se produire sur les murs d'un laboratoire : les expériences faites en plein air avec des ondes entretenues de 90 centimètres de longueur d'onde et un miroir métallique constitué par un carré de 3 mètres de côté ont donné des résultats dont l'accord avec la théorie est aussi bon qu'on pouvait l'espérer.

Dans les premières expériences, et en particulier dans celles de Hertz, les ondes employées étaient les ondes amorties données par l'oscillateur de Hertz. Le champ qui agit sur le résonateur est alors un champ pseudo-périodique amorti, dont l'amortissement est celui du circuit oscillant constitué par l'oscillateur. Comme ce circuit est coupé par une étincelle, son amortissement est toujours assez grand (§ 311), tandis que celui du circuit fermé qui constitue le résonateur est toujours assez faible. Les conditions d'action du premier circuit sur le second sont celles qui ont été étudiées au paragraphe 317, quand l'amortissement du primaire est très supérieur à celui du secondaire : quand l'onde incidente rencontre le résonateur, elle y produit des oscillations électriques suivant le mode d'excitation dit « par choc ». Ces oscillations ont pour période la période propre T′ du résonateur, et elles persistent longtemps après que le train d'ondes de l'onde incidente l'a dépassé et a cessé d'agir.

Lorsque le train d'ondes revient sur le résonateur, après s'être réfléchi sur le miroir et avoir parcouru une distance 2D, c'est-à-dire au bout d'un temps $\tau = 2D / v$, il y produit une nouvelle impulsion; elle augmente l'amplitude des oscillations qui persistent dans le résonateur, ou au contraire elle les fait cesser, suivant la phase où se trouvent ces oscillations au moment où elle se produit. L'amplitude finale est fonction de cette phase, c'est-à-dire du rapport du temps τ à la période T′, ou du rapport de la distance D à la longueur d'onde λ' des oscillations propres du résonateur. Les phénomènes observés dépendent de cette amplitude finale; ils sont qualitativement les mêmes que ceux que nous avons étudiés théoriquement au paragraphe précédent; les nœuds et les ventres ont la même disposition, mais, *dans le calcul de leurs dis-*

tances, on doit introduire, au lieu de la période T *de l'oscillateur, la période propre* T′ *du résonateur.*

Les nœuds N′ et les ventres V′ observés par Hertz correspondent à la période propre du résonateur, comme, dans une expérience d'interférences optiques faite en lumière blanche, les franges observées à travers un verre rouge correspondent à une longueur d'onde caractéristique de ce verre, et la vitesse v est donnée, à partir de la longueur d'onde λ' déduite de leur intervalle, par la relation :

$$v = \frac{\lambda'}{T'}$$

Il est naturellement avantageux (§ 317), pour obtenir des phénomènes aussi marqués que possible, de choisir la période T′ égale à la période T.

La vitesse de propagation a également pu être mesurée par une expérience directe, en mesurant le temps τ mis par les signaux de télégraphie sans fil pour aller de France en Amérique. Le principe de la méthode employée (Abraham, Dufour et Ferrié) est le suivant : on dispose de deux postes d'émission A et A′, situés à Paris et à Washington, et de deux postes de réception B et B′, situés dans leur voisinage immédiat (*fig.* 403). Le poste A émet un signal à l'instant t, et le poste A′ à l'instant t' ; ces signaux sont reçus au poste B aux instants t et $t' + \tau$, au poste B′ aux instants $t + \tau$ et t', et les intervalles qui séparent leur réception sont, au poste B, $\theta = t' - t + \tau$ et au poste B′, $\theta' = t' - t - \tau$: le temps τ mis par un signal pour aller de Paris à Washington est $\frac{\theta - \theta'}{2}$; il est d'environ $\frac{1}{50}$ de seconde.

AB B′A′

FIG. 403.

On mesure les intervalles θ et θ' en recevant les signaux dans chaque poste, après détection, par un galvanomètre à enregistrement photographique, et en inscrivant sur la bande d'enregistrement les vibrations d'un diapason étalonné. On arrive ainsi à déterminer le temps τ avec une erreur absolue inférieure à 1/10.000 de seconde, par conséquent avec une erreur relative inférieure à 1/200. La distance des deux stations est plus difficile à connaître, à cause de l'incertitude sur le trajet des ondes qui résulte du fait que la terre est ronde : en admettant qu'elles se propagent suivant un grand cercle à la surface de l'Océan, on trouve une vitesse v de 296.000 kilomètres-secondes, concordant à environ 1/100 près avec la valeur admise pour le rapport c et pour la vitesse de la lumière.

III. — *PROPAGATION LE LONG DES FILS*

332. Propagation d'une onde le long d'un fil. — Supposons qu'une extrémité O d'un fil conducteur cylindrique rectiligne très long Ox (*fig.* 404) soit portée à un potentiel alternatif, de période $T = 2\pi / \omega$; il se produit dans le fil un courant alternatif de même période, dont nous désignerons par i l'intensité dans un élément MM′ à l'instant t. Ce courant crée en un point P voi-

sin de la surface de l'élément MM' un champ magnétique $\vec{H}$, perpendiculaire au plan défini par le point P et par l'axe du cylindre. Les différents points du fil parcourus par le courant sont à des potentiels différents ; nous désignerons par V le potentiel de l'élément MM', par q la charge répartie à sa surface, et par $\vec{E}$ le champ électrique en P : le vecteur $\vec{E}$, normal à la surface du conducteur, est dirigé suivant le rayon du cylindre. Les deux champs $\vec{H}$ et $\vec{E}$ sont des champs alternatifs, qui doivent satisfaire aux relations fondamentales de Maxwell ; ils forment une onde électromagnétique, qui se propage dans la direction normale au plan qu'ils déterminent, c'est-à-dire parallèlement aux fils, avec la vitesse v qui caractérise le milieu environnant le fil : *le courant i et la charge q qui les créent doivent, ainsi que le potentiel* V, *se propager le long du fil avec cette même vitesse* v.

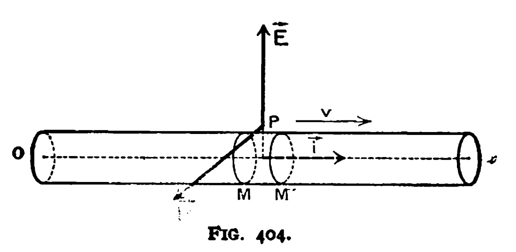


FIG. 404.

On peut admettre qu'au point P le champ électrique E est proportionnel au potentiel V dont il dérive, et que le champ magnétique H est proportionnel au courant i qui le crée. A l'onde électromagnétique dans le milieu diélectrique :

$$E = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad H = B \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right),$$

correspond l'oscillation dans le fil :

$$V = V_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad i = i_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right).$$

On peut dire que, dans la conception de Maxwell, *le rôle essentiel dans l'établissement d'un courant n'est pas joué par le fil conducteur, mais par le milieu qui l'environne :* c'est la conséquence naturelle de l'hypothèse que l'énergie potentielle du courant, tant électromagnétique qu'électrostatique, est localisée dans ce milieu. L'énergie, apportée par l'alternateur en O, s'y propage par une onde électromagnétique, et le courant que cette onde induit dans le fil n'est en quelque sorte qu'un phénomène accessoire, dont l'effet principal est de canaliser l'énergie électromagnétique le long du fil, et de l'empêcher de rayonner dans toutes les directions.

333. Ondes stationnaires. Oscillateur linéaire. — Supposons qu'à l'oscillation électrique :

$$V_1 = V_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad i_1 = i_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right),$$

se propageant le long du fil dans le sens Ox, nous superposions une seconde oscillation de même amplitude, se propageant dans le sens opposé Ox'. En comptant positivement suivant Ox' les abscisses x' et les courants i'_2, et en

supposant l'origine convenablement choisie, on peut écrire ses équations :

$$V_2 = V_0 \cos\omega\left(t - \frac{x'}{v}\right), \qquad i'_2 = i_0 \cos\omega\left(t - \frac{x'}{v}\right).$$

Rapportées au même axe Ox que les premières, elles deviennent :

$$V_2 = V_0 \cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right), \qquad i_2 = - i_0 \cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

La superposition des deux ondes donne au point d'abscisse x un potentiel V et un courant i :

$$V = V_1 + V_2 = 2V_0 \cos\frac{\omega x}{v} \cos\omega t, \qquad i = i_1 + i_2 = 2i_0 \sin\frac{\omega x}{v} \sin\omega t.$$

Ces équations sont analogues à celles que nous avons discutées au paragraphe 330, et les valeurs du potentiel et de l'intensité peuvent être représentées par des sinusoïdes analogues à celles de la figure 401. *Par la superposition de deux ondes égales se propageant en sens inverse, on obtient, le long du fil, un système d'ondes stationnaires. Il existe une série de points, distants l'un de l'autre de λ / 2, pour lesquels l'intensité du courant est nulle : ce sont les nœuds du courant électrique ; l'intensité du courant est maxima en une autre série de points, distants l'un de l'autre de λ / 2 et distants des premiers de λ / 4 : ce sont les ventres du courant. Les nœuds du courant sont des ventres du potentiel, et les ventres du courant sont des nœuds pour le potentiel.*

On obtient un tel système d'ondes stationnaires lorsqu'on met en vibration un **oscillateur linéaire** AB (*fig.* 405), formé d'un conducteur rectiligne isolé à ses deux extrémités : c'est, schématiquement, l'oscillateur de Hertz dont on a supprimé les boules. Comme le courant est nécessairement nul aux extrémités isolées A et B, les oscillations qui s'établissent spontanément doivent avoir une période telle que ces extrémités soient des nœuds pour le courant : leur distance l est un multiple entier de la distance λ / 2 de deux nœuds consécutifs. Si l'oscillation qui s'établit est l'**oscillation fondamentale,** il n'y a pas de nœuds intermédiaires, et *la* **longueur d'onde propre** λ *de l'oscillateur est égale à deux fois sa longueur l.* Le milieu de l'oscillateur est alors un ventre de courant, et par conséquent un nœud de potentiel, et les courbes qui représentent les valeurs efficaces du potentiel et de l'intensité aux différents points du conducteur linéaire sont les courbes V et i de la figure 405.

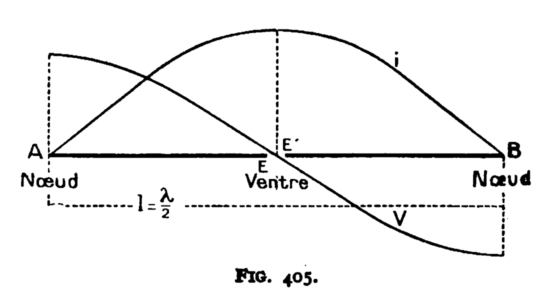


FIG. 405.

On remarquera l'analogie entre cette théorie et la théorie des vibrations sonores qui s'établissent dans un tuyau fermé à ses deux extrémités ; on obtient des relations ayant même forme dans les deux cas en assimilant le courant électrique à l'élongation des particules d'air, et le potentiel à la compression. On obtiendra des résultats correspondant au cas d'un tuyau sonore ouvert à

une extrémité et fermé à l'autre en considérant un oscillateur linéaire dont une extrémité A est réunie au sol et l'extrémité B isolée : c'est le cas d'une antenne de télégraphie sans fil (*fig.* 406). L'extrémité A, dont le potentiel est constant, est un nœud de potentiel et un ventre de courant, l'extrémité isolée B est un ventre de potentiel et un nœud de courant ; lorsque l'oscillation qui s'établit est l'oscillation fondamentale, il n'y a ni nœud ni ventre intermédiaires: *la période propre* T *de l'antenne est telle que sa longueur l soit égale au quart de la longueur d'onde* $\lambda = v\text{T}$; on dit alors que l'antenne vibre en quart d'onde, et les courbes qui représentent les valeurs efficaces du potentiel et de l'intensité en ses différents points sont les courbes V et *i* de la figure 406.

Le circuit oscillant d'une antenne réelle comprend toujours une self L, qui

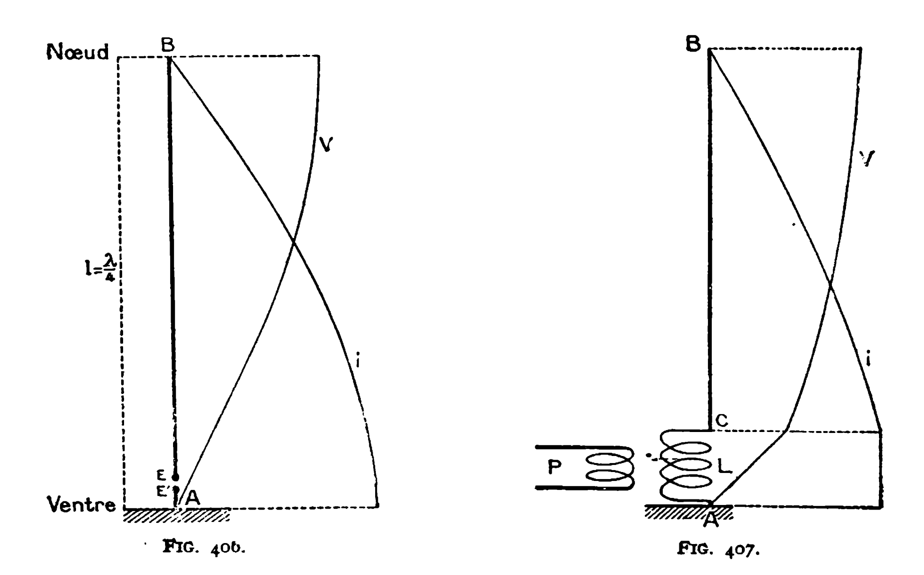


FIG. 406.

FIG. 407.

sert à y créer des oscillations par l'action d'un circuit primaire P (cf. § 328) : les courbes qui représentent les valeurs efficaces du potentiel et de l'intensité ont alors les formes indiquées par la figure 407. Il est facile de déterminer expérimentalement la courbe des intensités, en intercalant un ampèremètre thermique dans l'antenne, au point où l'on veut mesurer l'intensité efficace ; on peut également obtenir la courbe des potentiels à l'aide d'un électromètre : les résultats expérimentaux sont entièrement d'accord avec les prévisions théoriques.

334. Mesure de la vitesse de propagation le long des fils. — La détermination de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques par l'étude des ondes stationnaires peut être plus précise lorsque les ondes se propagent le long des fils que lorsqu'elles se propagent librement. La canalisation de l'énergie obtenue par les fils permet, en effet, de recueillir davantage d'énergie dans le résonateur, et de déterminer avec plus de précision les positions pour lesquelles il n'est parcouru par aucun courant. D'autre part, la production des ondes stationnaires le long des fils n'exige pas l'emploi d'un miroir : il est

possible d'employer des longueurs d'onde de plusieurs mètres, et par conséquent d'opérer avec des oscillations faiblement amorties, ou même des oscillations entretenues, qui permettent d'utiliser des résonateurs très sensibles.

On dispose l'expérience de la façon représentée schématiquement par la figure 408 : les oscillations sont produites dans un circuit primaire P ; elles créent par induction, dans une self S, une f. é. m. alternative, qui produit des courants alternatifs dans les deux fils F_1F_2. Deux éléments en regard de ces fils, $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, sont parcourus à l'instant t par des courants parallèles et opposés d'intensité i; ils portent des charges électriques $+q$ et $-q$, et il existe entre eux une différence de potentiel V. Au milieu M de la droite qui les joint, il existe un champ électrique $\vec{E}$, dirigé suivant cette droite et proportionnel à V, et un champ magnétique $\vec{H}$, perpendiculaire au plan des fils et propor-

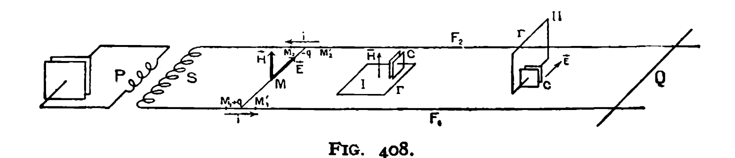


Fig. 408.

tionnel à i : on peut répéter sur ces deux champs, sur les courants i et sur les potentiels V, les raisonnements faits aux paragraphes précédents.

Pour produire la réflexion de l'onde électromagnétique, et créer les ondes stationnaires, il suffit de réunir les deux fils par un pont métallique Q, qui provoque, au point où il est placé, la formation d'un nœud de potentiel ; en le déplaçant, on fait varier la période des oscillations propres du circuit SF_1F_2Q; on rend le courant dans les fils aussi intense que possible, en mettant ce circuit en résonance sur les oscillations primaires.

La recherche des nœuds et des ventres peut se faire à l'aide d'un résonateur (§ 329) : dans la position I, le résonateur, sensible au champ magnétique, ne sera parcouru par aucun courant lorsqu'on le placera aux nœuds du champ magnétique, qui sont aussi les nœuds du courant i ; dans la position II, le résonateur, sensible au champ électrique, ne sera parcouru par aucun courant lorsqu'on le placera aux nœuds du champ électrique, qui sont aussi les nœuds de la différence de potentiel V. On obtient plus de précision en recherchant les nœuds du potentiel par la mesure directe, par un voltmètre sensible, de la différence de potentiel alternative qui existe entre les deux points M_1M_2 ; il est nécessaire que le voltmètre intercalé entre ces points ne consomme qu'extrêmement peu de courant, de façon à ne pas modifier le régime des oscillations : on emploiera par exemple un voltmètre amplificateur (§ 320).

La mesure de la distance de deux nœuds de même espèce donne la demi-longueur d'onde des oscillations. Dans les premières expériences faites par cette méthode (Blondlot, 1891) les ondes employées étaient des ondes amorties, et la longueur d'onde $\lambda' = vT'$ observée correspondait à la période T' du résonateur (§ 331) ; cette période T' était calculée à partir de ses dimensions, et la moyenne des résultats obtenus pour différentes longueurs d'onde comprises entre 9 mètres et 33 mètres, $v = 3{,}0285 \cdot 10^{10}$, concorde avec la valeur admise pour le rapport c aussi bien qu'on peut l'espérer avec ce mode de calcul.

Dans les expériences récentes (Mercier, 1923), les oscillations employées sont des oscillations entretenues ; leur période est comparée directement à celle du pendule d'une horloge astronomique par le procédé indiqué à la fin du paragraphe 321, et est connue avec une précision de l'ordre du cent-millième. On déplace le pont mobile Q de façon à mettre le circuit en résonance, et on trace la courbe de résonance en mesurant au galvanomètre, après détection, le courant induit dans un circuit voisin de Q. La position de résonance est définie à 1/10 de millimètre près, et la distance de deux positions de résonance consécutives est égale à la demi-longueur d'onde. La valeur obtenue pour la vitesse dans l'air, avec des fils de $1^{mm},2$ de diamètre placés à 2 centimètres l'un de l'autre et des ondes de 4 mètres de longueur d'onde, est $v = 299.360$ km / sec.

Mais, à ce degré de précision, il faut tenir compte du fait que la dissipation d'énergie par effet Joule dans les fils qui canalisent l'onde électromagnétique entraîne une diminution de sa vitesse, comme la dissipation d'énergie par frottement sur les parois d'un tuyau qui canalise une onde sonore entraîne une diminution de sa vitesse. Cette diminution peut être calculée théoriquement, et les expériences de Mercier donnent, toutes corrections faites, pour la vitesse de propagation des ondes planes indéfinies dans le vide, la valeur $v = 2{,}9979 . 10^{10}$, exacte probablement à 1/10.000 près, et parfaitement d'accord avec les valeurs admises pour la vitesse de la lumière, $v = 2{,}9977 . 10^{10}$, et pour le rapport des unités, $c = 2{,}9979 . 10^{10}$ (§ 284).

335. Validité des hypothèses faites pour l'étude des courants lentement variables. — Dans l'étude des courants variables, et en particulier dans l'étude des courants alternatifs faite aux chapitres XXVIII à XXX, nous avons généralement supposé (cf. §§ 222 et 288) que l'intensité du courant était à chaque instant la même en tous les points du circuit parcouru par le courant. L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques le long des fils montre que l'intensité du courant aux différents points d'un fil, à un instant donné, est une fonction périodique de la distance, dont la période le long du fil est égale à la longueur d'onde dans le milieu qui l'entoure. *Il en résulte que les variations d'un point à l'autre du circuit sont négligeables, et que l'hypothèse du courant constant est applicable, quand la longueur du circuit est négligeable par rapport à la longueur d'onde des oscillations qui le parcourent.*

Cette condition est généralement satisfaite pour les circuits oscillants fermés étudiés au chapitre XXX : la présence d'un condensateur, de capacité très grande par rapport à la capacité propre des fils conducteurs, a pour effet de donner à la période $T = 2\pi \sqrt{LC}$ une valeur relativement élevée, correspondant à une longueur d'onde $\lambda = 2\pi \sqrt{l_m c_s}$ grande par rapport à la longueur du circuit. On peut dire aussi qu'elle est toujours réalisée dans les réseaux de distribution d'énergie par courants alternatifs, et qu'elle l'est souvent dans les réseaux téléphoniques : dans le premier cas, la fréquence, de l'ordre de 50, correspond à une longueur d'onde de l'ordre de 6.000 kilomètres ; dans le second, la fréquence, de l'ordre de 1.000, correspond à une longueur d'onde de l'ordre de 300 kilomètres. Mais il faut remarquer que cette dernière longueur est fréquemment atteinte par les lignes téléphoniques, et que certains transports d'énergie s'effectuent sur des distances qui ne sont pas né-

gligeables par rapport à la première : on a même réalisé des lignes de transport d'énergie qui vibrent en quart d'onde, comme l'antenne de la figure 406, et qui, recevant l'énergie électrique à une extrémité sous un potentiel élevé et avec une intensité de courant faible, la restituent à l'autre extrémité avec une forte intensité de courant et sous un potentiel faible.

Dans l'étude du champ magnétique du courant alternatif (chap. XXIX), nous avons aussi supposé qu'on pouvait le calculer à chaque instant, par la loi d'Ampère ou par la loi de Biot et Savart, à partir de l'intensité du courant dans le circuit à cet instant. Ici encore *cette hypothèse n'est valable qu'à la condition que les distances du point considéré aux différents éléments du circuit soient négligeables par rapport à la longueur d'onde des oscillations électriques ;* elle est pratiquement valable dans tous les cas autres que celui de l'oscillateur ouvert, car le champ magnétique est alors pratiquement nul dès qu'on s'écarte du circuit fermé parcouru par le courant (§ 328).

Dans le cas d'un circuit oscillant à condensateur, les courants de déplacement qui ferment le circuit sont limités à l'espace compris entre les armatures du condensateur ; ils ne forment qu'une longueur faible du circuit total, et peuvent être négligés dans l'application des lois de l'électromagnétisme. Il n'en est plus de même dans le cas de l'oscillateur ouvert : les courants qui le parcourent ne sont pas les mêmes en ses différents points, et ils sont fermés par des courants de déplacement répartis dans tout l'espace soumis au champ électromagnétique ; l'application des lois de l'électromagnétisme, qui n'ont de sens que pour des circuits fermés (§ 188), ne peut être faite qu'en tenant compte de ces courants de déplacement, c'est-à-dire en utilisant les relations de Maxwell : les phénomènes de propagation ne constituent pas une exception à la loi d'Ampère, ils en sont une conséquence.

Rappelons enfin (§ 322) que, pour les courants de haute fréquence, et pour les conducteurs autres que les fils très fins, on ne peut appliquer la loi d'Ohm qu'à la condition de tenir compte des f. é. m. d'induction qui existent dans la masse du conducteur ; *la loi de Joule, valable sous la forme ordinaire pour chaque élément de la section du conducteur, ne peut être appliquée à son ensemble qu'à la condition d'introduire dans le calcul une valeur de la résistance variable avec la fréquence.*

IV. — *IDENTITÉ DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET DES ONDES LUMINEUSES*

336. Indice de réfraction et pouvoir réflecteur. — L'identité de la valeur observée pour la vitesse de propagation de la lumière et de la valeur calculée pour la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide a conduit Maxwell à admettre, en 1865, que les ondes lumineuses étaient des ondes électromagnétiques. Les hypothèses de Maxwell ont reçu vingt ans plus tard une première confirmation par la découverte des ondes hertziennes, et de nombreux physiciens se sont attachés à montrer l'identité de nature des ondes hertziennes et des ondes lumineuses, en montrant expérimentalement l'identité de leurs propriétés : ce sont ces expériences que nous allons rapidement passer en revue.

On verra qu'elles apportent une confirmation remarquable de l'hypothèse

de Maxwell : elles montrent de façon certaine que les ondes lumineuses, comme les ondes hertziennes, sont des ondes électromagnétiques, et que les deux catégories ne diffèrent que par leur longueur d'onde. Le spectre visible correspond à des longueurs d'onde comprises entre 0,4 μ et 0,7 μ; il est prolongé du côté des grandes longueurs d'onde par le spectre infra-rouge; on a pu isoler, dans le rayonnement du bec Auer, des radiations ayant des longueurs d'onde de 100 et 108 μ, et dans le rayonnement de l'arc au mercure, des radiations de longueur d'onde 314 μ. Les ondes hertziennes ont pu être obtenues à partir d'une longueur d'onde de 30 μ (Levitskaïa, 1927); celles qui sont employées en T. S. F. ont des longueurs d'onde comprises entre 10 mètres et 30.000 mètres.

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu de pouvoir inducteur spécifique ε est $c / \sqrt{\varepsilon}$. La vitesse de propagation de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction n est c / n. L'hypothèse de l'identité des deux phénomènes conduit à la **relation de Maxwell :**

$$\varepsilon = n^2.$$

La vérification expérimentale de cette relation est compliquée, d'une part par la difficulté de définir et de mesurer le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique réel (§ 209), d'autre part par l'existence des phénomènes de dispersion; le pouvoir inducteur spécifique ε, correspondant à des phénomènes statiques, doit être la limite vers laquelle tend le carré n^2 de l'indice quand les vibrations deviennent très lentes, et que leur longueur d'onde augmente indéfiniment. En fait, la relation de Maxwell est vérifiée d'une façon satisfaisante lorsqu'on peut mesurer l'indice pour des radiations infra-rouges de longueur d'onde assez grande : par exemple, on a obtenu pour l'indice ordinaire du quartz, pour des radiations infra-rouges de longueur d'onde $\lambda = 20{,}5\mu$, une valeur $n = 2{,}12$, alors que sa constante diélectrique, $\varepsilon = 4{,}49$, a pour racine carrée $\sqrt{\varepsilon} = 2{,}12$.

Il existe d'ailleurs des corps qui présentent encore des phénomènes de **dispersion** appréciables dans le domaine des ondes hertziennes : c'est par exemple le cas des alcools. On mesure la vitesse de propagation v dans l'alcool pour une longueur d'onde donnée par la méthode du paragraphe 334, en produisant des ondes stationnaires dans des fils plongés dans le liquide, et on en déduit l'indice par la relation $n = c/v$. La courbe de variation des indices avec la longueur d'onde, lorsque celle-ci varie de 10 centimètres à quelques mètres, est tout à fait analogue aux courbes que l'on obtient dans le domaine de l'optique; elle présente le phénomène de la dispersion anormale au voisinage d'une certaine longueur d'onde, pour laquelle l'alcool possède une absorption sélective, caractérisée par l'échauffement du liquide traversé par les ondes.

Lorsqu'une onde électromagnétique rencontre un milieu conducteur, elle y produit des courants électriques qui l'empêchent de pénétrer profondément à l'intérieur de ce milieu : la plus grande partie de l'énergie est réfléchie. La théorie de Maxwell permet de calculer le pouvoir réflecteur R d'un métal à partir de sa conductibilité σ et de la période T des ondes; la relation obtenue : $1 - R = \frac{2}{\sqrt{\sigma T}}$, est applicable aux ondes lumineuses de grande longueur d'onde. La quantité $1 - R$ a pu être mesurée pour différents métaux, pour

des radiations infra-rouges de longueur d'onde $\lambda = 25,5\mu$ (Rubens et Hagen) : les valeurs expérimentales ne diffèrent des valeurs calculées que de quantités assez faibles, qui varient de 10 o/o (cuivre et or) à 1 o/o (nickel et argent).

Le champ magnétique alternatif de l'onde incidente exerce sur les courants alternatifs induits dans le milieu conducteur des forces de répulsion, analogues à celles de l'expérience d'Elihu Thomson (§ 305); ces forces, prévues par Maxwell dès 1874, ont pu être mises en évidence dans le cas où cette onde est une onde lumineuse (Lebedew, 1900) : elles constituent la **pression de radiation.**

337. Reproduction avec les ondes hertziennes des principales expériences de l'Optique. — Dès ses premières expériences, Hertz avait employé les **phénomènes de réflexion** sur les miroirs plans; il avait reconnu que les lois de la réflexion des ondes électromagnétiques étaient celles de la réflexion des ondes lumineuses, en munissant l'excitateur et le résonateur de réflecteurs métalliques cylindriques; il avait également montré l'existence des **phénomènes de réfraction** en employant un grand prisme d'asphalte. L'obtention d'ondes électromagnétiques de courtes longueurs d'onde a permis depuis de reproduire la plupart des phénomènes de l'optique sans qu'on soit obligé de donner aux appareils des dimensions exagérées.

C'est ainsi qu'on a déjà réalisé, dans la pratique de la T. S. F., des *phares hertziens*, dans lesquels l'énergie rayonnée par une antenne émettant des ondes de quelques mètres de longueur d'onde est concentrée en un faisceau dirigé par un miroir parabolique d'une dizaine de mètres d'ouverture; le miroir peut être une surface métallique ou être formé par des fils parallèles à l'antenne, espacés de 10 à 30 centimètres.

Les phénomènes de la réflexion vitreuse et de la réfraction s'observent, par exemple, avec des prismes de paraffine, dont l'indice pour les ondes hertziennes est voisin de 1,43; si l'on donne à ces prismes un angle de 90°, on peut également observer le phénomène de la réflexion totale. Les phénomènes de la **réflexion cristalline** et de la **double réfraction** s'obtiennent avec des cristaux de soufre; on a pu mesurer, pour les ondes hertziennes de courtes longueurs d'onde, les valeurs des trois indices principaux du soufre : leurs carrés sont $n_1^2 = 3,59$, $n_2^2 = 3,83$, $n_3^2 = 4,62$, et sont pratiquement égaux aux pouvoirs inducteurs spécifiques, mesurés électrostatiquement dans les 3 directions correspondantes, $\varepsilon_1 = 3,67$, $\varepsilon_2 = 3,86$, $\varepsilon_3 = 4,66$ (1).

Les **ondes stationnaires** obtenues par Hertz pour les ondes hertziennes peuvent être rapprochées des franges lumineuses obtenues avec un seul miroir : l'observation, faite par la photographie (Wiener) ou à l'aide d'un microscope (Cotton), montre qu'il existe une frange obscure à la surface d'un miroir métallique, c'est-à-dire à l'endroit où existe un nœud du champ électrique : *le vecteur lumineux, auquel l'œil et la plaque photographique sont sensibles, est le vecteur champ électrique.* D'autre part, les expériences classiques sur les **interférences** lumineuses ont pu être reproduites avec les ondes hertziennes (Righi) : citons celles des miroirs de Fresnel, du biprisme, des anneaux de Newton.

Une série d'antennes parallèles, régulièrement espacées, et alimentées par

(1) Pour les ondes lumineuses (raie D), on a $n_1^2 = 3,85$, $n_2^2 = 4,16$, $n_3^2 = 5,02$.

des courants dont la phase varie d'une quantité fixe d'une antenne à la suivante, rayonne de l'énergie comme les traits d'un **réseau de diffraction** optique : les interférences entre les vibrations émises par les différentes antennes ont pour effet que l'énergie semble ne se propager qu'au voisinage de certaines directions privilégiées. Ces antennes multiples à émission dirigée sont dès maintenant couramment employées dans la pratique industrielle de la transmission par ondes courtes (§ 452).

De même, on a répété les expériences fondamentales de la **diffraction** optique en isolant par des écrans circulaires des anneaux de dimensions convenables sur la surface de l'onde hertzienne. On a reproduit également, avec des ondes de quelques centimètres, des phénomènes de diffraction du type de la diffraction cristalline des rayons X (§ 388), en les recevant sur des réseaux dans l'espace constitués par des bâtonnets métalliques de quelques millimètres disposés en rangées régulières dans des plans réticulaires équidistants.

Les ondes hertziennes, qui sont des ondes transversales comme les ondes lumineuses, peuvent présenter comme elles les phénomènes de **polarisation ;** les ondes fournies par l'excitateur de Hertz, dont le champ électrique a une direction bien déterminée, sont polarisées rectilignement.

On a pu les analyser en les recevant sur un miroir plan de soufre ou de paraffine placé sous l'incidence brewstérienne; la valeur de l'indice déduite de cette expérience est en bon accord avec celle que fournit sa mesure directe. On éteint l'onde émise par l'excitateur en plaçant le miroir, sous l'incidence brewstérienne, de façon que le vecteur champ électrique de l'onde soit dans le plan d'incidence : la comparaison avec la réflexion vitreuse des ondes lumineuses montre que *le vecteur de Fresnel, perpendiculaire au plan de polarisation de la lumière, doit être identifié avec le vecteur champ électrique de l'onde électromagnétique.*

On a répété sur les ondes hertziennes polarisées la plupart des expériences classiques sur la lumière polarisée : extinction par un nicol, construit avec un cristal de soufre (Lebedew) ; obtention de vibrations polarisées circulairement ou elliptiquement, à l'aide de lames de soufre quarts d'onde, ou par réflexion totale.

La polarisation des ondes hertziennes peut d'ailleurs être mise en évidence très facilement, pour les ondes de quelques décimètres ou même de quelques mètres de longueur d'onde, si le récepteur est constitué par une antenne rectiligne dans laquelle on a intercalé un appareil de mesure : le courant induit dans l'antenne est proportionnel à la composante du champ électrique parallèle à l'antenne (§ 456), et il suffit d'avoir une antenne orientable et de chercher quelle est l'orientation qui donne la meilleure réception pour déterminer la direction du vecteur champ électrique de l'onde.

La polarisation des ondes électromagnétiques avait déjà été démontrée par Hertz ; il avait reconnu, en les recevant sur un *réseau de fils métalliques*, que la réflexion était maximum quand le champ électrique était parallèle aux fils. Lorsque l'onde rencontre une grille ainsi disposée (*fig.* 409 I), le champ électrique de l'onde produit un courant dans chaque fil ; si l'intervalle des fils est petit par rapport à la longueur d'onde, le réseau se comporte comme un conducteur plein, qui arrête l'onde électromagnétique et la réfléchit presque totalement. Si on tourne le réseau de 90° (*fig.* 409, II), de manière que les fils soient perpendiculaires au champ électrique, aucun courant n'y est produit ;

la grille n'exerce aucune action, et l'onde hertzienne la traverse librement. Un tel réseau constitue donc un analyseur; il peut aussi servir de polariseur: si la vibration qui le rencontre a une orientation quelconque, elle est décomposée en deux; l'une, dont le champ électrique est perpendiculaire aux fils, est transmise; l'autre, dont le champ électrique est parallèle aux fils, est réfléchie.

On a réalisé des réseaux de fils de cuivre fins dans lesquels l'intervalle des fils n'est que de 10μ, et on a vérifié (Du Bois et Rubens) que ces réseaux constituaient des polariseurs pour les ondes infra-rouges de longueur d'onde supérieure à 100μ. Pour cela, on reçoit ces ondes sur le réseau, après les avoir polarisées par réflexion sous l'incidence brewstérienne sur une lame de quartz, et on mesure au radiomicromètre l'énergie transmise. On constate qu'elle est maximum quand les fils du réseau sont situés dans le plan d'incidence du faisceau sur la lame de quartz, et qu'elle devient nulle quand ils lui sont perpendiculaires. D'après les conventions usuelles en Optique, le plan de polarisation

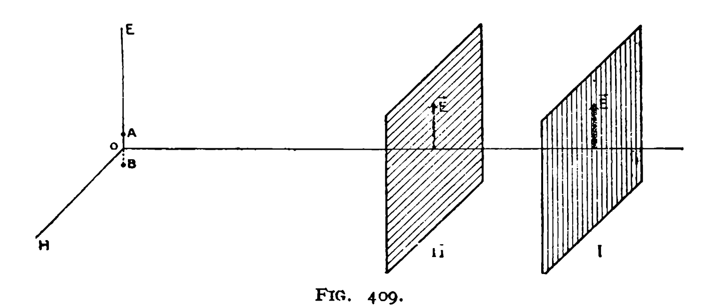


FIG. 409.

est le plan d'incidence sur la lame de quartz, et la vibration lumineuse est perpendiculaire à ce plan : ici encore, *l'expérience conduit à identifier le vecteur lumineux de Fresnel au vecteur champ électrique de l'onde électromagnétique.*

On a réalisé, avec les ondes hertziennes, des expériences de **polarisation rotatoire** (Lindman) en faisant traverser à l'onde polarisée un système formé de quatre boules métalliques disposées au sommet d'un tétraèdre asymétrique : la rotation du champ électrique que l'on observe change de sens quand on change le sens de la dissymétrie du tétraèdre. Elle change également de sens lorsqu'on fait varier la longueur d'onde de l'onde incidente de façon qu'elle soit d'abord supérieure, puis inférieure à la longueur d'onde propre des oscillations qui peuvent s'établir dans chacune des boules; la variation de la rotation en fonction de la longueur d'onde est représentée par une courbe de dispersion rotatoire tout à fait analogue à celles que fournissent en optique les corps colorés étudiés au voisinage de leur bande d'absorption.

Ces expériences sont particulièrement intéressantes parce qu'elles montrent de façon frappante l'influence de la dissymétrie du milieu où se propagent les ondes dans la production des phénomènes de polarisation rotatoire. En Optique, on suppose que l'activité optique des liquides ou des solutions est due à la dissymétrie de l'arrangement des atomes à l'intérieur des molécules; ici, on voit nettement que la rotation est due à la dissymétrie de l'arrangement des oscillateurs que constituent les boules disposées sur le trajet de l'onde.

Signalons enfin que les théories modernes de la propagation des ondes courtes

actuellement employées en Télégraphie sans fil font intervenir des phénomènes de **polarisation rotatoire magnétique** dans l'atmosphère dus au champ magnétique terrestre. Certaines expériences de réception sur une antenne orientable semblent en effet montrer que, pour les ondes courtes, le champ à la réception n'est pas toujours vertical, mais présente quelquefois une inclinaison correspondant à une rotation du plan de polarisation.

338. Jonction du spectre infra-rouge et du spectre électrique. — Nous avons dit (§ 336) que les ondes infra-rouges ont pu être observées jusqu'à une longueur d'onde de 314 microns et que les ondes hertziennes ont pu être produites à partir de la longueur d'onde de 30 microns. Il existe donc une série de longueurs d'onde, de 30 à 314 microns, qui peuvent être obtenues à la fois par voie calorifique et par voie électrique. Les expériences de Nichols et Tear (1922) ont montré que les ondes produites par les deux procédés pouvaient être reçues et étudiées par le même appareil, et qu'elles devaient être considérées comme identiques entre elles.

Le récepteur employé par Nichols et Tear est le radiomètre que nous avons décrit à la fin du paragraphe 329. La longueur d'onde des radiations est mesurée par le dispositif que représente la figure 409 *bis* : les rayons issus de

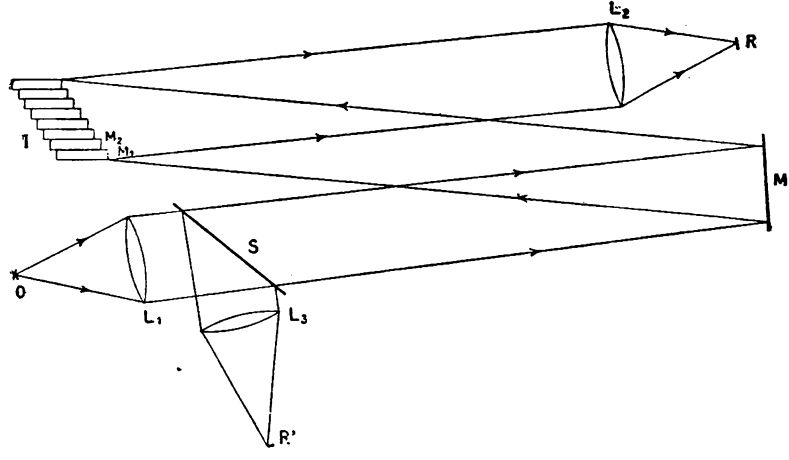


FIG. 409 *bis*.

la source O sont transformés en un faisceau parallèle par la lentille de paraffine L_1, réfléchis par le miroir M, puis par l'interféromètre à échelons I, et concentrés sur le radiomètre R par la lentille de paraffine L_2; l'interféromètre I est formé par un assemblage de plaques de cuivre dont les faces avant constituent une série de miroirs plans M_1, M_2, ..., dont les plans sont séparés par une certaine distance δ; un dispositif mécanique permet de faire varier δ tout en maintenant l'équidistance des plans. Le récepteur R reçoit ainsi une série de trains d'onde présentant des différences de marche 2δ : les courants qui y sont induits, et l'échauffement qu'ils provoquent, atteignent leur valeur maximum lorsque 2δ est égal à la longueur d'onde λ des ondes; l'emploi d'un

échelon contenant un certain nombre de lames permet d'obtenir des maxima assez nets même pour des ondes très amorties. L'expérience consiste à rechercher la valeur de δ qui produit la déviation maximum; elle est rendue particulièrement délicate par l'irrégularité des sources qui fournissent les oscillations de courtes longueurs d'onde : l'emploi d'une lame semi-transparente S et d'une lentille L_3 concentrant la portion de l'énergie qu'elle réfléchit sur un second radiomètre R′ permet de contrôler les variations de la source, et le rapport des déviations des deux appareils R et R′ fournit à chaque instant la proportion de l'énergie renvoyée sur le premier par l'interféromètre.

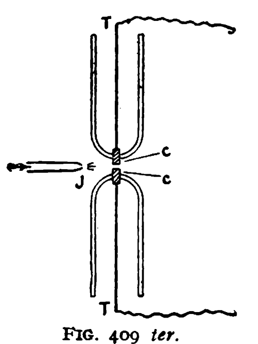


FIG. 409 *ter*.

L'oscillateur est constitué par deux petits cylindres CC de tungstène soudés dans des tubes de verre (*fig.* 409 *ter*); ces deux cylindres sont chargés par un transformateur, dont les pôles sont réunis à deux tiges TT arrivant près des cylindres; l'interposition d'une grande résistance sur le circuit empêche l'étincelle de charge d'être oscillante, de sorte que les ondes sont produites uniquement par l'étincelle de décharge qui jaillit entre les cylindres. Le refroidissement des cylindres est assuré à la fois par un courant d'air comprimé descendant au fond de chaque tube, et par un jet d'huile J projeté entre eux. Dans les premières expériences, Nichols et Tear obtinrent des ondes dont la longueur d'onde descendait jusqu'à $1^{mm},8$; plus tard, ils descendirent au-dessous du millimètre, et, en réduisant à 1/10 de millimètre le diamètre et la longueur des cylindres de tungstène, ils atteignirent une longueur d'onde de $0^{mm},22$. Ils mesurèrent d'autre part, avec le même interféromètre et le même radiomètre, la longueur d'onde des ondes infra-rouges émises par l'arc au mercure à enveloppe de quartz, et retrouvèrent la valeur $0^{mm},32$ donnée par Rubens et Bayer.

Ainsi leurs expériences ont réalisé de façon définitive la jonction entre les radiations hertziennes et les radiations optiques, et, en les rapprochant de celles d'Holweck (§ 396), nous pouvons dire aujourd'hui que *nous savons réaliser et étudier des ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde varie de façon continue du centième d'angström (rayons γ) jusqu'à quelques dizaines de kilomètres (ondes longues de la télégraphie sans fil).*

SEPTIÈME PARTIE

LES BASES EXPÉRIMENTALES DES THÉORIES MODERNES

CHAPITRE XXXII

GÉNÉRALITÉS SUR LES THÉORIES ÉLECTRONIQUES

I. — COURANTS DE CONVECTION

339. — Champ magnétique d'un courant de convection circulaire. — Nous avons insisté, à plusieurs reprises (§ 130), lors de l'étude des courants électriques, sur le fait que les courants qui résultent de l'action sur un circuit fermé des différences de potentiel de contact ou des forces électromotrices d'induction étaient identiques à ceux que produit le passage dans un conducteur de la charge électrique d'un condensateur. Nous avons également signalé que la propriété essentielle d'un courant électrique, la production d'un champ magnétique, avait pu être observée sur les courants de convection, obtenus en déplaçant des supports matériels sur lesquels est maintenue une charge électrique.

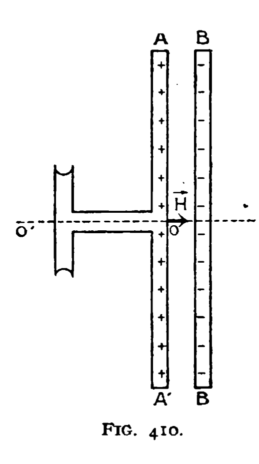


FIG. 410.

Pour obtenir un mouvement rapide, on est naturellement conduit à employer un disque circulaire AA′ tournant autour d'un axe OO′ (*fig.* 410) ; pour que sa charge soit assez forte, on est conduit à le prendre conducteur, et à le placer en face d'un second disque métallique fixe BB′. Les deux disques forment les deux armatures d'un condensateur : si leur distance est e, et si l'on établit entre eux une différence de potentiel égale à V, la densité superficielle électrostatique à la surface de chaque plateau est $\sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{4\pi e}$ Nous admettrons que, lorsqu'on met le disque AA′ en mouvement, les charges superficielles qu'il porte se meuvent avec lui comme si elles étaient fixées à sa surface, et que les charges du plateau BB′ ne sont pas entraînées dans ce mouvement : la justification de ces hypothèses résulte de l'accord des résultats

qu'elles permettent de prévoir avec les résultats expérimentaux. On a d'ailleurs vérifié que les résultats n'étaient pas modifiés lorsque les disques étaient divisés en secteurs isolés par des fentes radiales.

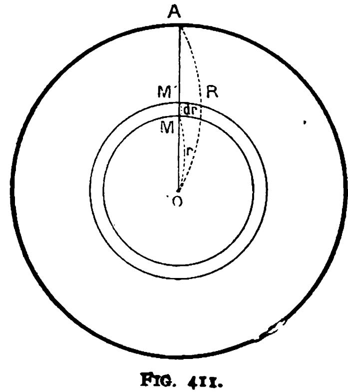


FIG. 411.

Considérons sur le disque mobile une couronne circulaire, comprise entre deux circonférences de rayons r et $r + dr$ (*fig.* 411). Sa surface est $2\pi r\, dr$, et elle porte une charge $q = 2\pi r\, \sigma\, dr$; si le disque fait ν tours par seconde, cette charge traverse ν fois par seconde un élément de droite MM'. La couronne est équivalente à un courant circulaire, dont l'intensité a pour valeur $di = \nu q = 2\pi r \nu \frac{\varepsilon_0 V}{4\pi e} dr = \frac{\varepsilon_0 \nu r V}{2e} dr$; elle crée en O un champ magnétique dirigé suivant O'O, dont l'intensité, dans un système d'unités satisfaisant à la relation de coordination $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$, a pour valeur $dH = \frac{2\pi\, di}{r} = \frac{\pi \varepsilon_0 \nu V}{e} dr$: l'ensemble des courants équivalents aux différentes couronnes circulaires crée en O un champ total :

$$H = \int_0^R dH = \frac{\pi \varepsilon_0 \nu V R}{e}.$$

Supposons que l'on ait $R = 20$ centimètres, $e = 1$ centimètre, $\nu = 125$ tours-sec., $V = 6.000$ volts ; calculons en u. é. m. ($V = 6 . 10^{11}$, $\varepsilon_0 = 1/c^2 = 1/9 . 10^{20}$). Le champ est :

$$H = \frac{3,14 \times 125 \times 6 . 10^{11} \times 20}{9 . 10^{20}} = 5,2 . 10^{-6} \text{ gauss.}$$

Ce champ représente 1/40.000 du champ magnétique terrestre ($\mathcal{H} = 0,2$ gauss) ; il est faible, mais est encore décelable à l'aide d'un magnétomètre : la déviation $\alpha = H / \mathcal{H}$ sera de 5'', et correspondra, sur une échelle à 2 mètres, à un déplacement du spot d'un dixième de millimètre. On peut d'ailleurs facilement le doubler en plaçant un disque mobile de chaque côté du magnétomètre, et le doubler encore une fois en mesurant la déviation que l'on obtient en changeant le sens de la différence de potentiel V, c'est-à-dire en changeant le signe des charges des plateaux mobiles et par conséquent le sens des courants équivalents ; enfin on peut augmenter la sensibilité en remplaçant l'aiguille du magnétomètre par un équipage astatique.

340. Expériences. — Dans les expériences de Rowland (1876), les deux disques mobiles AA' et $A_1A'_1$ (*fig.* 412) sont en ébonite dorée, et les deux disques fixes BB' et $B_1B'_1$ sont en verre doré ; les deux condensateurs sont munis d'anneaux de garde DD' et $D_1D'_1$. L'équipage mobile est formé par un système astatique *ns*, *n's'*, dont l'aimant supérieur est placé assez au-dessus des disques pour n'être pas soumis au champ magnétique que crée leur mouvement ; il est suspendu à un fil de cocon et est enfermé dans une cage de cuivre TT', destinée

à le protéger contre les courants d'air et contre les phénomènes d'influence électrostatique. On mesure l'angle dont il dévie quand on renverse le sens de la différence de potentiel établie entre les plateaux mobiles et les plateaux fixes ; cette différence de potentiel, obtenue par une batterie de petits accumulateurs, est mesurée par un électromètre absolu, et la vitesse est mesurée par un compteur de tours.

La déviation de l'équipage astatique ne mesure qu'en valeur relative le champ magnétique auquel est soumis l'aimant *ns* : pour le connaître en gauss, on étalonne l'appareil en faisant passer un courant connu dans des bobines CC', $C_1C'_1$, dont les dimensions et les distances à l'aimant sont connues.

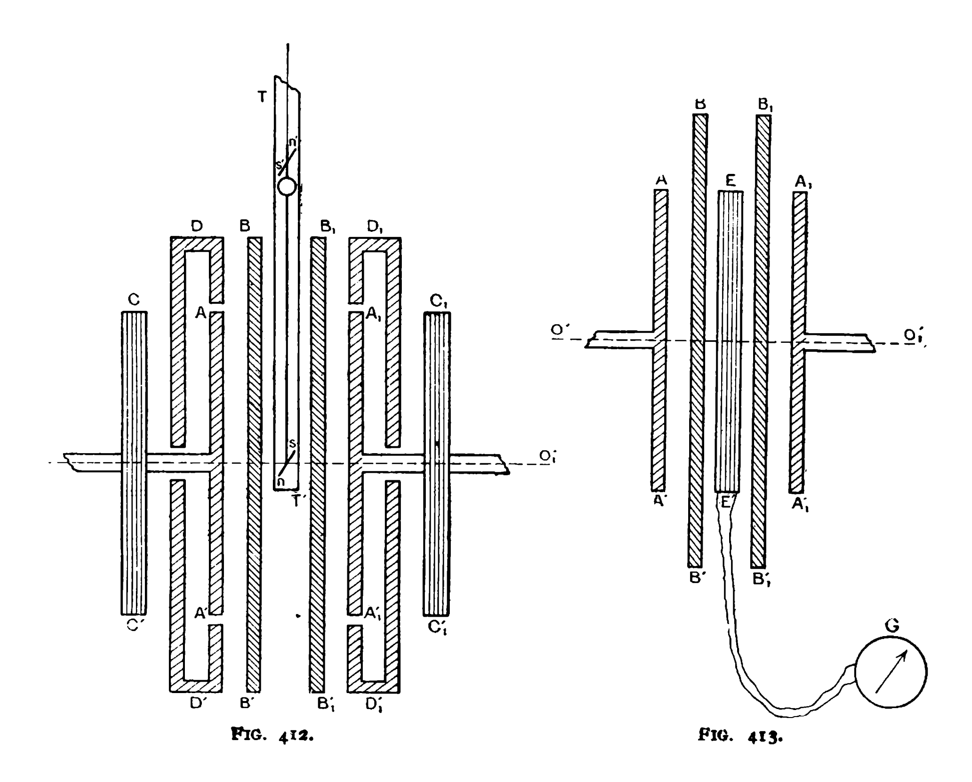


FIG. 412. FIG. 413.

L'équipage mobile de l'appareil de Rowland est en somme identique à celui d'un galvanomètre sensible : on rendra évidemment l'emploi de ce galvanomètre plus commode en l'écartant des parties de l'appareil qui tournent rapidement et qui sont portées à un potentiel élevé. Dans les expériences de Crémieu et Pender (1903), on mesure le champ magnétique entre les disques à l'aide des courants induits par le renversement de ce champ dans une bobine EE' contenant 1.300 tours de fil fin (*fig.* 413) ; cette opération est effectuée 20 fois par seconde par un commutateur tournant, qui renverse le sens de la différence de potentiel entre les disques, et qui redresse en même temps les courants induits, de façon qu'ils parcourent tous dans le même sens le

galvanomètre G. Ce galvanomètre est un galvanomètre très sensible de Lord Kelvin, à longue période, qui subit une déviation constante ; on étalonne encore l'appareil à l'aide des bobines CC', $C_1C'_1$ (*fig.* 412).

Les déviations obtenues dans ces expériences ont coïncidé avec les déviations prévues avec une approximation de l'ordre de 2 o/o. C'est un résultat que l'on doit considérer comme très satisfaisant, étant données la petitesse des champs magnétiques à mesurer et la difficulté des expériences, et l'on peut en conclure que *le champ magnétique, créé par des conducteurs chargés qui se déplacent, est identique au champ magnétique créé par des conducteurs parcourus par des courants*. On admet aujourd'hui que, dans tous les cas, le champ magnétique est effectivement créé par des charges électriques qui se déplacent, et on interprète les courants de conduction par le déplacement, à l'intérieur du conducteur, de particules électrisées dont les trajectoires sont les lignes de courant.

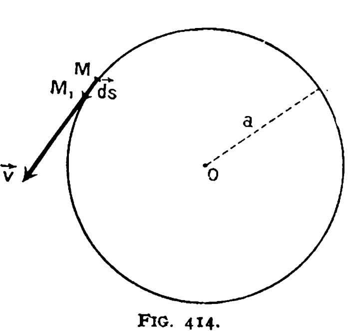


FIG. 414.

341. Champ magnétique créé par une particule en mouvement. — Reprenons la couronne circulaire de rayon a et de largeur infiniment petite dont nous avons déjà calculé le champ au § 339 ; si nous désignons par λ sa charge par unité de longueur, et par ν le nombre de tours qu'elle effectue par seconde, elle est équivalente à un courant d'intensité $i = 2\pi a\lambda\nu$. Le champ magnétique qu'elle crée en un point P quelconque peut être calculé par la loi de Biot et Savart : un élément $MM_1 = ds$ (*fig.* 414) crée un champ égal à $\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r} \wedge i\,\overrightarrow{ds}$. Exprimons le vecteur $i\,\overrightarrow{ds}$ qui entre dans cette formule en fonction de la charge $q = \lambda\, ds$ de l'élément et de sa vitesse $v = 2\pi a\nu$; comme le vecteur vitesse $\vec{v}$ a la même direction $\overrightarrow{MM_1}$ que le vecteur $\overrightarrow{ds}$, on a :

$$i\,\overrightarrow{ds} = 2\pi a\lambda\nu\,.\,\overrightarrow{ds} = 2\pi a\nu\,.\,\lambda\,\overrightarrow{ds} = q\vec{v}.$$

Le champ magnétique créé par une charge électrique q, se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$, et faisant partie d'un courant fermé, peut être calculé, en unités électromagnétiques, par la loi de Biot et Savart, en y remplaçant le vecteur $i\,\overrightarrow{ds}$ par le vecteur $q\vec{v}$.

Considérons maintenant une particule électrisée unique M portant une charge e et se déplaçant dans le vide avec une vitesse $\vec{v}$: le raisonnement précédent n'est plus applicable, puisque la loi de Biot et Savart n'a de sens que pour des circuits fermés (§ 188). La particule électrisée en mouvement constitue à chaque instant un élément de courant ouvert, qu'on doit considérer comme fermé par des courants de déplacement répartis dans tout l'espace :

elle produit en un point P (*fig.* 415) un champ électrique $\vec{E} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{r}$, et un courant de déplacement $\vec{i} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Le phénomène qui produit le champ est symétrique par rapport au plan MCP défini par la vitesse $\vec{v}$ et le point P, le champ magnétique doit être symétrique par rapport à ce plan, c'est-à-dire lui être perpendiculaire ; les lignes de force magnétiques sont des circonférences ayant pour axe le vecteur $\vec{v}$, et l'intensité du champ est la même en tous les points d'une de ces circonférences Γ. Appliquons le théorème d'Ampère à la circonférence Γ ; on a :

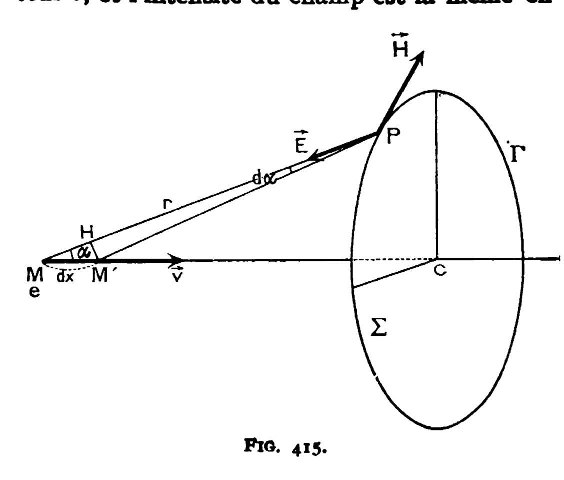


Fig. 415.

$$\int_\Gamma \vec{H}\vec{ds} = 4\pi\iint_\Sigma \vec{i}\vec{dS}.$$

Désignons par r la distance MP, par α l'angle de $\overrightarrow{MP}$ et de $\vec{v}$: le rayon de la circonférence Γ est $r\sin\alpha$ et la circulation du champ magnétique le long de cette circonférence est $2\pi r\text{H}\sin\alpha$.

D'autre part on sait que le flux du champ électrique $\vec{E}$ produit par la charge e à travers la surface Σ limitée par la circonférence Γ, vue du point M sous l'angle solide $\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$, est $e\Omega/\varepsilon_0$ (§ 15) ; le courant total à travers la surface Σ est :

$$4\pi\iint_\Sigma \vec{i}\vec{dS} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma \vec{E}\vec{dS} = e\frac{d\Omega}{dt} = 2\pi e\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}.$$

A un déplacement dx de la particule correspond une variation $d\alpha$ de l'angle α qu'on évalue immédiatement sur la figure 415 ; on a :

$$\text{M'H} = dx\sin\alpha = r\,d\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\alpha}{dt} = v\frac{\sin\alpha}{r}.$$

Finalement, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$2\pi r\text{H}\sin\alpha = 2\pi ev\frac{\sin^2\alpha}{r}, \qquad \text{ou} \qquad \text{H} = \frac{ev\sin\alpha}{r^2}.$$

Le champ au point P *est perpendiculaire au plan défini par la vitesse* $\vec{v}$ *et la droite* MP ; *son intensité est* $\text{H} = \frac{ev\sin\alpha}{r^2}$; *il est dirigé vers la gauche de*

l'observateur d'Ampère placé suivant la vitesse $\vec{v}$ *si la charge e est positive, vers sa droite si la charge e est négative :* c'est ce dernier cas qui est représenté par la figure 415, le champ étant dirigé d'avant en arrière par rapport au plan de la figure.

On peut résumer cet énoncé en disant que : *le champ magnétique créé par une particule électrisée en mouvement est encore donné par la loi de Biot et Savart en y remplaçant le vecteur* $\vec{ids}$ *par le vecteur* $\vec{ev}$; on a :

$$\vec{H} = \vec{\text{grad}}\, \frac{1}{r} \wedge \vec{ev}.$$

II. — *MOUVEMENT D'UNE PARTICULE ÉLECTRISÉE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE OU DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE*

342. Action d'un champ électrique : application du théorème des forces vives. — Si une particule électrisée, dont la charge est e, est placée dans un champ électrique $\vec{E}$, elle est soumise à une force électrostatique :

$$\vec{f} = e\vec{E}.$$

Lorsqu'elle se déplace dans le vide d'un point M_1 où le potentiel est V_1 en un point M_2 où le potentiel est V_2, cette force fournit un travail :

$$\mathcal{C} = e\,(V_1 - V_2).$$

Si la masse de la particule est m, sa vitesse passe, d'après le théorème des forces vives, d'une valeur v_1 à une valeur v_2 liées par la relation :

$$\frac{1}{2}\, m\,(v_2^2 - v_1^2) = \mathcal{C} = e\,(V_1 - V_2).$$

Nous verrons (§ 349) qu'il existe une catégorie importante de particules électrisées chargées négativement, les électrons, qui sont caractérisées par une valeur du rapport e / m égale à $1{,}76 \cdot 10^7$ u. é. m. *La vitesse v d'un électron peut être mesurée par la différence de potentiel* V *qui est nécessaire pour lui communiquer cette vitesse ;* en faisant dans la relation précédente $v_1 = 0$, $v_2 = v$, $V_1 - V_2 = V$, on obtient :

$$v^2 = 2\,\frac{e}{m}\,V, \qquad V = \frac{1}{2}\,\frac{m}{e}\,v^2.$$

Nous verrons (chap. XXXV) comment on peut obtenir des *rayons cathodiques*, qui sont constitués par des électrons animés de grandes vitesses. Entre deux électrodes A et C, placées dans un tube où existe un vide presque parfait (*fig.* 416), on établit une différence de potentiel élevée V à l'aide d'une bobine d'induction ou d'une machine électrostatique : des électrons sortent de la

cathode C, sont attirés par l'anode A, et l'atteignent avec une vitesse v qu'on peut calculer par la relation ci-dessus. Si on a V = 40.000 volts = 4.10^{12} u. é. m., on a $v^2 = 2 . 1{,}76 . 10^7 . 4 . 10^{12} = 1{,}42 . 10^{20}$ et $v = 1{,}2 . 10^{10}$ cm / sec. = 120.000 km/sec. ; on a pu, avec des différences de potentiel de l'ordre de 250.000 volts, obtenir des vitesses qui se rapprochent de la vitesse de la lumière, et lui sont inférieures de moins de 1/10 de sa valeur.

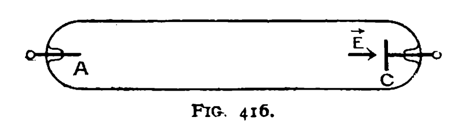


FIG. 416.

343. Hypothèse des quanta et relation d'Einstein. — Dans certains cas, l'arrêt brusque d'un électron peut provoquer, directement ou indirectement, l'émission d'un rayonnement électromagnétique monochromatique, soit qu'il s'agisse d'un rayonnement lumineux (émission d'un spectre de raies par les gaz traversés par une décharge électrique, § 367), soit qu'il s'agisse de rayons X, c'est-à-dire d'un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde (production des rayons X, § 383). Dans d'autres cas, l'arrêt par une surface métallique d'un rayonnement électromagnétique peut être accompagné de l'émission d'électrons, soit qu'il s'agisse d'un rayonnement lumineux (effet photoélectrique, § 355), soit qu'il s'agisse de rayons X (rayons cathodiques secondaires, § 394).

Dans le premier cas, l'énergie cinétique $W = \frac{1}{2} mv^2$ que possédait l'électron arrêté est transformée en énergie rayonnante électromagnétique ; dans le second cas, c'est au contraire l'énergie rayonnante électromagnétique qui est transformée en énergie cinétique. Dans tous ces phénomènes, on admet que l'énergie est échangée d'une façon discontinue : lorsqu'il y a apparition ou disparition d'un rayonnement de fréquence ν et de longueur d'onde $\lambda = c / \nu$, l'énergie échangée entre le rayonnement et la matière est un nombre entier de **quanta** d'énergie ; le quantum d'énergie a pour valeur $h\nu$, la quantité h étant une constante universelle égale à $6{,}61 . 10^{-27}$ C. G. S. C'est ainsi que l'arrêt d'un électron de masse m, correspondant à une disparition d'énergie cinétique $\frac{1}{2} mv^2 = eV$, provoque l'apparition d'un quantum $h\nu$ d'énergie rayonnante, et le principe de la conservation de l'énergie se traduit par la **relation d'Einstein :**

$$eV = \frac{1}{2} mv^2 = h\nu = h \frac{c}{\lambda}.$$

L'importance de cette relation provient du fait qu'elle relie un grand nombre de phénomènes différents ; elle est en général vérifiée par l'expérience avec une assez bonne approximation. Elle serait d'ailleurs intéressante, même si elle ne donnait que l'ordre de grandeur de la fréquence ν du rayonnement correspondant à l'arrêt d'un électron de vitesse v donnée, ou l'ordre de grandeur de la vitesse d'expulsion v d'un électron correspondant à l'absorption d'un rayonnement de fréquence ν donnée ; il est certain qu'on pourra toujours la considérer comme une première approximation, quitte à la compléter par d'autres termes, représentant par exemple l'énergie cinétique conservée par l'électron

après son arrêt, ou l'énergie nécessaire pour l'extraire avec une vitesse nulle de la matière où il était engagé.

Nous verrons (§ 350) que la charge e de l'électron est égale à 1, 6.10⁻²⁰ u. é. m. environ. A un potentiel V de l'ordre de 5 volts (5. 10⁸ u. é. m.) correspond une longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{hc}{eV} = \frac{6{,}61 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{1{,}6 \cdot 10^{-20} \cdot 5 \cdot 10^{8}}$$

de l'ordre de 2, $5 \cdot 10^{-5}$ cm = 2.500 angströms, appartenant au spectre ultraviolet ; à un potentiel de l'ordre de 40.000 volts correspond une longueur d'onde de 0,3 angströms, appartenant au spectre de rayons X.

344. Action d'un champ électrique uniforme. — Lorsqu'une particule électrisée, portant une charge e, se déplace dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$, elle est soumise à une force constante $\vec{f} = e\vec{E}$; les équations de son mouvement sont les mêmes que celles du mouvement d'un corps pesant dans un champ de pesanteur uniforme : *la trajectoire est une parabole, dont l'axe est parallèle au champ* $\vec{E}$.

Supposons que des particules électrisées soient lancées dans le vide suivant une droite Ox avec une vitesse initiale v, et qu'elles passent entre les plateaux PP′ d'un condensateur de longueur l (*fig.* 417). Lorsque le condensateur n'est pas chargé, leur trajectoire est rectiligne, et elles viennent frapper en un point A un écran AB perpendiculaire à Ox, situé à une distance D du milieu O′ du condensateur.

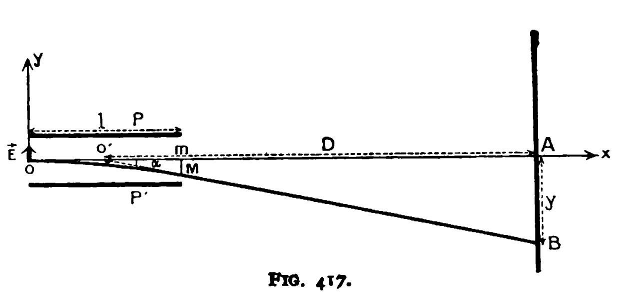


FIG. 417.

Lorsqu'on établit une différence de potentiel entre les plateaux PP′, la particule est soumise, pendant la traversée du condensateur, à une force constante Ee, perpendiculaire à Ox ; elle décrit une parabole OM de sommet O, tangente à Ox en O ; si nous admettons que le champ cesse brusquement à l'extrémité des plateaux, elle décrit ensuite une droite MB, tangente en M à la parabole, et vient rencontrer l'écran en B ; on sait d'ailleurs que la tangente en M à la parabole rencontre la tangente au sommet Ox au milieu O′ de Om.

Si la masse de la particule est m, son accélération, dirigée en sens inverse de $\vec{E}$ si la charge e est négative, est $\gamma = \frac{Ee}{m}\cdot$ La composante de sa vitesse suivant Ox reste constante et égale à v : la particule atteint le point M au bout d'un temps $t = \frac{l}{v}$; pendant ce temps, la composante de sa vitesse suivant Oy a acquis une valeur $v_y = \gamma t = \frac{Eel}{mv}\cdot$ La tangente en M à la parabole fait avec

l'axe Ox un angle α donné par tang $\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{\mathrm{E}el}{mv^2}$, et la **déviation électrique** $y = \mathrm{AB}$ est donnée par :

$$y = \mathrm{D} \text{ tang}\alpha = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \mathrm{E}l\mathrm{D}.$$

Supposons par exemple que les particules soient des électrons de vitesse $v = 50.000$ km / sec. $= 5 . 10^9$ C. G. S., pour lesquels le rapport e / m est égal à $1,76 . 10^7$ u. é. m. ; prenons $l = 10$ centimètres, D $= 50$ centimètres, E $= 100$ volts/cm $= 10^{10}$ u. é. m. On a :

$$y = \frac{1}{25 . 10^{18}} \cdot 1,76 . 10^7 . 10^{10} . 10 . 50 = 3,5 \text{ cm. environ.}$$

345. Action d'un champ magnétique uniforme. — De même qu'une particule électrisée de charge e et de vitesse $\vec{v}$ crée un champ magnétique, que l'on peut calculer par la loi de Biot et Savart en y remplaçant le vecteur $\overrightarrow{ids}$ par le vecteur $\overrightarrow{ev}$, de même cette particule, placée dans un champ magnétique $\vec{\mathrm{H}}$, est soumise à une force $\vec{f}$, qu'on peut calculer par la loi de Laplace, en y remplaçant le vecteur $\overrightarrow{ids}$ par le vecteur $\overrightarrow{ev}$. On a :

$$\vec{f} = \overrightarrow{ev} \wedge \vec{\mathrm{H}}.$$

La force $\vec{f}$ a pour grandeur en unités électromagnétiques $f = ev\mathrm{H} \sin \alpha$; elle est perpendiculaire au plan défini par les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\mathrm{H}}$; elle est dirigée vers la

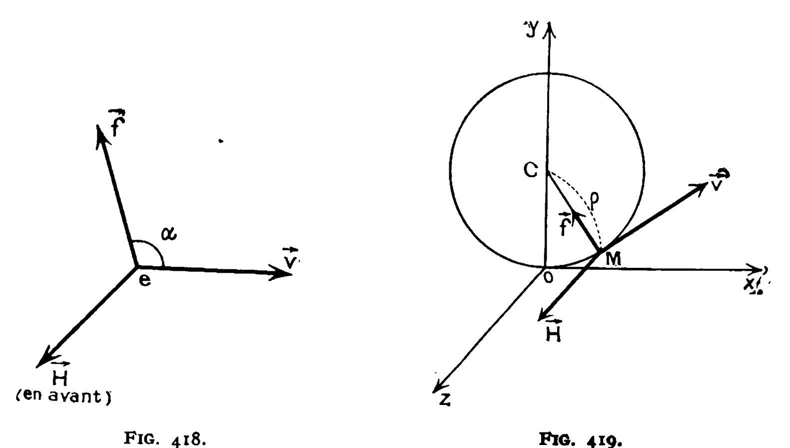


FIG. 418. FIG. 419.

gauche d'un observateur placé suivant la vitesse et regardant dans la direction du champ, si la charge e est positive ; vers sa droite si la charge e est négative (*fig.* 418 : e est négatif, $\vec{v}$ et $\vec{f}$ sont dans le plan de la figure, $\vec{\mathrm{H}}$ en avant).

Supposons qu'une particule électrisée soit lancée avec une vitesse v suivant une direction Ox, dans un champ magnétique uniforme H, de direction Oz perpendiculaire à Ox (*fig.* 419). La force $\vec{f}$, perpendiculaire au vecteur $\vec{H}$, est toujours située dans le plan xOy, perpendiculaire à Oz, qui contient la vitesse initiale : la trajectoire est une trajectoire plane du plan xOy. En un point quelconque M la force, et l'accélération, normales à la vitesse $\vec{v}$, sont normales à la trajectoire : la vitesse $\vec{v}$ conserve une grandeur v constante. La vitesse $\vec{v}$, située dans le plan xOy, est toujours normale au champ $\vec{H}$: la force $\vec{f}$ a une grandeur constante $f = ev\text{H}$, et l'accélération, normale à la trajectoire, a la valeur constante $\gamma = \frac{f}{m} = \frac{ev\text{H}}{m}$; si nous désignons par ρ le rayon de courbure de la trajectoire au point M, l'accélération normale est $\frac{v^2}{\rho}$: le rayon de courbure est constant, et *la trajectoire est une circonférence, de rayon :*

$$\rho = \frac{v^2}{\gamma} = v \cdot \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{\text{H}}.$$

Si la particule est un électron, de vitesse $v = 50.000$ km / sec $= 5.10^9$, de rapport $e / m = 1{,}76.10^7$, soumis à un champ magnétique H $= 100$ gauss, le rayon de la circonférence est :

$$\rho = 5 \,.\, 10^9 \frac{1}{1{,}76 \,.\, 10^7} \cdot \frac{1}{100} = 2{,}8 \text{ cm}.$$

Il est possible de réaliser, à l'aide de bobines, un champ d'une centaine de gauss uniforme dans un cercle de plusieurs centimètres de rayon ; on a effectivement pu photographier des rayons cathodiques enroulés suivant des trajectoires fermées circulaires (Villard).

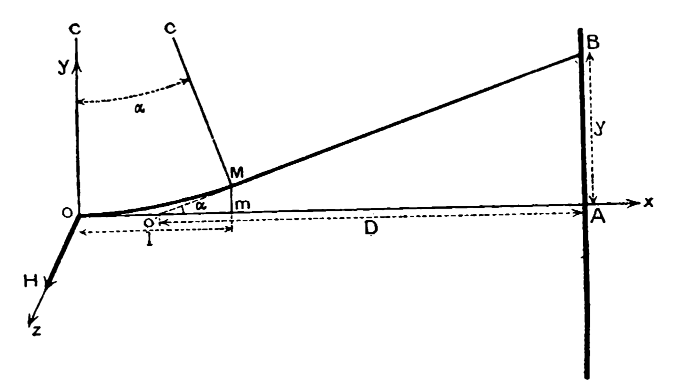


FIG. 420.

Si le champ magnétique est créé par une petite bobine, et n'agit que sur une longueur l assez courte, la trajectoire se compose d'un arc de circonférence

OM de rayon ρ et de sa tangente MB (*fig.* 420). Si la déviation α est assez petite, on peut admettre que la longueur de l'arc OM est égale à l ; l'angle des deux rayons OC et MC est $\alpha = \frac{l}{\rho} = \frac{leH}{vm}$; la tangente MB rencontre la tangente à l'origine Ox en un point O′ qui est très sensiblement le milieu de Om, et la **déviation magnétique** y = AB sur un écran situé à une distance D de O′ est :

$$y = D \, . \, \alpha = \frac{1}{v} \cdot \frac{e}{m} \cdot HlD.$$

346. Mesure de la vitesse v et du rapport e / m. — L'action d'un champ électrique sur une particule électrisée permet, soit en mesurant le potentiel V qui a servi à la lancer, soit en mesurant la déviation électrique produite par un champ E connu, de déterminer la quantité $\frac{1}{v^2} \cdot \frac{e}{m}$. L'action d'un champ magnétique connu H permet, soit en mesurant le rayon ρ des trajectoires circulaires, soit en mesurant la déviation magnétique, de déterminer la quantité $\frac{1}{v} \cdot \frac{e}{m}$. *L'action simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique sur une même particule permet par suite de déterminer les deux quantités e / m et v.*

Des dispositifs très variés ont été imaginés pour réaliser l'expérience; nous n'en citerons qu'un, qui a été appliqué par J.-J. Thomson à l'étude des rayons cathodiques (§ 378) et des rayons positifs (§ 381). Les particules, lancées suivant une direction Ox (*fig.* 421), sont soumises simultanément à l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{H}$ parallèles, de direction Oy; le

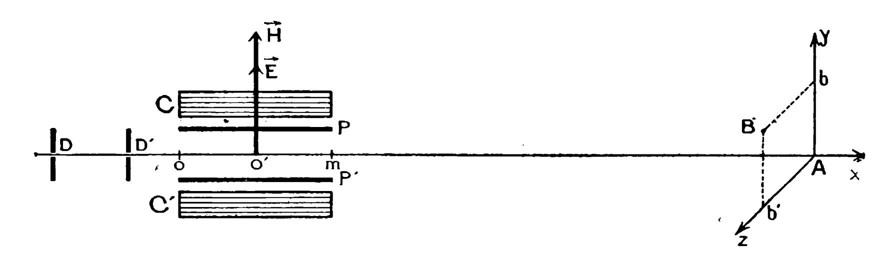


FIG. 421.

condensateur PP′ et les bobines CC′ qui produisent les deux champs sont disposés de façon qu'ils agissent sur la même longueur Om = l ; on reçoit les particules sur un écran AB perpendiculaire à Ox, placé à une distance D du milieu O′ de Om. Si le champ électrique agissait seul, les particules rencontreraient l'écran en un point b, et l'on aurait une déviation électrique y = Ab; si le champ magnétique agissait seul, on aurait une déviation magnétique z = Ab', perpendiculaire à la première ; lorsque les deux champs agissent simultanément, les deux déviations se superposent, et les particules rencontrent l'écran en un point B, dont les coordonnées par rapport aux deux axes Ab et Ab' sont

y et *z*. D'après les formules des paragraphes précédents, on a :

$$y = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \mathrm{E}l\mathrm{D}, \qquad z = \frac{1}{v} \cdot \frac{e}{m} \cdot \mathrm{H}l\mathrm{D}.$$

On en tire :

$$v = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}} \cdot \frac{z}{y}, \qquad \frac{e}{m} = \frac{1}{l\mathrm{D}} \cdot \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}^2} \cdot \frac{z^2}{y}.$$

On déduit la valeur de E de la mesure de la différence de potentiel entre les plateaux PP′, et la valeur de H de la mesure du courant qui parcourt les bobines CC′. On détermine les valeurs de *y* et de *z* par l'enregistrement des points d'impact sur une plaque photographique : on enregistre d'abord les points d'impact sans aucun champ, puis avec chacun des deux champs agissant séparément, de façon à tracer sur la plaque, par les points A, *b* et *b′*, les deux axes O*y* et O*z* par rapport auxquels on doit mesurer les coordonnées du point B que donne l'expérience définitive.

Le faisceau des particules est délimité par deux diaphragmes étroits DD′ qu'il doit traverser avant de pénétrer dans la région O*m*; s'il est homogène, c'est-à-dire composé de particules identiques entre elles et ayant toutes même vitesse, on obtient un point unique B ; s'il se compose de particules différentes et animées de vitesses différentes, on obtient une série de points B, ou plutôt, comme la vitesse varie toujours d'une façon continue, une série de courbes. Les valeurs de *e* / *m* et de *v* correspondant à chaque point peuvent être déterminées avec une précision de l'ordre du centième.

III. — *LA CHARGE ÉLÉMENTAIRE ET L'ÉLECTRON*

347. La charge élémentaire. — Lors de l'étude de l'électrolyse (§ 163), nous avons remarqué que la loi de Faraday, jointe à l'hypothèse fondamentale de la théorie atomique, entraînait la conséquence qu'un ion électrolytique quelconque portait une charge électrique égale à un multiple entier simple d'une charge élémentaire **e**. Nous avons calculé cette charge élémentaire à partir de la quantité d'électricité — 9649 u. é. m. — transportée par un atome-gramme monovalent, et du nombre N d'atomes contenu dans un atome-gramme d'un élément quelconque; en admettant pour le nombre d'Avogadro N la valeur $6 \,.\, 10^{23}$ donnée par la théorie cinétique des gaz, nous avons trouvé $\mathbf{e} = 1{,}6 \,.\, 10^{-20}$ u. é. m.

Nous verrons dans un prochain chapitre que les gaz peuvent être rendus conducteurs, et que le passage du courant dans les gaz doit être expliqué par un mécanisme analogue à celui du passage du courant dans les électrolytes : les gaz conducteurs contiennent des ions, c'est-à-dire des centres chargés. La charge **e** des ions gazeux a pu être déterminée expérimentalement (§ 363), et, dès les premières déterminations, on obtint des valeurs très voisines de celle de la charge des ions électrolytiques : les mesures de J.-J. Thomson (1898) donnèrent $\mathbf{e} = 2{,}2 \,.\, 10^{-20}$ u é. m., puis $\mathbf{e} = 1{,}1 . 10^{-20}$ (1903), celles de H.-A. Wilson (1903) $\mathbf{e} = 1{,}0 \,.\, 10^{-20}$ u. é. m.

Ces mesures étaient encore peu précises; comme d'autre part la théorie ciné-

tique des gaz ne donne guère qu'à 10 o/o près la valeur du nombre d'Avogadro N, on peut en déduire que la charge d'un ion gazeux est égale à la charge élémentaire d'un ion électrolytique. De même, la mesure de la charge portée par les particules qui constituent les rayons α des substances radioactives a montré que chacune d'elles porte la même charge qu'un ion électrolytique divalent (§ 400). De même encore, les valeurs du rapport e/m trouvées pour les rayons positifs ont conduit à supposer que les particules qui les composent sont des atomes ou des molécules du gaz où ils se produisent, portant une ou deux charges égales à celle de l'ion électrolytique.

Le seul fait qu'on n'ait jamais observé de charges d'un ordre de grandeur inférieur à celui de la charge d'un ion électrolytique monovalent conduit à supposer qu'elles ne peuvent pas exister et que l'électricité possède une structure discontinue : de même que la matière se compose d'atomes insécables, et qu'une quantité quelconque d'un élément chimique contient un nombre entier de ces atomes, de même *l'électricité est constituée par des charges élémentaires indivisibles, et une quantité quelconque d'électricité contient un nombre entier de ces charges élémentaires*. Cette hypothèse est aujourd'hui généralement admise : les expériences de Millikan (1908), que nous allons décrire maintenant, en fournissent une démonstration directe.

348. Expériences de Millikan. — On considère, dans le champ électrique vertical uniforme E qui existe entre les deux plateaux d'un condensateur plan horizontal, une très petite goutte d'un liquide non volatil, tel que de l'huile, dont le rayon est de l'ordre du micron. On l'éclaire vivement par un faisceau lumineux intense, et on l'observe latéralement à l'aide d'un microscope à oculaire micrométrique : elle y apparaît comme un point brillant, grâce à la lumière qu'elle diffracte.

La goutte est presque toujours chargée par le seul fait des frottements qu'elle subit lors de sa formation ; si sa charge est e, la force électrostatique qui s'exerce sur elle est $\mathrm{E}e$: nous supposerons cette force dirigée vers le haut, de sorte que, si le poids de la goutte est mg, la force totale qui s'exerce sur elle, comptée positivement vers le bas, est $f = mg - \mathrm{E}e$. A cause de la résistance qu'oppose à son mouvement le gaz qui remplit le condensateur, la goutte tombe très lentement : elle prend une vitesse de chute v, qui est proportionnelle à la force f. Désignons par v_0 la vitesse de chute quand on supprime le champ électrique : elle correspond à la force $f_0 = mg$, et l'on a :

$$\frac{v}{v_0} = \frac{f}{f_0} = \frac{mg - \mathrm{E}e}{mg}, \qquad \frac{e}{m} = \frac{g}{\mathrm{E}}\left(1 - \frac{v}{v_0}\right).$$

Il est facile de mesurer les vitesses de chute v_0 et v. On peut laisser la goutte tomber de haut en bas du champ du microscope, établir un champ E assez fort pour qu'elle remonte, le supprimer lorsqu'elle arrive en haut, et ainsi de suite, de sorte qu'on peut suivre le mouvement de la même goutte pendant plusieurs heures, et faire des centaines de pointés, dont les moyennes permettent de calculer le rapport e/m avec une précision de l'ordre de 1/1000.

Pour connaître la valeur de la charge e, il faut connaître la valeur de la masse m, ou, comme la densité de la matière qui constitue la goutte est con-

nue, la valeur de son rayon. On la déduit de la vitesse de chute v_0 par l'application des lois de la viscosité des gaz : l'application de ces lois au mouvement de sphères de très petits rayons entraîne certainement des erreurs qu'il est difficile d'évaluer, et la valeur absolue de e est toujours déterminée avec beaucoup moins de précision que le rapport e / m.

Les expériences de Millikan ont été répétées très souvent, avec des gouttes liquides ou des grains solides de différentes substances et de différentes dimensions, suspendues dans différents gaz, à la pression atmosphérique ou à des pressions plus basses. *Les valeurs trouvées pour e sont toujours des multiples entiers de la charge élémentaire* e : la charge e contient quelquefois 1 ou 2 charges élémentaires ; elle en contient souvent 3, 4, 5... et même 15 ou 20.

La structure discontinue de l'électricité se manifeste d'une façon particulièrement frappante lorsque la charge de la goutte vient à varier au cours de l'expérience, par suite de la rencontre de la goutte et d'un des centres chargés qui existent toujours dans le gaz : la variation est toujours discontinue, et la charge passe brusquement de p à p' charges élémentaires, la différence $p - p'$ étant presque toujours égale à ± 1. Le rapport des deux charges e et e' de la même goutte peut être déterminé avec une grande précision, puisque sa valeur ne dépend pas de la valeur admise pour la masse m : on trouve toujours qu'il est très exactement égal au rapport des deux nombres entiers p et p'.

Les déterminations récentes du coefficient de viscosité de l'air conduisent pour la charge élémentaire à des valeurs comprises entre $4{,}796$ et $4{,}813 \cdot 10^{-10}$ u. é. s. Il semble qu'on peut admettre, avec une erreur relative inférieure à 1/500 :

$$e = 4{,}803 \cdot 10^{-10} \text{ u. é. s} = 1{,}602 \cdot 10^{-20} \text{ u. é. m}$$

A cette valeur correspond pour le nombre d'Avogadro la valeur :

$$N = \frac{9.649}{1{,}602 \cdot 10^{-20}} = 6{,}022 \cdot 10^{23}.$$

349. L'électron. — Nous avons déjà signalé (§ 342) l'existence des rayons cathodiques, formés de particules électrisées négativement, animées de grandes vitesses. Les mesures du rapport e / m relatives à ces rayons ont toujours donné la même valeur, quelles que soient la nature du gaz dans lequel on les produit, la nature des électrodes et la vitesse des particules : on en conclut que ces particules sont toutes identiques entre elles, et on leur a donné le nom d'**électrons**.

Nous verrons qu'il y a émission de particules chargées négativement lorsque l'on porte un corps à l'incandescence (§ 357), ou lorsqu'on fait tomber, sur la surface d'un métal, des rayons ultra-violets (effet photo-électrique, § 355) ou des rayons X (rayons cathodiques secondaires, § 394) ; nous verrons aussi que les rayons β des substances radioactives sont constitués par des particules négatives animées de grandes vitesses (§ 403). Dans tous ces cas, la mesure du rapport e / m a fourni la même valeur que celle qui caractérise l'électron. Les théories électromagnétiques expliquent l'émission des raies spectrales par l'existence de particules électrisées oscillant à l'intérieur de la source lumineuse ; la mesure du déplacement des raies spectrales lorsque la source est soumise à l'action d'un champ magnétique (phénomène de Zeeman) permet de

montrer que ces particules sont chargées négativement, et de calculer la valeur du rapport e/m qui leur correspond : quelle que soit la nature de l'atome qui produit la raie étudiée, on trouve toujours la même valeur du rapport e/m, et cette valeur est celle qui caractérise l'électron. Voici d'ailleurs quelques-unes des valeurs obtenues expérimentalement :

Rayons cathodiques..............	$1{,}760 . 10^7$ u. é. m.	(Dunnington, 1937)
Électrons photo-électriques........	$1{,}756 . 10^7$	(Alberti, 1912)
Électrons des métaux incandescents.	$1{,}76 . 10^7$	(Dushman, 1914)
Rayons β { du radium............	$1{,}765 . 10^7$	(Schaefer, 1913)
Rayons β { du polonium..........	$1{,}7 . 10^7$	(Sivers, 1906)
Spectres de l'hydrogène (Hα et Dα).	$1{,}758 . 10^7$	(Williams, 1938)
Phénomène de Zeeman...........	$1{,}757 . 10^7$	(Houston, 1934)

Ces nombres ne diffèrent les uns des autres que de quantités inférieures aux erreurs d'expériences; on remarquera d'ailleurs qu'il n'est pas douteux que les électrons émis par les métaux incandescents sont identiques à ceux des rayons cathodiques, car il suffit de les lancer avec une grande vitesse, par l'action d'un champ électrique (tube Cooolidge, § 384), pour obtenir des rayons cathodiques. On doit donc admettre que, *dans tous les phénomènes que nous avons énumérés, les particules obtenues sont des électrons identiques entre eux.* Les expériences les plus récentes et les plus précises conduisent à adopter pour le rapport de leur charge à leur masse la valeur :

$$\frac{e}{m} = 1{,}759 . 10^7 \text{ u. é. m}$$

qui doit être exacte à un millième près.

350. Masse et rayon de l'électron. — Nous admettrons que la charge de l'électron est égale à la charge élémentaire $e = 1{,}602 . 10^{-20}$ u. é. m.; on en déduit pour la valeur de sa masse $m = 1{,}602 . 10^{-20}/1{,}759 . 10^7 = 0{,}911 . 10^{-27}$.

Comparons cette masse à la masse m_H de l'atome d'hydrogène : dans l'électrolyse, l'atome d'hydrogène porte la charge élémentaire e, et le rapport de sa charge à sa masse est $\frac{e}{m_H} = \frac{9649}{1{,}008} = 0{,}958 . 10^4$; le rapport de la masse de l'électron à celle de l'atome d'hydrogène est $\frac{m}{m_H} = \frac{0{,}958 . 10^4}{1{,}759 . 10^7} = \frac{1}{1836}$: *la masse d'un électron est très petite par rapport à celle d'un atome d'hydrogène et* à fortiori *par rapport à celle d'un atome d'un autre élément.*

On assimile en général l'électron à une petite sphère électrisée uniformément. Évaluons toutes les grandeurs en u. é. m. ($\varepsilon_0 = 1/c^2$). En un point M de l'espace, situé à une distance r du centre de l'électron, il existe un champ électrique $\vec{E} = -ec^2 \,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(1/r)$, et, lorsque l'électron est animé d'une vitesse $\vec{v}$, un champ magnétique $\vec{H} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(1/r) \wedge e\vec{v}$; un élément de volume

dV situé au voisinage du point M contient une énergie électrostatique $dW_s = \frac{1}{8\pi c^2} E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \frac{e^2 c^2}{r^4} dV$, indépendante de v, et une énergie électromagnétique $dW_m = \frac{1}{8\pi} H^2 dV = \frac{1}{8\pi} \frac{e^2 v^2 \sin^2 \alpha}{r^4} dV$ proportionnelle à v^2. On évalue l'énergie totale du champ électromagnétique en calculant l'intégrale de ces deux expressions, étendue à tout l'espace extérieur à la sphère de rayon a qu'occupe l'électron : l'énergie électrostatique $W_s = \iiint dW_s$ est indépendante de la vitesse v ; l'énergie électromagnétique $W_m = \iiint dW_m$ est proportionnelle au carré de cette vitesse, et on peut la mettre sous la forme $W_m = \frac{1}{2} \mu v^2$; le calcul donne d'ailleurs $\mu = \frac{2e^2}{3a}$.

Pour faire acquérir à une particule électrisée, primitivement au repos, la vitesse v, il faut emmagasiner dans l'espace qui l'environne une énergie potentielle égale à $\frac{1}{2} \mu v^2$, par conséquent lui fournir un travail représenté par cette expression. Ce travail doit être ajouté à celui qui est emmagasiné, sous forme d'énergie cinétique, par la matière en mouvement : si la particule contient une certaine quantité de matière de masse m_0, il faut lui fournir au total le travail $\mathfrak{T} = \frac{1}{2} (m_0 + \mu) v^2$. Les lois de la Mécanique peuvent être ramenées au principe de la conservation de l'énergie, pris sous la forme du théorème des forces vives $\mathfrak{T} = \frac{1}{2} mv^2$: *pour les appliquer à une particule électrisée, il faut remplacer la masse matérielle m_0 par la masse apparente $m = m_0 + \mu$.*

On admet aujourd'hui que l'*inertie de l'électron est tout entière d'origine électromagnétique :* on le considère en quelque sorte comme un atome d'électricité négative, sans support matériel. Il n'est pas pesant, et on doit prendre $m_0 = 0$. *Sa masse apparente* m, *pour laquelle l'experience fournit la valeur* $0{,}9 \cdot 10^{-27}$, *est égale à sa masse électromagnétique* $\mu = \frac{2e^2}{3a}$. On peut tirer de là la valeur de son rayon :

$$a = \frac{2e^2}{3\mathrm{m}} = 1{,}9 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

Les calculs que nous avons indiqués supposent essentiellement que le champ électrique qui entoure l'électron est entraîné, sans déformation, par son mouvement. Cette hypothèse n'est acceptable que si sa vitesse v est faible par rapport à la vitesse c de la lumière, puisque les perturbations du champ électromagnétique se propagent avec la vitesse c. Le calcul complet a pu être effectué : il montre que la masse apparente correspondant à une vitesse v est plus grande que la masse m que nous venons de calculer et qui correspond à une vitesse infiniment petite. La différence est négligeable tant que la vitesse v n'atteint pas des valeurs de l'ordre du dixième de la vitesse de la lumière,

mais quand v tend vers c, la masse apparente augmente indéfiniment : il faudrait, pour communiquer à l'électron une vitesse égale à celle de la lumière, dépenser un travail infini. Les formules obtenues théoriquement pour la variation de la masse avec la vitesse ont été vérifiées expérimentalement, avec une précision remarquable, par la mesure du rapport e / m, soit pour des rayons cathodiques rapides dont les vitesses ont atteint 150.000 km/sec, soit pour les rayons β des substances radioactives, dont les vitesses peuvent atteindre les 99 centièmes de celle de la lumière.

IV. — *L'ÉLECTRON ET LA MATIÈRE*

351. Constitution des atomes. — Nous avons vu que les électrons peuvent être obtenus dans des phénomènes très variés, et que leurs propriétés sont toujours les mêmes, qu'on considère les rayons cathodiques produits à partir d'un gaz quelconque, les électrons extraits d'un métal par l'action de la chaleur ou d'un rayonnement électromagnétique, ou encore les rayons β provenant des substances radioactives. La possibilité d'obtenir des électrons à partir d'éléments de nature chimique quelconque conduit à admettre que *l'électron est un constituant universel de la matière ;* nous allons indiquer dès maintenant quelles sont les hypothèses fondamentales sur la constitution de la matière qui permettent de grouper et d'interpréter les principaux des phénomènes que nous étudierons dans les prochains chapitres.

On admet qu'un atome quelconque se compose d'un noyau central chargé positivement, autour duquel gravitent un certain nombre d'électrons comme les planètes gravitent autour du soleil. L'atome entier doit être neutre : s'il comporte N électrons portant chacun la charge $-e$, la charge positive du noyau est $+Ne$. C'est la constitution du noyau qui définit la nature chimique de l'élément : si l'atome vient à perdre un des électrons qui gravitent autour du noyau, il devient un ion positif, de charge $+e$; mais il peut capter à nouveau un électron, et reconstituer l'atome primitif, sans modification chimique. On interprète de même la formation des ions négatifs par la fixation d'électrons supplémentaires sur des atomes neutres.

On voit qu'en somme l'électricité positive se confond avec la matière, tandis que l'électricité négative a une existence propre, puisque les électrons n'ont pas de support matériel. Un corps matériel quelconque est formé d'atomes neutres ; il est chargé positivement lorsqu'il a perdu des électrons, négativement lorsqu'il a fixé des électrons supplémentaires ; le transport de l'électricité négative d'un corps A sur un autre corps B s'explique par le passage d'un certain nombre d'électrons de A à B, le transport de l'électricité positive de A à B par le passage d'un certain nombre d'électrons de B à A. Comme le nombre d'électrons qui passent d'un corps à l'autre est toujours un nombre entier, la charge d'un corps est toujours égale à un nombre entier de fois la charge de l'électron.

352. Nombre atomique : isotopes. — Le nombre N, qui représente à la fois le nombre de charges élémentaires que contient le noyau et le nombre des électrons qui gravitent autour de lui dans l'atome neutre, s'appelle le **nombre atomique.** On admet que, lorsqu'on classe les éléments dans l'ordre des poids ato-

miques croissants, le nombre atomique augmente d'une unité quand on passe d'un élément au suivant; plus exactement, *il est égal au numéro d'ordre de la case qu'occupe l'élément dans le tableau périodique de Mendeleeff*. Il est égal à 1 pour l'hydrogène (H = 1), à 2 pour l'hélium (He = 4)..., et à 92 pour le dernier élément, l'uranium (U = 238). Comme la masse de l'électron est petite par rapport à la masse de l'atome d'hydrogène, la masse totale des électrons que contient un atome est toujours petite par rapport à la masse de cet atome, et la masse atomique peut être confondue avec la masse du noyau.

Nous verrons que, dans les phénomènes de radioactivité, il y a modification de la nature chimique de l'élément radioactif; ces transformations radioactives doivent donc s'accompagner d'une modification du noyau. Nous verrons que cette modification consiste dans l'expulsion, soit d'un électron (rayonnement β), soit d'une particule chargée positivement : on est ainsi conduit à admettre que *les noyaux atomiques ont eux-mêmes une constitution complexe, et contiennent à la fois des électrons et des centres positifs* (cf. § 422 *ter*).

L'expulsion d'un de ces éléments, en même temps qu'elle modifie la nature chimique de la substance, modifie la charge du noyau, donc le nombre atomique N. On admet que la *nature chimique d'un élément dépend uniquement du nombre atomique* N. Il peut arriver que deux noyaux atomiques aient la même charge totale, mais que leur constitution, en électrons et en centres positifs, soit différente : ces deux noyaux ont alors des masses différentes. Les éléments correspondants sont dits **isotopes** : *ils ont les mêmes propriétés chimiques; ils ont aussi le même spectre, mais ils ont des masses atomiques différentes*. S'il s'agit d'éléments radioactifs, leurs propriétés radioactives sont différentes; aussi a-t-on d'abord découvert leur existence dans les familles d'éléments radioactifs; on connaît à l'heure actuelle de nombreux cas d'isotopie même parmi les éléments les plus répandus (*cf.* § 382).

353. Les théories du magnétisme. — Nous avons dit, dans l'étude du magnétisme (§ 108), que chaque molécule de matière aimantée constitue un aimant, et qu'on admet depuis Ampère que cet aimant est en réalité un courant électrique. La théorie électronique interprète immédiatement ces courants particulaires d'Ampère par l'assimilation de l'orbite parcourue par un électron à un circuit électrique parcouru par un courant : les actions magnétiques moyennes produites et subies par l'électron mobile sont équivalentes à celles qui sont relatives à ce circuit. Si l'électron fait ν tours par seconde, le courant qui parcourt l'orbite est $i = \nu e$, et l'orbite possède un moment magnétique M proportionnel, si l'orbite est circulaire, à la vitesse angulaire $\omega = 2\pi\nu$; le moment magnétique de la molécule est la somme géométrique des moments magnétiques de toutes les orbites électroniques qu'elle renferme.

a) *Diamagnétisme.* — Lorsqu'un atome se trouve placé dans un champ magnétique créé par des aimants ou des courants extérieurs, les électrons qu'il contient sont soumis de la part de ce champ à des forces qui modifient les orbites qu'ils décrivent. Pour nous rendre compte du sens dans lequel agissent ces forces, considérons les deux cas opposés d'un électron qui tourne de droite à gauche pour un observateur placé suivant le champ magnétique (*fig.* 421 *a*) et d'un électron qui tourne en sens inverse (*fig.* 421 *b*), l'orbite

étant, dans les deux cas, circulaire, et son plan étant perpendiculaire au champ magnétique : dans le premier cas, le moment magnétique M de l'orbite est opposé au champ H, dans le second il lui est parallèle. Dans les deux cas, la force $\vec{f} = Hev$ exercée par le champ sur l'électron est dirigée suivant le rayon de l'orbite, mais, dans le premier cas, elle est dirigée vers le centre, et, dans le second, vers l'extérieur. Dans le premier cas, elle produit une augmentation de l'accélération normale $\omega^2 r$, ainsi que de la vitesse angulaire ω, et le

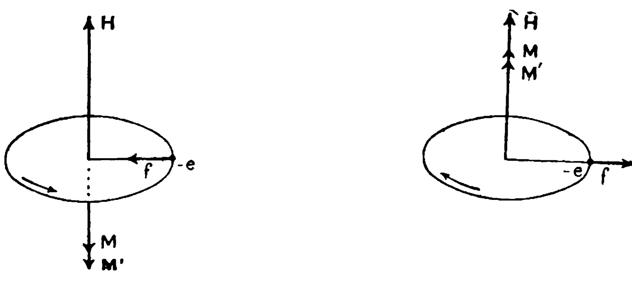


FIG. 421 *a*. FIG. 421 *b*.

moment magnétique prend une valeur M' plus grande que M; dans le second cas, elle produit une diminution de ω, et le moment prend une valeur M' inférieure à M : les figures montrent immédiatement que, dans l'un et l'autre cas, la variation $\vec{M'} - \vec{M}$ du moment magnétique est dirigée en sens opposé du champ $\vec{H}$.

Ainsi, l'*action d'un champ magnétique sur une molécule quelconque crée pour chaque orbite électronique, quel que soit le sens de rotation de l'électron, et crée par suite pour l'ensemble de la molécule, un moment magnétique opposé au champ.* C'est la définition du diamagnétisme (§ 190) : la théorie que nous venons de résumer, et qui est due à Langevin, fait donc apparaître le diamagnétisme comme une propriété tout à fait générale de la matière. Elle l'explique *par un mécanisme intérieur à la molécule, tout à fait indépendant de l'agitation thermique des molécules, et par suite de la température :* elle rend donc bien compte de la loi de Curie qui exprime cette indépendance (§ 193). Ajoutons que le calcul de la variation M'-M du moment magnétique peut être complètement effectué si l'on connaît la valeur du rayon de l'orbite électronique, et que, inversement, la mesure du coefficient d'aimantation des corps diamagnétiques permet de calculer les rayons des orbites : les valeurs ainsi obtenues, qui sont de l'ordre de $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ centimètre, sont en accord satisfaisant avec celles que fournissent d'autres méthodes.

b) Paramagnétisme. — Nous avons supposé que l'orientation du plan de l'orbite électronique n'était pas modifiée par l'action du champ magnétique : c'est ce qui se produit lorsque l'atome contient un nombre suffisant d'orbites, disposées avec une symétrie suffisante, pour que son moment magnétique total $\Sigma\vec{M}$ soit nul. C'est dans ce cas qu'on observe uniquement le phénomène décrit, et que la substance étudiée nous apparaît comme diamagnétique.

Supposons au contraire que, par suite d'une symétrie insuffisante dans la

disposition des orbites électroniques (cf. § 416) et des spins des électrons (*Cours d'Optique*, §§ 398 et 440), l'atome possède un moment magnétique résultant $\vec{M}$. En l'absence du champ extérieur, les atomes contenus dans un certain volume de matière ont toutes les orientations possibles, et l'aimantation résultant de la substance nous apparaît comme nulle. Sous l'action du champ $\vec{H}$, chaque atome tend à s'orienter de façon que son moment magnétique total $\vec{M}$ soit parallèle au champ et de même sens ; la somme géométrique des moments magnétiques des atomes contenus dans le volume considéré cesse d'être nulle, elle prend une certaine valeur qui est de même sens que le champ : la substance est paramagnétique. *Le paramagnétisme est donc une propriété particulière de certains atomes*, liée à une répartition particulière de leurs orbites électroniques, et par conséquent à une place particulière dans la classification de Mendeleeff (§ 415) : les éléments paramagnétiques sont ceux des groupes du fer, du palladium, du platine, et de la famille des terres rares.

Bien entendu, le champ $\vec{H}$, en même temps qu'il oriente les atomes, modifie les orbites électroniques en faisant apparaître dans chacune d'elles un moment dirigé en sens inverse du champ : c'est ce qu'on appelle le *diamagnétisme sous-jacent*, qui est toujours superposé au paramagnétisme. Mais il est en général tout à fait négligeable par rapport au paramagnétisme, et ce n'est que dans le cas exceptionnel de substances faiblement magnétiques, comme le palladium ou le platine, qu'on a pu le mettre en évidence expérimentalement par l'étude de la variation du coefficient d'aimantation avec la température : on a ainsi montré pour ces deux corps que ce coefficient est la différence de deux termes variant suivant les deux lois de Curie relatives aux deux phénomènes.

L'orientation des atomes dans le champ est constamment détruite, à mesure qu'elle tend à se réaliser, par les chocs entre atomes, et elle est d'autant moins prononcée que l'agitation thermique est plus intense, c'est-à-dire que la température est plus élevée. La théorie de l'orientation développée par Langevin montre que l'aimantation prise par la substance dans un champ H et à la température thermodynamique T ne dépend que du rapport $\frac{H}{T}$, et que, pour les aimantations faibles des substances paramagnétiques, elle lui est proportionnelle : *l'aimantation d'une masse donnée de substance paramagnétique à une température donnée est donc proportionnelle au champ, et le coefficient d'aimantation est inversement proportionnel à la température absolue;* c'est la loi expérimentale de Curie (§ 193).

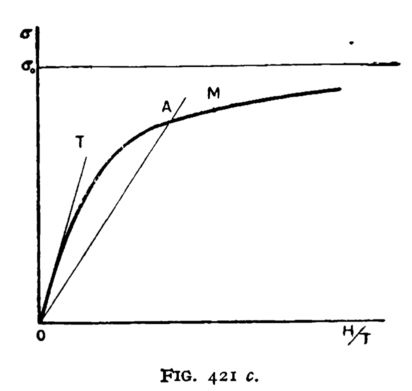


FIG. 421 *c*.

Pour des champs suffisamment forts, la proportionnalité au champ ne se conserve pas, et l'aimantation spécifique σ (aimantation de l'unité de masse) doit tendre vers une valeur limite σ_0 (*saturation absolue*) atteinte lorsque tous les moments atomiques

sont orientés parallèlement au champ : c'est ce que représente la courbe de Langevin (*fig.* 421 *c*), dont les abscisses sont les valeurs du rapport $\frac{H}{T}$ et les ordonnées les valeurs de l'aimantation spécifique σ. Mais il faut bien noter que, dans les conditions usuelles ,on se trouve sur une partie de la courbe qui est pratiquement confondue avec la tangente OT à l'origine : aux températures ordinaires, il faudrait des champs, tout à fait inaccessibles, de l'ordre de 300.000 gauss pour observer un écart de 1 % ; Kamerlingh Onnes a pu toutefois observer nettement la courbure de la courbe d'aimantation, et atteindre des points correspondant au point M de la figure 421 *c*, à 86 % de la saturation, en étudiant le sulfate de gadolinium jusqu'à la température de l'hélium liquide ($T = 1°31$ K), c'est-à-dire en augmentant le rapport $\frac{H}{T}$ par abaissement de la température T.

c) *Paramagnétisme à champ moléculaire.* — Il existe des substances paramagnétiques dont les variations avec la température du coefficient d'aimantation χ ne satisfont pas à la loi de Curie $\chi T = C^{te}$, mais satisfont bien à la loi :

$$\chi (T - \theta) = C^{te},$$

où θ est une constante, qu'on appelle la température du *point de Curie.* Pour rendre compte de ce phénomène, P. Weiss a admis que l'orientation moléculaire, que mesure l'aimantation spécifique σ, crée, sur une molécule quelconque de la substance paramagnétique, un couple qui tend à l'orienter parallèlement aux molécules voisines. Ces forces d'orientation qui s'exercent entre les molécules sont probablement d'origine électrostatique; mais, comme elles sont proportionnelles à l'aimantation spécifique σ, on peut les exprimer comme des forces magnétiques produites par un **champ moléculaire** $H_m = n\sigma$, la quantité n étant une constante. Le champ total qui tend à orienter les molécules est donc $H + H_m = H + n\sigma$, et la loi de proportionnalité de σ à H/T prend la forme :

$$\sigma = C \frac{H + n\sigma}{T}, \qquad \text{ou} \qquad \chi = \frac{\sigma}{H} = \frac{C}{T - Cn},$$

ce qui est bien la loi expérimentale indiquée, avec $\theta = Cn$.

Le champ moléculaire est par exemple observable sur l'oxygène comprimé à 100 atmosphères : on trouve alors $\theta = -5°4$ K, c'est-à-dire que le champ moléculaire est négatif ; la loi $\chi (T - \theta) = C^{te}$ s'applique également à la susceptibilité des métaux ferromagnétiques pris à des températures supérieures à la température de disparition du ferromagnétisme (§ 195).

d) *Ferromagnétisme.* — Pour un corps paramagnétique quelconque, l'aimantation spécifique σ est liée au rapport $x = \frac{H}{T}$ par une certaine relation $\sigma = f(x)$ que représente la courbe de la figure 421 *c*. Imaginons que ce corps ait un champ moléculaire positif $H_m = n\sigma$, et qu'il soit placé, après avoir reçu l'aimantation σ, dans un champ extérieur nul : il est soumis au champ $H = H_m$, auquel correspond la valeur de x donnée par la relation $x = \frac{n\sigma}{T}$.

relation qui est représentée graphiquement sur la figure 421 *c* par la droite OA, de coefficient angulaire $\frac{T}{n}$. Si la température T est assez basse, cette droite coupe la courbe de Langevin en un point A, pour lequel les deux relations sont satisfaites : le point A représente un état de la substance où elle conserve l'aimantation σ sous l'action du champ moléculaire $n\sigma$ seul; on démontre d'ailleurs que c'est un état d'équilibre stable, tandis que l'état défini par le point O est instable. Ainsi, *pour toute température inférieure à une certaine température* θ, *une substance à champ moléculaire positif acquiert, en l'absence de tout champ magnétique extérieur, une aimantation spontanée* σ. La substance est alors dite ferromagnétique.

L'aimantation spontanée n'est d'ailleurs en général pas observable parce que, en l'absence de champ directeur extérieur, elle a toutes les directions possibles pour les différents éléments de volume en lesquels on peut décomposer toute portion un peu notable de matière; elle n'apparaît que lorsqu'un champ extérieur rapproche toutes ces directions les unes des autres; on l'observe avec sa vraie grandeur lorsque le champ extérieur est assez intense pour les rendre toutes parallèles. Ces variations de l'aimantation apparente avec le champ représentent la courbe d'aimantation classique de la substance ferromagnétique : *la saturation,* au sens usuel du mot, *est égale à l'aimantation spontanée à la température considérée.* C'est une saturation relative, représentée par l'ordonnée du point A, qu'il ne faut pas confondre avec la saturation absolue représentée par σ_0; dans le cas du fer par exemple, il suffit de champs de l'ordre de 5.000 gauss pour orienter presque parfaitement l'aimantation spontanée, et réaliser à 1/1.000 près la saturation relative, tandis qu'il faudrait des champs beaucoup plus intenses, de plusieurs centaines de milliers de gauss, pour déplacer le point A de façon appréciable sur la courbe de Langevin.

Lorsque la température T s'élève, le coefficient angulaire $\frac{T}{n}$ de la droite OA augmente, le point A se rapproche de l'origine, l'aimantation spontanée diminue : elle disparaît lorsque l'on atteint la température θ pour laquelle $\frac{\theta}{n}$ est égal au coefficient angulaire de la tangente OT à l'origine à la courbe de Langevin. Or cette tangente OT représente la loi de Curie, $\chi T = C$; en remplaçant χ par $\frac{\sigma}{H}$, et $\frac{H}{T}$ par x, cette loi s'exprime par la relation $\sigma = Cx$, et la constante de Curie C est précisément le coefficient angulaire de OT. La température de disparition du ferromagnétisme est donc donnée par la relation $\theta = Cn$: c'est le **point de Curie,** tel que nous l'avons défini tout à l'heure.

Ainsi, *la théorie du champ moléculaire de Weiss montre que le ferromagnétisme et le paramagnétisme ne sont que deux aspects différents d'un même phénomène.* Aux températures élevées, la substance est paramagnétique, et son coefficient d'aimantation, $\chi = \frac{C}{T - \theta}$, augmente indéfiniment quand la température décroît jusqu'au point de Curie. Aux basses températures, elle devient ferromagnétique, parce qu'il apparaît une aimantation spontanée, d'autant plus intense que la température est plus inférieure au point de Curie, et qu'il est infiniment plus facile d'orienter l'aimantation spontanée que d'orienter les molécules elles-mêmes.

e) Fluctuations du champ moléculaire. — La théorie que nous venons d'esquisser n'est évidemment qu'une première approximation. Le champ moléculaire représente les forces qui s'exercent entre atomes voisins, et, comme toutes les forces intermoléculaires, il doit subir des fluctuations : la considération de ces fluctuations permet d'expliquer que, pour le fer et le nickel, la constante θ_p du paramagnétisme à haute température (*point de Curie paramagnétique*) soit supérieure de quelques dizaines de degrés à la température θ_f de disparition de l'aimantation spontanée (*point de Curie ferromagnétique*).

Dans une substance à champ moléculaire négatif ($\theta < 0$), la théorie des fluctuations du champ moléculaire indique que, lorsque la température devient inférieure à $-\theta$, la loi de Curie est profondément modifiée, et le paramagnétisme est à peu près indépendant de la température : c'est le ***paramagnétisme constant***, observé sur certains métaux comme le manganèse.

f) Hystérésis. — L'hypothèse du champ moléculaire a permis également d'interpréter les phénomènes présentés par les cristaux ferromagnétiques. Nous n'étudierons pas ces phénomènes : nous indiquerons seulement en quelques mots un résultat particulièrement suggestif présenté par la *pyrrhotine* (pyrite de fer) lorsqu'on la soumet à un champ parallèle à une certaine direction privilégiée du cristal. L'aimantation, dans un champ d'intensité moyenne, est toujours égale à l'aimantation à saturation I_m ; elle reste invariable lorsqu'on fait décroître le champ jusqu'à zéro, puis qu'on le renverse; lorsqu'on atteint le champ coercitif $-H_c$, l'aimantation prend brusquement la valeur $-I_m$, et la conserve lorsqu'on continue à faire varier le champ jusqu'à $-\infty$, puis qu'on revient de $-\infty$ à o, et de o à $+H_c$; elle reprend brusquement la valeur $+I_m$ lorsque le champ devient supérieur à H_c. Il semble que les aimants élémentaires que contient la pyrrhotine ne puissent prendre que deux directions opposées, et qu'ils se retournent tous simultanément bout pour bout lorsqu'on atteint le champ coercitif.

Comme une masse métallique est toujours composée d'une multitude de cristaux, en général microscopiques, enchevêtrés les uns dans les autres, on est amené à penser que les phénomènes irréversibles qui constituent le cycle d'hystérésis d'un barreau de fer sont dus aux renversements successifs des aimantations spontanées dans les divers domaines élémentaires qui y sont juxtaposés. Le caractère discontinu de la variation de l'aimantation est mis en évidence par l'**expérience de Barkhausen:** la tige de fer, ou mieux de ferronickel, que l'on veut étudier est entourée d'une bobine de fil de cuivre, et l'on reçoit dans un téléphone, après amplification, les courants induits dans cette bobine par les variations de l'aimantation. En faisant varier lentement, de façon parfaitement continue, le champ magnétisant, on entend un bruit nettement discontinu, analogue au crépitement que produirait de la grenaille de plomb en tombant sur une planche: c'est le bruit produit au téléphone par les renversements de l'aimantation dans des domaines élémentaires finis; on a même pu, par enregistrement des courants induits convenablement amplifiés, évaluer le nombre des domaines élémentaires, qui serait de l'ordre de 5.000 par centimètre cube.

353 *bis.* — **Théorie électronique des métaux.** — D'après les hypothèses générales du paragraphe 351, le mouvement de l'électricité dans un conducteur est dû au déplacement des électrons dans ce conducteur. Comme il n'existe, dans le conducteur, aucune force qui s'oppose à ce mouvement (§ 25), les électrons qui se déplacent doivent être des **électrons libres**, qui se trouvent en dehors des atomes, et se meuvent librement entre eux ; bien entendu, comme l'intérieur du conducteur est à l'état neutre, chaque élément de volume doit contenir des centres positifs, c'est-à-dire des atomes ayant perdu un électron, en quantité égale à celle des électrons libres.

En l'absence du champ électrique, les électrons libres sont animés de mouvements désordonnés, analogues à ceux des molécules d'un gaz, dont l'énergie cinétique moyenne augmente avec la température. Lorsqu'on crée dans le métal un champ électrique $\vec{E}$, chaque électron est soumis à une force $\vec{E}e$: au mouvement désordonné d'agitation thermique s'ajoute un mouvement d'ensemble, parallèle au champ et de sens opposé. Le mouvement d'un électron donné ne s'accélère d'ailleurs pas indéfiniment dans la direction de la force, car, au bout d'un temps très court, l'électron vient buter contre un autre électron ou contre un atome, neutre ou positif, et est renvoyé dans une direction quelconque. Le calcul montre que la vitesse moyenne du mouvement d'ensemble des électrons est proportionnelle au champ $\vec{E}$; on en déduit, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait à propos de la conductibilité des électrolytes, que le vecteur courant $\vec{i}$ est proportionnel au vecteur $\vec{E}$: c'est la loi d'Ohm. De même, on trouve que le travail fourni par le champ, par seconde et par unité de volume, est égal à Ei : c'est la loi de Joule ; ce travail est transformé par les chocs incessants des électrons, entre eux ou sur les atomes, en énergie cinétique désordonnée, c'est-à-dire en chaleur.

A mesure que la température du métal s'élève, la vitesse moyenne de l'agitation désordonnée des électrons augmente, et l'intervalle qui s'écoule entre deux chocs consécutifs d'un électron sur des atomes diminue. L'accélération que lui communique le champ agit pendant moins longtemps avant que ses effets ne soient détruits par le choc : la vitesse d'ensemble communiquée aux électrons par un champ électrique donné est plus petite. Il en résulte que la conductibilité diminue à mesure que la température augmente : c'est le phénomène de l'augmentation de la résistance des métaux purs avec la température.

Au cours de leur mouvement désordonné, les électrons libres qui se trouvent au voisinage de la surface qui limite le métal peuvent franchir cette surface, et se répandre dans l'espace environnant ; mais, à mesure que le conducteur perd des électrons, il se charge positivement ; le champ électrique créé par cette charge positive arrête les électrons qui s'écartent de la surface, et les attire à nouveau vers le métal. Lorsque l'équilibre statistique est atteint, c'est-à-dire lorsqu'il rentre à chaque instant dans le conducteur autant d'électrons qu'il en sort, il existe, au voisinage de sa surface dans l'espace qui l'entoure, une *charge d'espace* formée par une couche d'électrons, d'autant plus importante que l'agitation thermique des électrons est plus importante, c'est-à-dire que la température est plus élevée. Si l'on établit un champ électrique extérieur en plaçant en face de la surface métallique un plateau chargé positivement, l'équilibre est

rompu, et on peut recueillir les électrons à mesure qu'ils sortent du conducteur : c'est le phénomène de l'émission des électrons par les métaux incandescents.

Un phénomène analogue peut se produire à la surface de séparation de deux métaux en contact : d'après les lois de la théorie cinétique, la vitesse moyenne d'agitation thermique des électrons libres est la même dans les deux métaux, s'ils sont à la même température ; mais le nombre d'électrons libres qu'ils contiennent par unité de volume n'est pas le même. Le nombre des électrons qui franchissent la surface de séparation dans leur mouvement désordonné n'est pas le même dans les deux sens ; il y a, au voisinage de cette surface, accumulation d'électrons dans le métal qui en perd le moins, tandis qu'il y a dans l'autre métal apparition d'un excès de charges positives ; autrement dit, il y a formation, de part et d'autre de la surface de séparation, d'une couche double, dont l'épaisseur, de l'ordre du centième de micron, représente la distance à laquelle un électron peut pénétrer dans un métal sans être arrêté par un choc sur un atome. On sait (§ 80) que la formation de cette couche double explique l'existence de la différence de potentiel de contact entre les deux métaux.

Le fait que les centres chargés libres dans les conducteurs sont bien des électrons a pu être mis en évidence par Tolman, grâce à la mesure du rapport e/m qui les caractérise. Imaginons qu'un conducteur en mouvement soit brusquement arrêté, c'est-à-dire que, pendant un temps très court, on lui impose une accélération négative élevée $-\gamma$: les électrons, étant libres, continueront leur mouvement, et ne s'arrêteront que plus tard, lorsque leurs chocs sur les atomes auront annulé la vitesse relative d'ensemble par rapport au métal qu'ils ont acquise par inertie. Pendant ce temps, ils ont transporté à travers le conducteur une certaine charge : s'il est isolé, elle s'est accumulée sur ses faces terminales ; si ces faces sont reliées par un circuit extérieur, elle s'est écoulée à travers ce circuit.

Supposons que le conducteur soit un conducteur cylindrique de longueur l. Pour maintenir les électrons immobiles, dans leur ensemble, par rapport au métal, c'est-à-dire pour leur imposer à chaque instant l'accélération $-\gamma$, il faudrait appliquer à chacun d'eux une force $-m\gamma$, c'est-à-dire établir dans le métal un champ $E = m\gamma/e$ en établissant entre ses extrémités une différence de potentiel $El = m\gamma l/e$. En l'absence de cette différence de potentiel, il existe un mouvement d'ensemble des électrons par rapport au métal, et ce mouvement est celui qui serait produit par une f. é. m. $-El = -m\gamma l/e$. Si le circuit a une résistance R, le courant instantané a pour valeur $i = -m\gamma l/eR$, et la quantité d'électricité transportée, lorsque la vitesse varie de v à o, est

$$q = \int_0^t i\,dt = -\frac{ml}{eR}\int_0^t \gamma\,dt = -\frac{m}{e}\frac{lv}{R}.$$

Dans les expériences de Tolman et Stewart (1916), le conducteur était un fil de longueur $l = 466$ mètres, bobiné sur une carcasse cylindrique de 12 centimètres de rayon ; les extrémités du fil, ramenées sur l'axe, étaient reliées à un galvanomètre balistique, la résistance totale du circuit étant $R = 40$ ohms $= 4.10^{10}$ u. é. m. La bobine tournait avec une vitesse linéaire périphérique $v = 55{,}2$ mètres/seconde et était arrêtée brusquement : pour $e/m = 1{,}76.\,10^7$ u. é. m., on doit observer le passage d'une quantité d'électricité $q = 3{,}6.10^{-10}$ u. é. m. $= 3{,}6.10^{-9}$ coulomb. Les experiences ont montré que le sens du courant est bien

celui qui correspond à une charge négative des centres libres, et ont donné, pour différents métaux, des valeurs de e/m comprises entre 1, 5 et $1{,}6.10^7$ u. é. m. Dans des expériences ultérieures (1923), Tolman a remplacé la bobine freinée par un cylindre creux de laiton, oscillant autour de son axe avec une fréquence d'environ 20 oscillations par seconde ; l'inertie des électrons a alors pour effet qu'ils exécutent, par rapport aux centres positifs, des oscillations équivalentes à un courant alternatif. On mesure ce courant par le courant qu'il induit dans une bobine fixe entourant le cylindre oscillant. La valeur trouvée pour e/m dans ces dernières expériences a été $1{,}93.10^7$ u. é. m. : elle ne diffère de la valeur qui caractérise l'électron que d'une quantité inférieure aux erreurs expérimentales.

Il ne paraît donc pas douteux que les porteurs des charges dans la conductibilité métallique sont bien des électrons. Les quelques indications que nous avons données au début de ce paragraphe montrent que la théorie électronique des métaux est capable de donner une explication du mécanisme des principaux phénomènes relatifs aux conducteurs. Mais de nombreuses difficultés apparaissent lorsqu'on veut la développer pour calculer numériquement les différents effets qu'elle doit expliquer.

Les premiers calculs ont été faits en assimilant les électrons de conductibilité aux molécules d'un gaz, entièrement libres de se mouvoir entre les chocs, et en adoptant pour la répartition de leurs vitesses la même loi que pour la répartition des vitesses des molécules d'un gaz parfait. On trouve alors que, pour rendre compte de la grandeur des phénomènes électriques, il faut admettre que le nombre des électrons libres est approximativement égal au nombre total des électrons de valence contenus dans le métal. L'ensemble des électrons libres d'une masse d'un métal monovalent égale à un atome-gramme doit alors avoir, à toute température, une énergie cinétique égale à celle des molécules qui constituent une molécule gramme d'un gaz parfait, soit $3\,RT/2$; il faut donc, chaque fois qu'on élève la température d'un degré, leur fournir une quantité de chaleur $3\,R/2J$: il est évident que cette contribution des électrons libres à la chaleur spécifique du métal n'existe pas en fait (Cf. *Cours de Thermodynamique*, §§ 174 et 190).

Cette difficulté fondamentale de la théorie classique a pu être levée par l'application des théories quantiques. Dans ces théories, la répartition des vitesses des électrons n'est pas la même que celle des molécules d'un gaz ; elle ne se calcule pas par la statistique classique basée sur la relation de Boltzmann (*Cours de Thermodynamique*, § 183), mais par une statistique quantique basée sur le principe d'exclusion de Pauli (*Cours d'Optique*, § 427). Dans ces conditions, on trouve que la contribution des électrons à la chaleur spécifique ne serait appréciable que pour des températures extraordinairement élevées ; aux températures qui nous sont accessibles, elle est environ 100 fois plus faible que celle que faisait prévoir la théorie classique, et n'est par conséquent pas mesurable. Il faut pourtant ajouter qu'aux très basses températures, voisines du zéro absolu, où la chaleur spécifique qui correspond aux oscillations des atomes est très faible (*Cours de Thermodynamique*, § 232 *bis*), la contribution de l'énergie électronique reprend théoriquement une importance relative suffisante pour qu'elle soit mesurable, et que les mesures effectivement réalisées dans ce domaine de températures n'ont pas réussi à la mettre en évidence.

L'introduction des statistiques quantiques ne suffit donc pas à lever toutes les difficultés auxquelles se heurte la théorie des électrons libres, et l'on est amené à se demander si les électrons de valence sont bien réellement libres dans la masse métallique. D'après les théories modernes de la structure de l'atome (§ 416), les électrons de valence d'un atome métallique forment, à la partie périphérique de l'atome, une couche électronique incomplète ; ils décrivent des orbites relativement éloignées du noyau atomique et ne lui sont liés que par des forces assez faibles. A l'état solide, les atomes sont assez rapprochés les uns des autres pour qu'un électron de valence ne soit pas plus près du noyau de l'atome auquel il appartenait originellement que du noyau d'un atome voisin : il est attiré par ces deux noyaux avec des forces équivalentes et peut facilement passer de l'un à l'autre, surtout si un champ extérieur vient à perturber son mouvement. On est ainsi conduit à remplacer l'ancienne image des électrons libres heurtant à chaque instant les atomes par l'image d'électrons gravitant autour des noyaux atomiques et passant à chaque instant d'un domaine atomique à un autre : la conductibilité correspond à l'accroissement de la probabilité de ces passages produite par le champ appliqué.

Un électron de conductibilité d'un métal est donc un électron libre, en ce sens qu'il n'est pas attaché à un atome plutôt qu'à un autre ; mais il n'est pas totalement libre, en ce sens qu'il se meut dans le champ électrique créé par l'ensemble des noyaux atomiques et des autres électrons, champ qui n'est nul qu'en moyenne : la théorie électronique des métaux doit faire l'étude de ce mouvement. Il est d'ailleurs certain que ce mouvement, comme les mouvements intraatomiques, ne doit pas être étudié par la Mécanique newtonienne classique, mais par la Mécanique ondulatoire (§ 420). C'est là un problème extrêmement complexe, et qui n'a pas encore été résolu de façon entièrement satisfaisante. Mais des résultats intéressants ont déjà été obtenus, en particulier en ce qui concerne la constitution des alliages, le magnétisme des métaux, le contour des raies de leurs spectres de rayons X : on peut espérer que l'application à la théorie électronique des métaux des principes des statistiques quantiques et de la Mécanique ondulatoire permettra de lever l'une après l'autre les difficultés qui subsistent et de grouper en une même théorie, rentrant dans le cadre des théories générales modernes de la structure de la matière, un nombre de plus en plus grand de phénomènes.

CHAPITRE XXXIII

ÉTUDE DES COURANTS DANS LE VIDE ABSOLU

354. Passage d'un courant dans le vide. — On sait que le vide absolu est un isolant parfait. Dans les vides extrêmement avancés qu'on sait produire maintenant, où la pression, inférieure à toute pression mesurable, est certainement inférieure à 1/100.000 de millimètre de mercure, on peut établir entre deux électrodes métalliques des différences de potentiel de plusieurs centaines de milliers de volts sans qu'il passe aucun courant entre elles.

Mais si, par un procédé quelconque, on fait sortir des électrons de l'une des électrodes, ces électrons se déplacent sous l'influence du moindre champ électrique; si le vide est seulement poussé au 1/10.000 de millimètre de mercure, ils peuvent parcourir des distances de l'ordre du mètre sans rencontrer aucune molécule, c'est-à-dire sans que rien s'oppose à leur mouvement et à celui de l'électricité qu'ils transportent. On peut dire que le vide absolu se comporte comme un conducteur parfait.

Nous allons étudier dans ce chapitre l'émission des électrons par les électrodes portées à l'incandescence ou frappées par la lumière ultra-violette. Signalons en passant que ces deux procédés ne sont pas les seuls qui permettent de faire sortir les électrons d'une électrode métallique : en particulier, on a observé des décharges dans le vide absolu en produisant à la surface de la cathode un champ électrique extrêmement intense, de l'ordre de plusieurs millions de volts par centimètre, capable d'arracher en quelque sorte les électrons du métal.

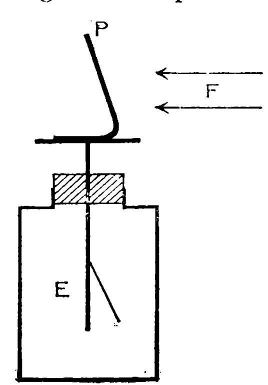


FIG. 422.

I.— *PHÉNOMÈNES PHOTO-ÉLECTRIQUES*

355. Généralités. — L'effet photo-électrique a été découvert par Hertz, en 1887. On le met facilement en évidence en plaçant une plaque de zinc parfaitement propre P sur le plateau d'un électroscope chargé E (*fig.* 422), et en l'éclairant par un faisceau lumineux F, riche en rayons ultra-violets, provenant par exemple d'un arc au fer ou d'un arc au mercure à enveloppe de quartz. L'électroscope se décharge s'il est chargé négativement, et au contraire sa feuille reste immobile si elle est chargée positivement. On interprète l'expérience en admettant que la plaque de zinc émet des électrons, qu'elle repousse si elle est chargée négativement, tandis qu'au contraire elle les attire

et les absorbe à nouveau si elle est chargée positivement. Ce phénomène semble être assez général : on a pu, par exemple, observer l'émission des électrons par des molécules gazeuses, sous l'action des rayons ultra-violets extrêmes dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de 1.000 angströms.

L'étude du phénomène dans les gaz est compliquée par le fait que les électrons émis se fixent sur les molécules gazeuses pour donner des ions négatifs (§ 366), et que, dans un champ électrique un peu intense, ils peuvent acquérir des vitesses suffisantes pour ioniser d'autres molécules gazeuses (§ 367). Nous nous bornerons à son étude dans le vide, pour des métaux tels que le zinc et les métaux alcalins. Nous supposerons que la surface étudiée est parfaitement propre et très brillante : l'état de la surface joue en effet un rôle important dans l'émission des électrons, et, comme il s'agit de métaux très oxydables, il est facilement modifié par la présence dans le tube à vide de traces d'oxygène ou de vapeur d'eau.

En opérant dans le vide, on a pu, par l'action simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique, mesurer la valeur du rapport e / m pour les centres négatifs émis, et constater ainsi que ces centres sont bien des électrons (§ 349).

Pour un métal donné, l'émission d'électrons n'a lieu que si la longueur d'onde de la radiation excitatrice est inférieure à une longueur d'onde limite λ_0, autrement dit si sa fréquence ν est supérieure à une fréquence limite ν_0. Pour les

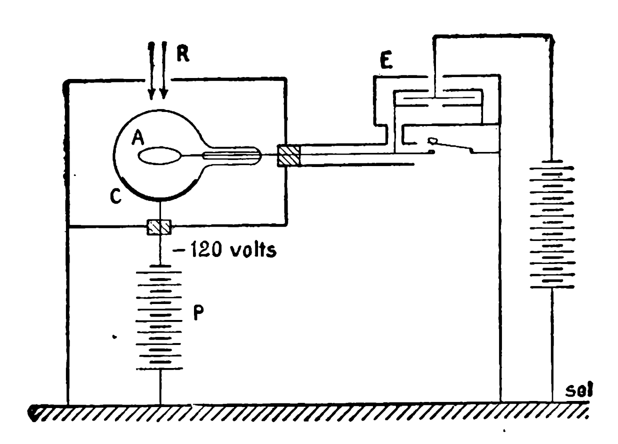


FIG. 422 *bis*.

métaux tels que le zinc, la radiation limite λ_0 est une radiation ultra-violette, et l'effet photo-électrique ne peut être observé qu'avec la lumière ultra-violette. Pour les métaux alcalins, elle se trouve dans le spectre visible ou même dans le spectre infra-rouge : on peut observer l'effet photo-électrique sur le potassium avec la lumière du jour, sur le rubidium avec une lumière rouge de faible intensité.

La mesure du nombre d'électrons émis se fait avec la **cellule photoélectrique** que représente schématiquement la figure 422 *bis*. La partie C de la paroi intérieure d'une ampoule de verre ou de quartz est recouverte d'un dépôt d'un métal alcalin, et les électrons émis peuvent être recueillis par une boucle

métallique A formant anode : la batterie d'accumulateurs P établit, entre l'anode et la cathode, une différence de potentiel suffisante pour que la première recueille tous les électrons émis par la seconde, et l'électromètre E — que l'on peut remplacer par un galvanomètre lorsque les courants sont assez intenses, ou qu'on les amplifie au préalable (§ 361) — mesure le courant qu'ils transportent (cf. §§ 87 et 364). Lorsque l'ampoule A est complètement vidée de gaz, on trouve que le *nombre d'électrons émis, lorsque la cathode reçoit un faisceau de rayons lumineux monochromatique* R, *est proportionnel au flux lumineux apporté par ce faisceau.* Le coefficient de proportionnalité varie avec la longueur d'onde de la radiation employée : pour le potassium, par exemple, l'émission électronique est maximum pour des radiations violettes de longueur d'onde voisine de $0^{\mu},440$.

La proportionnalité du courant électrique au flux lumineux permet d'employer l'appareil à des mesures photométriques. On peut ainsi espérer augmenter la précision de ces mesures; tandis que l'insuffisante sensibilité de l'œil aux contrastes ne permet pas de dépasser le 1/100 ou le 1/200 dans les mesures visuelles, il ne semble pas impossible de mesurer les courants photoélectriques à 1/1.000 près. De plus, les appareils de mesure des courants se prêtent à l'enregistrement de leurs déviations, et on a pu, à l'aide des cellules photoélectriques, réaliser des *photomètres enregistreurs,* soit pour suivre les variations d'éclat d'une étoile variable, soit pour traduire par une courbe les variations de l'opacité d'une plaque photographique tout le long d'une image, — par exemple tout le long d'un spectre — enregistrée sur cette plaque. Malheureusement, les cellules photoélectriques exigent encore pour leur fonctionnement des flux lumineux hors de proportion avec ceux que l'œil peut percevoir directement. On a bien réussi à augmenter leur sensibilité en les remplissant d'hélium sous une pression de l'ordre du millimètre de mercure : pour une différence de potentiel entre les électrodes de l'ordre de 150 volts, l'hélium est fortement ionisé par les chocs électroniques (§ 367) et le courant total recueilli par l'anode, apporté surtout par les électrons produits par cette ionisation, est beaucoup plus intense que le courant transporté par les électrons photoélectriques proprement dits. Mais il faut encore un flux lumineux de l'ordre de 10^{-10} lumens pour produire le courant minimum de 10^{-14} ampères commodément mesurable à l'électromètre (§ 87), alors que l'œil est encore sensible à un flux de 10^{-13} lumens.

356. Vitesse d'émission des électrons. — D'après la relation d'Einstein (§ 343), les électrons émis, sous l'influence d'une lumière excitatrice monochromatique de fréquence ν, doivent posséder la force vive $\frac{1}{2} m v_0^2 = h\nu$. En réalité, il faut compter qu'une partie de l'énergie $h\nu$ doit être employée pour vaincre les forces qui maintiennent l'électron dans la matière où il est engagé; le travail ainsi dépensé ne dépend que de la nature du métal étudié, et ne dépend pas de la fréquence ν de la radiation employée. Si nous le désignons par W_0, la relation d'Einstein donne, pour la vitesse v avec laquelle l'électron sort du métal :

$$\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W_0.$$

On voit immédiatement pourquoi l'effet photoélectrique ne peut être observé que si la fréquence est supérieure à une fréquence limite ν_0 : l'électron ne peut sortir de la plaque que si l'on a $h\nu > W_0$.

Les électrons qui quittent la plaque éclairée ne possèdent pas tous la vitesse v. La lumière n'est pas absorbée entièrement à la surface du métal, mais y pénètre à une profondeur qui peut être de l'ordre du micron; les électrons qu'elle produit à la fin de son trajet peuvent être entrés en collision avec des atomes de métal avant de sortir de la plaque, et avoir ainsi subi une perte de force vive. D'autre part, leur vitesse a une direction quelconque par rapport à la surface du métal, et sa composante normale à la plaque peut avoir toutes les valeurs comprises entre 0 et v.

Il est possible de mesurer expérimentalement la valeur maximum v de cette composante normale. On place, en face de la plaque éclairée P, une seconde plaque P′ portée, par rapport à P, à un potentiel négatif — V : elle ne reçoit d'électrons que si le travail $\mathcal{T}$ qu'ils ont à fournir contre le champ électrique pour l'atteindre est inférieur à la force vive maximum $\frac{1}{2} mv^2$ qu'ils peuvent posséder. On mesure cette force vive en reliant la plaque P′ à un électromètre, et en cherchant pour quelle valeur de V l'électromètre cesse de recevoir un courant. En réalité, les deux plaques P et P′ étant toujours faites avec des métaux différents, la valeur de V qu'on mesure n'est pas la valeur exacte de la différence de potentiel que l'électron doit franchir, mais elle en diffère d'une quantité V_c égale à la différence de potentiel de contact des deux métaux. On a :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} mv^2 = e\,(V - V_c),$$

et la relation d'Einstein donne, en posant $W_1 = W_0 - eV_c$:

$$e\,(V - V_c) = h\nu - W_0, \qquad eV = h\nu - W_1.$$

Les expériences sont en bon accord avec cette formule. Les fréquences ν correspondant au spectre visible ou au début de l'ultra-violet, les vitesses v sont des vitesses faibles, de l'ordre de 1.000 km/sec, correspondant à des potentiels V de l'ordre de quelques volts. Ce sont bien des valeurs de cet ordre que l'on trouve, et la valeur obtenue pour V est bien indépendante de l'intensité de la lumière excitatrice; *la courbe obtenue en prenant* ν et V *pour coordonnées est une droite, aux erreurs d'expérience près.* D'après l'équation écrite, le coefficient angulaire de cette droite doit être h/e. Millikan a ainsi trouvé, avec le sodium, $h/e = 1{,}376 \,.\, 10^{-17}$ et avec le lithium $h/e = 1{,}379 \,.\, 10^{-17}$ u. é. s.; des mesures plus récentes ont donné, avec le zinc, 1,373, avec l'aluminium, 1,374 et avec le nickel, $1{,}374 \,.\, 10^{-17}$; tous ces nombres sont en parfait accord avec la valeur $h/e = 1{,}373 \,.\, 10^{-17}$ u. é. s. fournie par l'étude du rayonnement du corps noir.

Si, avec une même plaque P′, on étudie l'émission photoélectrique de deux métaux, la mesure de la quantité $W'_1 - W_1 = h\,(\nu'_0 - \nu_0) - e\,(V'_c - V_c)$ permet de déterminer leur différence de potentiel de contact $V'_c - V_c$: c'est ainsi que Millikan a établi définitivement que ces d. d. p. sont de l'ordre du volt (§ 172).

II. — *PHÉNOMÈNES THERMO-IONIQUES*

357. Émission d'électrons par les corps incandescents. — Le fait que l'air devient conducteur au voisinage d'un corps incandescent a été découvert en 1725; mais ce n'est qu'en 1901 que Richardson a montré qu'il est dû à l'émission de corpuscules négatifs identifiés depuis avec les électrons (*cf.* § 349). L'existence de ce phénomène a été reconnue sur un grand nombre de corps; citons le carbone, les métaux tels que le platine et le tungstène, et même des oxydes non conducteurs, tels que la chaux et la baryte.

Nous n'étudierons pas les phénomènes dans l'air : ils sont compliqués, non seulement par l'ionisation de l'air, mais encore par l'émission par la substance incandescente de centres chargés positivement, qui sont probablement des molécules de gaz occlus, ou des atomes de potassium ou de calcium provenant des impuretés salines de la surface. Signalons simplement que ces phénomènes doivent jouer un rôle important dans le fonctionnement de l'arc électrique, dont le charbon négatif incandescent émet de nombreux électrons, transportant un courant de l'ordre de plusieurs ampères par centimètre carré; on a effectivement montré qu'il suffit de produire cette émission d'électrons, en portant la cathode à l'incandescence, pour provoquer l'allumage de l'arc, sans qu'il soit besoin d'amener les charbons en contact.

Nous nous contenterons d'étudier l'émission d'électrons par un **filament** de tungstène F, placé dans le vide absolu, et porté à l'incandescence par le courant électrique d'un ou deux accumulateurs C (*fig.* 423). Si l'on a eu soin, lors de l'établissement du vide dans l'appareil, de porter le filament à l'incandescence et de chauffer fortement l'ampoule, de façon à éliminer complètement les gaz occlus, on observe uniquement l'émission d'électrons, et le vide peut se maintenir parfait après des milliers d'heures de fonctionnement.

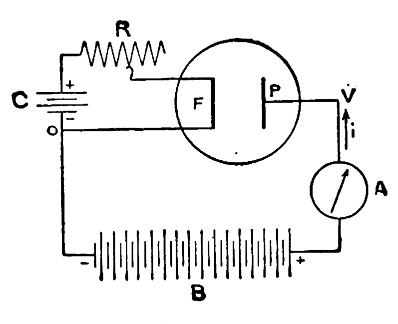


FIG. 423.

Si le filament est seul dans l'espace, les électrons émis s'en écartent très peu et ne tardent pas à y rentrer (§ 358). Mais, si l'on place en face de lui une **plaque** P, et qu'à l'aide d'une batterie d'accumulateurs B on établisse entre le filament et la plaque une différence de potentiel V de l'ordre de 40 à 80 volts, créant un champ électrique $\vec{E}$ dirigé de la plaque vers le filament, les électrons se mettent en mouvement vers la plaque. Il se produit dans le *circuit de plaque* un courant, allant à travers le circuit extérieur du filament à la plaque, dont l'intensité i peut être mesurée par un galvanomètre ou même un milliampèremètre A (*fig.* 423).

Le nombre des électrons qui sortent du filament augmente avec la température : si, laissant constant le *potentiel de plaque* V, on augmente la température du filament F, en augmentant, par la manœuvre du *rhéostat de chauffage* R, l'intensité du courant qui le parcourt, on constate que l'intensité i du *courant de plaque* augmente. Le tungstène est un métal qui peut être

porté à une température très élevée, il ne fond qu'au voisinage de 3.400° C. et se volatilise extrêmement peu; il n'est pas difficile d'obtenir des courants de plaque de plusieurs dizaines de milliampères, correspondant à une intensité de plusieurs ampères par centimètre carré de la surface du filament : il y a émission d'un véritable torrent d'électrons, dont le nombre, par seconde et par centimètre carré, peut dépasser 10^{19}. On obtient d'ailleurs une émission du même ordre, pour une température moins élevée, en incorporant au tungstène 1 à 2 o/o de thorium ou en le recouvrant d'oxyde de baryum; la puissance nécessaire pour le chauffage du filament est par suite moins grande, et les lampes modernes peuvent fournir des courants électroniques de plus de 100 milliampères par watt consommé dans le filament.

Chaque électron acquiert, en allant du filament à la plaque, une énergie cinétique $\frac{1}{2} mv^2 = eV$; cette énergie est fournie par la batterie de plaque B; elle disparaît au moment du choc de l'électron contre la plaque, et la plaque, soumise à un véritable bombardement par les électrons, s'échauffe. L'énergie qu'elle reçoit par seconde, $W = iV$, peut atteindre plusieurs watts : si la plaque n'est pas suffisamment épaisse, elle peut être portée au rouge.

358. Courant de saturation. — Supposons que, la température du filament restant constante, nous fassions varier la différence de potentiel V entre le filament et la plaque, et traçons la courbe qui représente les variations de l'intensité i en fonction de V (*fig.* 424). D'abord, si cette différence de potentiel est négative, les électrons sont repoussés de la plaque vers le filament, et on ne recueille aucun courant. Lorsqu'elle est positive et très faible, on observe un courant dont l'intensité croît plus vite que la différence de potentiel : la courbe OA part de l'origine tangentiellement à l'axe des V. Elle monte ensuite suivant une branche rapidement ascendante AB, puis se termine par une branche horizontale BC : *pour un potentiel suffisamment élevé, l'intensité i_0 du courant reste constante, quelle que soit la valeur de la différence de potentiel.* On dit que l'on a atteint la saturation, et le courant i_0 est le **courant de saturation.**

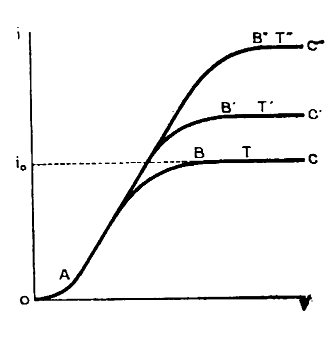


FIG. 424.

Si l'on détermine les courbes de courant qui correspondent à des températures croissantes T, T′, T″ ... du filament, on obtient des courbes dont la partie initiale est la même; mais le courant de saturation a une intensité d'autant plus grande, et le potentiel auquel il faut porter la plaque pour obtenir la saturation est d'autant plus fort, que la température du filament est plus élevée.

Les courbes obtenues expérimentalement ont pu être calculées à partir de la théorie électronique, et l'accord entre la théorie et l'expérience est très satisfaisant. Le point de départ du calcul est l'hypothèse de l'existence dans

le tungstène d'électrons libres, soumis à un mouvement désordonné d'agitation thermique analogue à celui des molécules d'un gaz. Dans ce mouvement, un certain nombre d'entre eux franchissent, à chaque instant, la surface du métal ; il se crée ainsi au voisinage du filament un champ électrique, qui va en décroissant à mesure qu'on s'en écarte, et qui rappelle les électrons vers l'intérieur du métal. Si l'on crée, à l'aide de la plaque, un champ extérieur faible dirigé vers le filament, ceux des électrons qui ont quitté le métal incandescent avec de grandes vitesses peuvent échapper à son attraction, et atteindre la plaque ; lorsqu'on augmente le champ extérieur, il compense le champ d'attraction en des points qui sont de plus en plus rapprochés du filament, et il peut capter de plus en plus d'électrons. Mais il ne peut pas en capter davantage qu'il n'en sort du filament : lorsque le potentiel de plaque a atteint une valeur suffisante, la plaque reçoit tous les électrons qui sortent du filament le courant qu'ils transportent est le courant de saturation, il n'augmente pas lorsqu'on augmente le potentiel. Si l'on augmente la température du filament, l'agitation thermique des électrons qu'il contient augmente : le nombre des électrons qui le quittent pendant une seconde augmente, et l'intensité du courant de saturation augmente.

359. Lampe-valve. — Lorsqu'on porte la plaque à des potentiels alternativement positifs et négatifs, il ne passe de courant dans le circuit de plaque que lorsque la plaque est positive ; le courant va toujours dans le circuit extérieur du filament à la plaque. Le système *filament-plaque* constitue un redresseur parfait pour le courant alternatif. Si la distance du filament à la plaque est de l'ordre du centimètre, et leur différence de potentiel de l'ordre de 100 volts, les électrons vont du filament à la plaque en un temps qui est de l'ordre du milliardième de seconde : les variations de l'intensité du courant i suivent instantanément celles de la différence de potentiel V, même s'il s'agit d'une différence de potentiel à très haute fréquence.

Les lampes-valves, ou *kénotrons*, sont actuellement très souvent employées pour redresser les courants alternatifs. En donnant au filament une surface suffisante, on peut obtenir des courants redressés de plusieurs ampères. La puissance redressée est d'autant plus grande que la différence de potentiel appliquée est plus élevée ; elle est toujours inférieure à la puissance consommée, une partie de l'énergie, qui est au moins de 10 à 20 %, étant employée à échauffer la plaque par le bombardement électronique. La plaque P doit donc être assez massive pour que sa température ne s'élève pas exagérément ; on lui donne généralement la forme d'un cylindre assez épais, entourant le filament qui est constitué par un fil de tungstène enroulé en hélice. On construit couramment des lampes-valves redressant une puisance d'un kilowatt sous une différence de potentiel de l'ordre de 2.000 à 15.000 volts ; en refroidissant artificiellement la plaque par un courant d'eau, on est arrivé à redresser dans une lampe une puissance de 60 à 70 kilowatts sous 8.000 volts.

La figure 425 représente un kénotron capable de donner des courants parfaitement redressés, de plusieurs milliampères, avec des différences de potentiel alternatives dont la valeur maximum est de l'ordre de 200.000 volts. Pour que les forces électrostatiques qui agissent sur le filament ne risquent pas, en le déformant, de l'amener sur la plaque, on l'entoure d'un anneau a, réun métalliquement à l'une de ses extrémités : la différence de potentiel filament-

plaque est presque entièrement localisée dans l'espace extérieur à l'anneau, et le champ électrique au voisinage du filament est considérablement réduit. D'autre part, l'ampoule doit être assez volumineuse, pour éviter qu'il ne jaillisse des étincelles le long du verre entre les deux bornes *f* et *p* auxquelles est appliquée la différence de potentiel alternative. Dans l'usage de ces appareils,

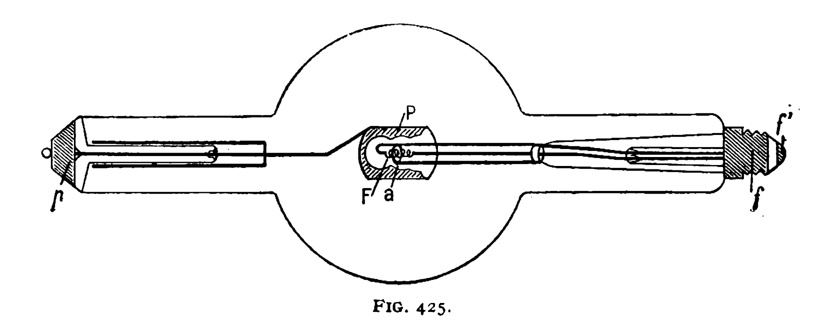


FIG. 425.

le circuit de chauffage, qui a une borne *f* commune avec le circuit à haute tension, doit être soigneusement isolé : la batterie de chauffage et le rhéostat de chauffage doivent être placés sur des supports isolants, et le rhéostat doit être manœuvré à distance à l'aide d'une tige isolante.

360. Lampes à trois électrodes (de Forest). — Supposons qu'on place, entre le filament et la plaque, une troisième électrode, constituée par une grille métallique G (*fig.* 426) et qu'on établisse, entre le filament et la grille, une différence de potentiel *v*. Faisons varier cette différence de potentiel, en laissant constants la température du filament et le potentiel de plaque V, et construisons la courbe, dite **caractéristique de plaque,** qui représente les variations du courant de plaque *i* en fonction du potentiel de grille *v* (*fig.* 427).

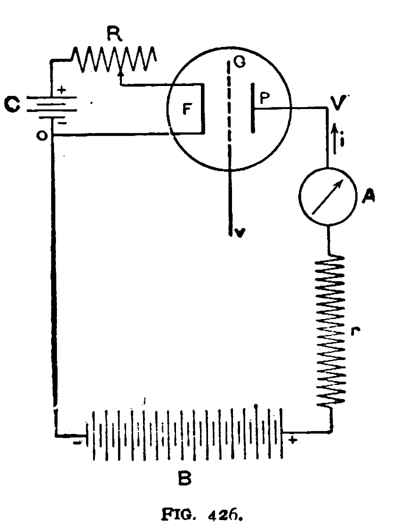


FIG. 426.

Si la grille est chargée négativement, elle repousse vers le filament les électrons qui en sortent; si sa charge négative est suffisante, aucun électron ne peut la franchir, et la plaque ne reçoit aucun courant : pour un potentiel de grille inférieur à une valeur négative — v_0, le courant de plaque est nul. A mesure que *v* croît à partir de — v_0, la grille laisse passer de plus en plus d'électrons, et la caractéristique est une courbe ABC, tangente en A à l'axe des *v*. Lorsque la grille devient positive, elle agit comme agissait la plaque dans la lampe-valve; le nombre d'électrons qui la franchit augmente avec *v*, et on finit par obtenir le cou-

rant de saturation : la caractéristique, après avoir présenté une partie rapidement ascendante BD, se termine par une branche horizontale DE.

Lorsque la grille est négative, elle ne peut recevoir aucun électron; lorsqu'elle est positive, elle n'en reçoit qu'un très petit nombre, car la plupart des électrons passent entre ses mailles et vont jusqu'à la plaque : *le courant de grille est toujours faible par rapport au courant de plaque.* Les lois de sa variation sont celles que nous avons étudiées au paragraphe 358 : la **caractéristique de grille** OG part du point O tangentiellement à l'axe des v. Dans les modèles courants de lampes à trois électrodes, le courant de plaque est de l'ordre de plusieurs milli-

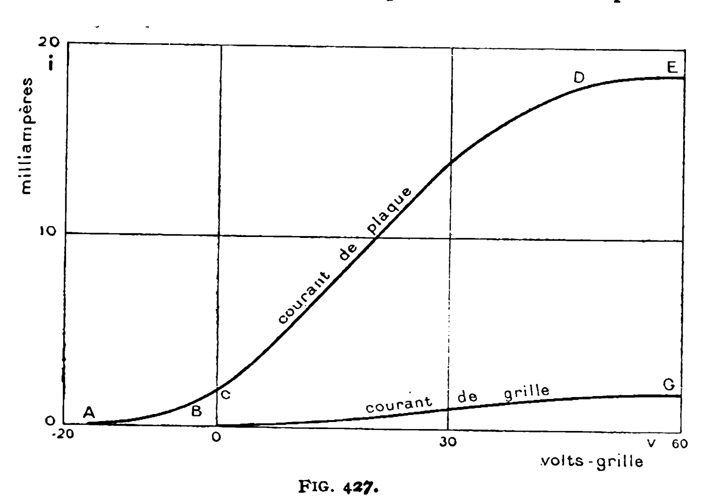


FIG. 427.

ampères, le courant de grille est de l'ordre d'une fraction de milliampère.

Pour les potentiels de grille négatifs, le courant de grille est nul : la grille, une fois chargée négativement, conserve indéfiniment sa charge; pour faire varier son potentiel de 0 à $-v_0$, il suffit de lui fournir, une fois pour toutes, la quantité d'électricité nécessaire à la charger électrostatiquement : moyennant cette dépense infime d'électricité, on peut faire tomber le courant de plaque d'une valeur OC de plusieurs milliampères à une valeur nulle. On peut effectivement, si l'on dispose d'une lampe dans laquelle le vide soit suffisamment poussé, et si la borne avec laquelle communique la grille est parfaitement isolée, réaliser l'expérience en chargeant la grille négativement par le contact du bâton d'ébonite électrisé. Si l'on approche ensuite de la borne de grille une baguette de quartz électrisée positivement par frottement, on décharge la grille par influence, en attirant sur la borne extérieure l'électricité négative qu'elle portait : on constate que le courant de plaque est rétabli; si l'on écarte et que l'on rapproche la baguette de quartz, l'aiguille du milliampèremètre suit ses mouvements. On peut dire que *la lampe amplifie les courants électriques* que représentent ces mouvements, et transforme ces courants, qui sont de l'ordre de quelques unités électrostatiques, en courants de plusieurs milliampères.

Le travail qu'on dépense contre les forces électrostatiques en déplaçant la baguette de quartz suffit à faire mouvoir l'aiguille du milliampèremètre; au prix d'une dépense d'énergie infime, on provoque l'apparition dans le cir-

cuit de plaque d'une énergie relativement considérable, fournie par la batterie d'accumulateurs B (*fig.* 426) : la lampe joue le rôle d'un interrupteur, que l'on commande avec une dépense de travail très faible, et qui manœuvre l'énergie de la batterie B. L'énergie ainsi manœuvrée est transformée en chaleur par effet Joule dans le circuit, en travail mécanique dans le mouvement de l'ampèremètre A ; elle peut être transportée dans un autre circuit couplé avec le circuit de plaque, par exemple par induction mutuelle; mais si les chutes de potentiel ohmiques et les f. é. m. d'induction dans le circuit de plaque sont faibles par rapport à la f. é. m. de la batterie B, l'énergie est presque entièrement transformée en chaleur dans la plaque par le bombardement électronique.

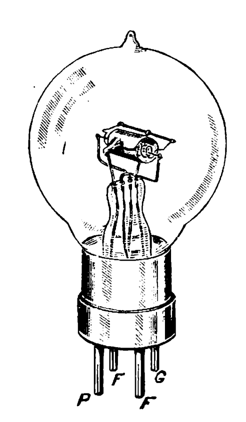


FIG. 428.

361. Applications. — On peut prendre comme schéma de la lampe à trois électrodes le modèle ancien représenté par la figure 428 : le filament F est un filament de tungstène rectiligne; la grille G est une hélice en fil de nickel disposée autour du filament, et la plaque P est un cylindre de nickel qui entoure le tout. Les deux extrémités du filament, la grille et la plaque communiquent avec quatre broches, qui traversent le culot de la lampe, et permettent de la placer facilement sur une douille spéciale. C'est à une lampe de ce type, à un courant de chauffage de 0,63 ampère et à un potentiel de plaque de 80 volts, que correspondent les caractéristiques de la figure 427.

FIG. 429.

Supposons qu'on établisse entre le filament et la grille une différence de potentiel alternative, dont la valeur maximum soit de l'ordre du millivolt, en les réunissant, par exemple, à deux points d'un circuit oscillant. Le potentiel de grille varie entre les deux valeurs O*m* et O*m*', et le courant de plaque varie (*fig.* 429) entre les deux valeurs représentées par *m*M et *m*'M' : on a superposé dans le circuit de plaque, au courant continu i_0 représenté par OC, un courant alternatif dont l'intensité maximum *i*, représentée par C*p*, est de l'ordre du milliampère. La grille ne consomme aucun courant quand elle est négative ; elle consomme, quand elle est positive, un courant *m*N de l'ordre des micro-ampères ; il suffit de disposer, dans le circuit oscillant primitif, d'un courant alternatif de quelques micro-ampères pour obtenir dans le circuit de plaque un courant alternatif de plusieurs milliampères : la lampe fonctionne en **lampe amplificatrice.**

Entre deux points du circuit de plaque, séparés par une certaine résistance *r*

(*fig.* 426), il existe une différence de potentiel alternative $v = ir$; on peut facilement réaliser un montage tel que cette différence de potentiel soit 5 à 10 fois plus grande que celle qui est appliquée à la grille; on peut l'appliquer à la grille d'une seconde lampe, et obtenir ainsi une nouvelle amplification : on réalise facilement des **amplificateurs** à 3 et 4 étages. Comme les variations du courant de plaque suivent instantanément celles du potentiel de grille, on peut aussi bien amplifier des courants de haute fréquence que des courants de fréquence musicale, des courants sinusoïdaux que des courants pseudo-périodiques amortis, ou que les courants continus d'intensité variable correspondant à la réception des signaux Morse : les amplificateurs sont employés aussi bien dans la téléphonie ordinaire que dans la télégraphie sans fil. Dans la mesure des courants de haute fréquence (§ 318), on peut amplifier le courant de haute fréquence primitif, ou bien on peut amplifier le courant de basse fréquence obtenu après détection; en combinant les deux amplifications, on a pu réaliser des appareils comportant jusqu'à 10 lampes successives, et donnant finalement une amplification considérable.

Reprenons le schéma de l'amplification donné par la figure 429 : le courant de grille, dont l'intensité maximum mN correspond à une différence de potentiel Om, emprunte au circuit oscillant primitif une puissance de l'ordre du microwatt. Si le courant de plaque est fourni par une batterie de 80 volts, le courant alternatif i met en jeu une puissance de l'ordre du dixième de watt. Une partie de cette puissance peut être restituée au circuit oscillant primitif, par exemple en le couplant par induction mutuelle avec le circuit de plaque, et entretenir ses oscillations en compensant à la fois l'énergie qu'il fournit à la grille et celle qu'il perd par son amortissement. On réalise ainsi des **oscillateurs à lampes**, qui permettent d'obtenir des oscillations entretenues parfaitement régulières, depuis les fréquences musicales des sons les plus graves jusqu'aux fréquences de l'ordre de 10^{10} (cf. § 454).

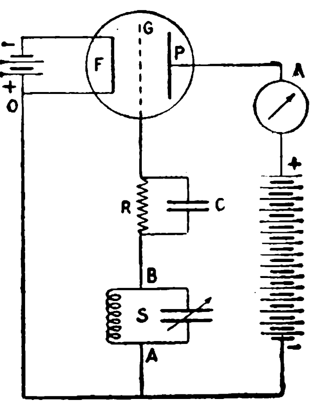


FIG. 430 *a*.

Dans la plupart des appareils employés en haute fréquence, l'une des lampes fonctionne comme **lampe détectrice**, c'est-à-dire transforme le courant alternatif en courant redressé. Il suffirait, pour redresser le courant, d'employer une lampe-valve, c'est-à-dire d'établir la différence de potentiel alternative entre filament et plaque, sans utiliser la grille. Mais il est plus avantageux de profiter de l'amplification que peut fournir l'emploi de la grille : la différence de potentiel alternative sera appliquée sur la grille dans des conditions telles qu'elle produise un courant de grille redressé, et la lampe amplifiera, sur la plaque, le courant ainsi obtenu. Il faut, pour obtenir un courant de grille redressé, que le point de fonctionnement de la lampe corresponde à une partie de la caractéristique de grille présentant une courbure notable : on obtient ce résultat, par le montage que représente la figure 430 *a*, en réunissant la grille par l'intermédiaire de la grande résistance R, de 3 à 4 mégohms, au pôle positif O de la batterie de 4 volts qui alimente le chauffage du filament. La

grille, ainsi chargée positivement, débite un courant i, et son potentiel est le potentiel du point O, diminué de la chute de potentiel ohmique iR dans la résistance R; à cause de la grande valeur de R, il se fixe à une valeur très faible, et le point de fonctionnement se trouve en N, sur la partie courbe de la caractéristique de grille voisine de son origine (*fig.* 430 *b*).

Supposons alors qu'on ajoute au potentiel de grille la différence de potentie alternative créée entre les points A et B par l'établissement des oscillations dans le circuit oscillant S : c'est ce que réalise le dispositif, dit du *condensateur shunté*, de la figure 430 *a*, grâce à l'emploi de la petite capacité C, de quelques cent-millièmes de microfarad, qui permet aux oscillations d'atteindre la grille sans avoir à traverser la résistance R. La superposition du potentiel alternatif au potentiel continu On fait osciller le potentiel de grille entre deux valeurs Op et Op' (*fig.* 430 *b*), auxquelles correspondent des courants de grille Oq et Oq' dont la valeur moyenne $i' =$ Or' est supérieure, à cause de la courbure de la caractéristique de grille, à la valeur initiale O$r = i$; il en résulte que la chute de potentiel ohmique Ri' produite par le passage du courant continu dans la résistance R augmente, et que le potentiel moyen de grille s'abaisse. L'ensemble de la figure formée par les points N, P, P' se déplace vers la gauche sur la caractéristique de grille, le potentiel moyen de grille se fixe à une certaine valeur représentée par On_1, et le courant de plaque passe de la valeur représentée par l'ordonnée primitive Om de la caractéristique de plaque à la valeur représentée par l'ordonnée Om_1 : il y a détection par diminution du courant de plaque et cette diminution est très supérieure à la variation du courant de grille.

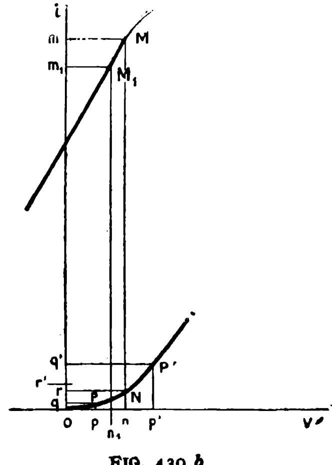


FIG. 430 *b*.

Ici encore, la lampe fonctionne comme un relai, qui manœuvre un courant de plaque relativement intense en ne consommant sur la grille qu'un courant extrêmement faible; l'énergie empruntée au circuit oscillant est pratiquement négligeable, elle n'augmente pas son amortissement, et il reste capable, malgré la présence du détecteur, de fournir une résonance très aiguë : c'est cette possibilité d'amélioration de la syntonie (cf. § 457) qui est le gros avantage de la détection par lampe. Ajoutons que le relai agit pratiquement sans inertie : le temps nécessaire à l'établissement du nouveau potentiel de grille, lorsqu'on amorce ou qu'on supprime les oscillations, est le temps nécessaire à la charge ou à la décharge du condensateur C à travers la résistance R. Ce temps est extrêmement court, grâce à la très petite valeur de la capacité C : avec les valeurs que nous avons indiquées, la constante de temps, $\tau =$ CR, est de l'ordre du dix-millième de seconde et est par suite assez courte pour permettre au courant détecté de suivre même des modulations à fréquence musicale.

CHAPITRE XXXIV

ETUDE DES COURANTS DANS LES GAZ

I. — *LES IONS GAZEUX*

362. Hypothèse de l'ionisation. — On sait depuis longtemps que les gaz ne sont pas des isolants parfaits : Coulomb avait déjà remarqué que la déperdition qu'on observe dans les expériences d'électrostatique ne se fait pas entièrement par les supports, mais aussi par l'air. Mais le mécanisme de la conductibilité des gaz n'a pu être étudié que lorsqu'on a su rendre les gaz beaucoup plus conducteurs qu'ils ne le sont naturellement : parmi les phénomènes susceptibles de produire cet effet, citons l'action des rayons X (§ 385) et celle des rayonnements émis par les substances radioactives (chap. XXXVII).

Il est naturel de supposer que le mécanisme du passage du courant à travers un gaz est le même que celui du passage du courant à travers un électrolyte : lorsqu'un gaz est traversé par un faisceau de rayons X, le gaz est **ionisé**, c'est-à-dire qu'il s'y produit en nombre égal des centres chargés positivement, qu'on appelle des *ions positifs*, et des centres chargés négativement, qu'on appelle des *ions négatifs*. Si l'on place dans le gaz deux conducteurs, entre lesquels on établit une différence de potentiel, les ions positifs sont attirés par le conducteur chargé négativement et les ions négatifs par le conducteur chargé positivement : il s'établit un courant entre les deux électrodes.

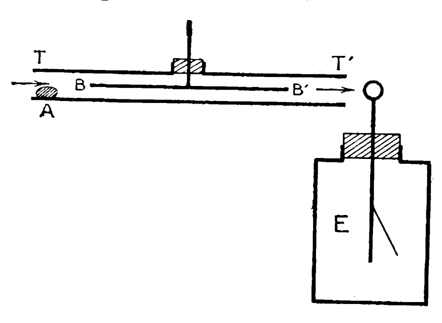


FIG. 431.

Parmi les expériences qui justifient l'hypothèse de l'ionisation, nous pouvons citer la suivante : un courant gazeux traverse un tube métallique assez long TT′, dans l'axe duquel est placée une électrode isolée BB′ (*fig.* 431); il est ionisé à l'entrée du tube par une ampoule radioactive A, et sort du tube dans le champ électrique qui existe entre la boule et la cage d'un électroscope E. Si l'électrode BB′ est réunie électriquement au tube, on constate que l'électroscope, préalablement chargé, se décharge : le courant gazeux a transporté au voisinage de l'électroscope les ions formés au voisinage de l'am-

poule A. Mais, si on établit une différence de potentiel V assez forte entre l'électrode BB′ et le tube TT′, l'électroscope ne se décharge plus : les ions ont été captés par le champ électrique qu'on a établi dans le tube, et sont venus perdre leurs charges sur le tube TT′ ou sur l'électrode BB′.

Citons encore une autre expérience : on charge un électroscope E (*fig.* 432), par exemple négativement, et on recouvre sa boule d'un chapeau de paraffine C. On fait passer un faisceau de rayons X à proximité de l'appareil : l'électroscope semble se décharger ; mais si, après avoir supprimé le faisceau ionisant, on retire le chapeau C, on constate que l'électroscope a conservé sa charge, et que la paraffine porte une charge positive qui agissait sur lui par influence. Les ions positifs étaient attirés par la charge négative de la boule, mais ils ne pouvaient pas l'atteindre, et venaient se fixer à la surface de l'isolant.

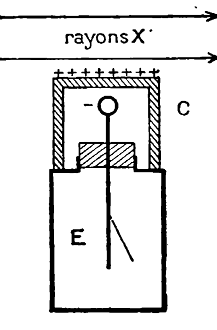


FIG. 432.

363. Condensation de la vapeur d'eau : mesure de la charge de l'ion gazeux. — Si l'on détend adiabatiquement de l'air saturé de vapeur d'eau, de façon à lui faire occuper un volume final égal à x fois le volume initial, l'air se refroidit et la vapeur d'eau devient sursaturante. Si l'air n'est pas ionisé et est bien dépourvu de poussières, il n'y a condensation que si la sursaturation est très forte : on n'observe la formation d'un nuage de gouttelettes d'eau liquide que pour des valeurs du rapport de détente x supérieures à 1,38.

Si l'on ionise le gaz au moment de la détente par l'action d'un faisceau de rayons X ou par le rayonnement d'un sel de radium, on constate que la sursaturation cesse beaucoup plus facilement, et qu'il se forme un brouillard, d'autant plus intense que l'ionisation est plus forte, dès que le rapport de détente atteint 1,25 (C. T. R. Wilson, 1897). *Les ions provoquent la condensation de la vapeur d'eau sursaturante, chacun d'eux devenant le centre d'une goutte d'eau.* Pour montrer que l'action est bien due aux ions, on produit l'ionisation entre deux plateaux métalliques, et on établit entre eux un champ électrique intense, de l'ordre de 100 volts par centimètre : les ions sont captés par les plateaux au fur et à mesure de leur formation, il n'en reste que très peu dans le gaz, et on constate qu'il ne se forme plus qu'un nuage extrêmement léger.

Les brouillards obtenus dans ces expériences tombent lentement, et on peut mesurer leur vitesse de chute : par l'application des lois de la viscosité des gaz, on peut en déduire le rayon des gouttes, ainsi que leur poids mg. En formant le brouillard dans un champ électrique vertical, on peut, ainsi que nous l'avons expliqué au paragraphe 348, déduire la charge des gouttes, c'est-à-dire celle des ions qui leur ont servi de noyaux de condensation, de l'observation de la vitesse de chute avec ou sans champ (H. A. Wilson, 1903). On trouve qu'elle est égale à la charge élémentaire, aussi bien pour l'ion positif que pour l'ion négatif.

Ces expériences, antérieures à celles de Millikan, sont moins précises qu'elles, car le pointé du bord supérieur d'un brouillard est moins précis que celui d'une goutte isolée ; elles n'en sont pas moins importantes, car ce sont elles

qui ont conduit à l'hypothèse de l'identité de la charge des ions électrolytiques et des ions gazeux.

364. Conductibilité des gaz ionisés. — Pour étudier la conductibilité d'un gaz ionisé, on place ce gaz entre deux plateaux P_1, P_2 (*fig.* 433), entre les-

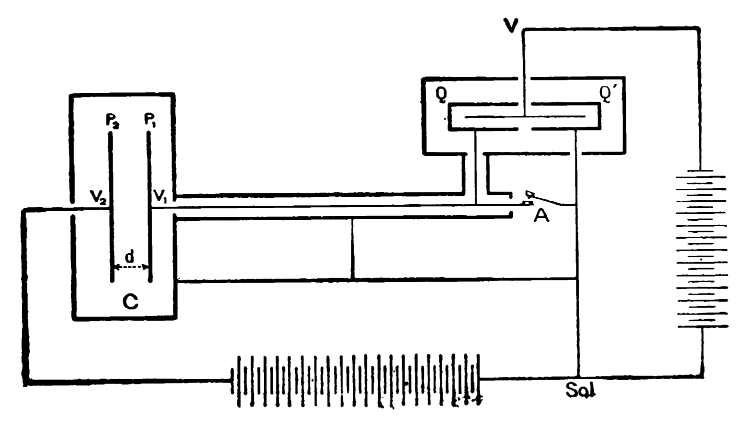


Fig. 433.

quels on établit une différence de potentiel $V_2 - V_1$, et on mesure le courant I qui passe d'un plateau à l'autre. Les courants obtenus sont toujours très faibles, de l'ordre de 10^{-10} ampères au plus pour des ionisations fortes, quelquefois de l'ordre de 10^{-14} ampères seulement : on les mesure par les procédés décrits au paragraphe 87, à l'aide d'un électroscope ou d'un électromètre à quadrants. La figure 433 représente le schéma d'un des montages qu'on peut employer : lorsqu'on rompt le contact A, la paire de quadrants Q, primitivement au même potentiel que la paire de quadrants Q', se charge; le conducteur isolé qu'elle constitue avec le plateau P_1 reçoit par seconde une charge égale à I; son potentiel s'accroît par seconde d'une quantité proportionnelle à I, et la vitesse de déviation de l'aiguille est proportionnelle au courant I. Rappelons qu'on doit, pour que les mesures aient un sens, entourer tous les conducteurs d'une cage métallique continue (§ 41) : la chambre fermée C, qui contient les deux plateaux P_2, P_1, et à l'intérieur de laquelle on produit l'ionisation des gaz, s'appelle une **chambre d'ionisation.**

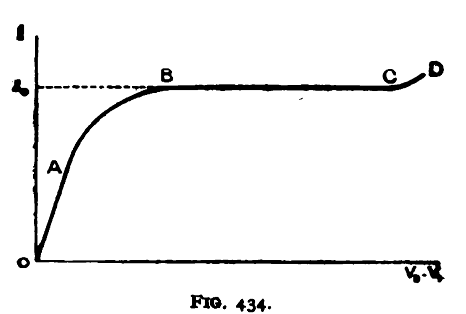


Fig. 434.

Supposons que l'ionisation soit produite uniformément dans tout le volume compris entre les plateaux, P_1, P_2; lorsqu'on fait croître à partir de zéro la différence de potentiel $V_2 - V_1$ l'intensité I croît d'abord proportionnellement à cette différence de potentiel,

puis elle croît moins vite, et atteint, pour des potentiels de l'ordre de quelques centaines de volts par centimètre, une valeur limite I_0 : ces variations sont représentées par la courbe OABC de la figure 434. Si l'on augmente trop la différence de potentiel, et qu'on s'approche du potentiel explosif, l'intensité du courant croît à nouveau; nous supposerons pour le moment qu'on reste toujours suffisamment loin des conditions de la décharge disruptive pour que ce dernier phénomène n'intervienne pas (voir § 369).

Le caractère essentiel des courants dans les gaz ionisés est le fait que, lorsqu'on augmente la différence de potentiel, le courant atteint une intensité limite I_0; *pour des potentiels suffisamment élevés, son intensité est indépendante de la valeur de la différence de potentiel.* On dit alors qu'on a atteint la saturation, et le courant I_0 s'appelle le **courant de saturation.**

La théorie des ions permet facilement d'expliquer les différentes particularités de la courbe du courant. Supposons que le rayonnement ionisant produise, par seconde, dans chaque centimètre cube du gaz compris entre les plateaux P_2, P_1, p ions de chaque signe. En l'absence de champ électrique, le nombre des ions contenus dans le gaz n'ira pas en augmentant indéfiniment : les ions sont animés, comme les molécules du gaz, de mouvements désordonnés; il peut arriver qu'un ion positif et un ion négatif viennent à se rencontrer, et les conditions du choc peuvent être telles qu'ils se recombinent pour redonner une molécule neutre. Ces collisions, et les *recombinaisons des ions* qui en résultent, sont d'autant plus nombreuses qu'il y a davantage d'ions dans le gaz : il vient un moment où elles font disparaître, par seconde et par centimètre cube, autant d'ions qu'il s'en forme. L'équilibre statistique est alors atteint, et, à partir de ce moment, le gaz renferme un nombre d'ions constant; soit n le nombre d'ions de chaque signe que contient chaque unité de volume.

Si l'on établit entre les plateaux un champ électrique E, les ions se déplacent; le gaz oppose une résistance à leur mouvement, et on peut admettre que leur vitesse est proportionnelle au champ. Nous désignerons par k_1E la vitesse des ions positifs, par k_2E celle des ions négatifs; les coefficients k_1 et k_2 sont les **mobilités des ions.** Si le champ électrique est très faible, le déplacement des ions est très lent, et modifie peu leur concentration; on peut admettre qu'il y a toujours n ions positifs et n ions négatifs par centimètre cube. Les nombres d'ions des deux signes qui traversent par seconde une surface de 1 centimètre carré normale au champ sont k_1nE et k_2nE, et la charge qu'ils transportent, c'est-à-dire l'intensité i du vecteur courant dans le gaz, est (cf. § 165) :

$$i = (k_1 + k_2)\, neE.$$

Si la surface des plateaux est S et leur distance d, le courant total a pour intensité :

$$I = iS = (k_1 + k_2)\, ne \frac{S}{d} (V_2 - V_1).$$

Pour une ionisation en volume uniforme et une différence de potentiel faible, l'intensité du courant dans le gaz est proportionnelle à la différence de potentiel [1];

[1] Dans le cas du courant thermoionique étudié au paragraphe 358 (*fig.* 424), l'intensité croissait plus vite que la différence de potentiel. Cela tient à ce que les ions qui transportent le courant

elle varie en raison inverse de la distance des plateaux. Le gaz se comporte comme un conducteur métallique, de conductibilité $\sigma = (k_1 + k_2)\, ne$.

Lorsque le champ devient plus intense et que les ions se déplacent rapidement, on ne peut plus admettre que la concentration du gaz en ions reste constante. Il est évident qu'il y a une valeur limite que l'intensité du courant ne peut pas dépasser : c'est celle qui est obtenue quand tous les ions produits dans le gaz atteignent les plateaux, c'est-à-dire quand le temps qu'ils mettent pour aller du point où ils sont produits jusqu'à un plateau est trop court pour qu'il puisse y avoir des phénomènes de recombinaison. Chaque plateau reçoit alors par seconde, quelle que soit la valeur de la différence de potentiel, pSd ions portant une charge $pSde$. Le courant correspondant est le courant de saturation, et son intensité est :

$$I_0 = pSde.$$

L'intensité du courant de saturation est proportionnelle au nombre des ions produits par seconde dans le condensateur ; elle mesure l'intensité de l'ionisation.

Si l'on écarte les plateaux, l'ionisation restant uniforme et le nombre d'ions produits par unité de volume restant constant, l'intensité I_0 *du courant de saturation augmente* : il y a là une nouvelle différence entre les courants produits dans les gaz ionisés par des différences de potentiel assez élevées et les courants de conduction ordinaires.

365. **Mesure de la mobilité des ions.** — Les mobilités k_1 et k_2 sont susceptibles de mesures directes ; différentes méthodes ont été employées

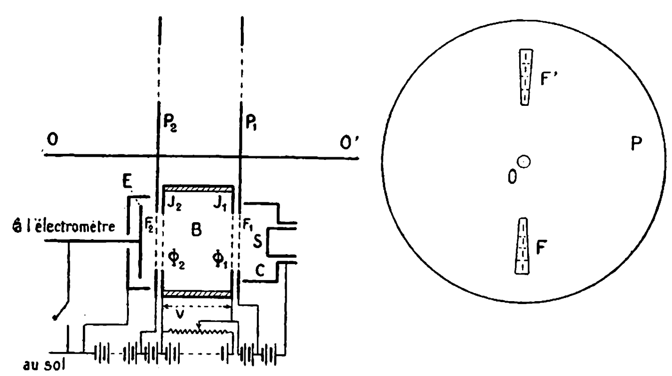


FIG. 435.

nous nous bornerons à indiquer le principe de l'une des plus récentes (Laporte, 1927). Les ions, formés en S dans une chambre d'ionisation C (*fig.* 435), peuvent pénétrer dans une boîte B, puis en sortir pour atteindre l'électrode E reliée à l'électromètre, à condition de traverser des fenêtres grillagées F_1, Φ_1, Φ_2, F_2, ménagées dans les deux joues J_1, J_2 de la boîte B et dans deux plateaux P_1 P_2, solidaires l'un de l'autre et tournant autour d'un axe OO'. Les diffé-

thermoionique sont créés uniquement au voisinage de l'une des électrodes, tandis que nous étudions ici des courants transportés par des ions créés dans tout l'espace qui sépare les électrodes.

rentes pièces C, P_1, J_1, J_2, P_2, E, sont portées, par des petits accumulateurs, à des potentiels convenablement étagés, de façon qu'il existe entre elles des champs électriques entraînant les ions d'un certain signe depuis la chambre C jusqu'à l'électrode de mesure E, tandis que ceux de l'autre signe sont rejetés sur les parois de la chambre C.

Les plateaux P_1, P_2 portent chacun deux fenêtres radiales étroites disposées suivant un même diamètre (*fig.* 435), les joues J_1, J_2 portent chacune une fenêtre d'axe vertical, identique aux fenêtres des plateaux. Lorsque les plateaux sont en rotation, les ions ne peuvent pénétrer dans la boîte que lorsque l'une des fenêtres F_1 se trouve en face de la fenêtre Φ_1; si la longueur de la boîte B est l, et la différence de potentiel entre les bornes V, le champ y est $E = V/l$, la vitesse des ions kV/l, et ils arrivent à la fenêtre Φ_2 au bout d'un temps $t = l^2/kV$. Ils ne peuvent alors sortir que si l'une des deux fenêtres F_2 se trouve précisément en face de Φ_2, c'est-à-dire si les plateaux ont tourné exactement d'un demi-tour pendant le temps t. L'électrode E ne recevra donc de courant que si la période T de la rotation des plateaux est telle que l'on ait :

$$\frac{T}{2} = t = \frac{l^2}{kV}.$$

L'expérience consiste à faire varier soit la vitesse de rotation des plateaux, soit la différence de potentiel V jusqu'à recueillir à l'électromètre un courant aussi intense que possible; la mobilité des ions est alors donnée par la relation :

$$k = \frac{2l^2}{VT}.$$

Par exemple, pour les ions négatifs dans l'air sec, pour $l = 6^{cm},2$, $T = 0{,}56$ sec., on trouve $V = 127$ v., d'où l'on déduit $k_2 = \frac{2 \times 6{,}2^2}{0{,}56 \times 130} = 2{,}09$: la vitesse serait de 2,09 cm/sec. dans un champ d'un volt/cm.

En réalité, lorsqu'on construit les courbes qui représentent les courants reçus pour les diverses valeurs de V, en maintenant T constant, on trouve des courbes beaucoup plus étalées que ne le laisserait prévoir le calcul fait en tenant compte de la largeur des fenêtres. La discussion des expériences montre que, dans tous les cas étudiés, *il existe dans le gaz des ions dont les mobilités ont toutes les valeurs possibles entre deux limites* : par exemple, dans l'air sec, les mobilités des ions négatifs sont comprises entre 1,35 et 3,30 cm/sec/volt/cm; la valeur $k_2 = 2{,}16$, qui correspond au courant le plus intense, est seulement la valeur la plus probable.

Voici pour quelques gaz, sous la pression atmosphérique et à la température ordinaire, les valeurs les plus probables pour les mobilités des ions positifs (k_1) et des ions négatifs (k_2) :

Air sec............	$k_1 = 1{,}27$	$k_2 = 2{,}16$	cm/sec par volt/cm.
Air humide.......	$k_1 = 1{,}47$	$k_2 = 1{,}79$	—
[illegible]........	$k_1 = 1{,}27$	$k_2 = 2{,}16$	—
Gaz carbonique...	$k_1 = 0{,}83$	$k_2 = 0{,}96$	—

366. Nature des ions gazeux. — Dans la théorie électronique, on admet que *la formation d'un couple d'ions provient de la dissociation d'une molécule gazeuse, à laquelle un électron est arraché* ; l'ion négatif est constitué par cet

électron, l'ion positif par le reste de la molécule. Au cours de leurs mouvements désordonnés d'agitation thermique, les électrons et les molécules neutres viennent à se rencontrer, un certain nombre de ces chocs s'effectuent dans des [illegible] telles que l'électron se fixe sur la molécule neutre, et, au bout d'un temps très court, la plupart des ions négatifs sont constitués par des molécules portant un ion supplémentaire. L'ion positif et l'ion négatif, ayant tous deux des dimensions comparables à celles de la molécule, devraient alors avoir même mobilité : mais on admet généralement que la molécule chargée s'entoure par attraction électrostatique d'un cortège de molécules neutres, et que les mobilités que l'on mesure correspondent aux ions polymoléculaires ainsi constitués. Il peut alors y avoir des différences entre les assemblages qui correspondent aux ions des deux signes, et on peut également expliquer par des modifications dans la constitution de l'assemblage les différences de mobilité entre l'air sec et l'air humide : l'addition de vapeur d'eau à l'air provoquerait la fixation de molécules d'eau sur l'ion négatif, ce qui augmente son diamètre et réduit sa mobilité; dans l'ion positif, au contraire, les molécules d'eau se substitueraient à des molécules d'air, ce qui correspond à une diminution de sa masse et à une augmentation de sa mobilité.

Différentes expériences semblent en effet montrer que les mesures de mobilité dans l'air, lorsqu'elles portent sur des ions très fraîchement formés, depuis quelques centièmes de seconde seulement, fournissent les mêmes valeurs pour les ions des deux signes, tandis que les mobilités inférieures à 1,5 ne sont obtenues que pour les ions positifs âgés, formés depuis une ou deux secondes. Mais les auteurs ne sont guère d'accord sur le nombre de molécules que contient l'ion polymoléculaire : pour les uns, il y en aurait quelques dizaines, de sorte qu'une variation d'une unité correspondrait à une variation de mobilité assez faible pour qu'on ait l'impression d'une répartition continue des mobilités autour d'une valeur moyenne; pour les autres, il n'y en aurait qu'un très petit nombre, une à cinq par exemple, ou même seulement une ou deux, mais qui varierait sans cesse au hasard des chocs moléculaires, de sorte que la mesure faite sur un parcours de quelques centimètres ne pourrait donner qu'une mobilité moyenne, à répartition évidemment continue autour de la valeur la plus probable.

Nous avons aujourd'hui un peu plus de renseignements sur la première partie de l'évolution des ions, celle qui correspond à la transformation, pourtant très rapide, de l'électron en un ion négatif monomoléculaire. Nous savons que *c'est là une véritable réaction chimique, qui dépend de la nature de la molécule et de son affinité pour l'électron;* c'est ainsi par exemple que l'affinité de l'azote pour l'électron est pratiquement nulle, tandis que celle de l'oxygène est considérable, de sorte que tous les ions négatifs dans l'air sont des ions d'oxygène : c'est ce qui explique que la mobilité des ions négatifs de l'air soit exactement la même que celle des ions négatifs de l'oxygène. L'affinité des gaz rares pour les électrons est nulle ; dans l'argon pur à la pression atmosphérique, la mobilité des ions négatifs atteint, pour les champs faibles, la valeur exceptionnellement grande $k_2 = 29.000$ cm/sec par volt/cm : une telle valeur correspond nécessairement à des centres chargés de très petites dimensions, qui ne peuvent être que des électrons libres. L'expérience montre également l'existence à la pression atmosphérique d'électrons libres dans l'azote ($k_2 = 17000$) et dans l'hydrogène ($k_2 = 6.700$). Mais ces mobilités sont très sensibles

aux moindres traces d'impuretés, et il suffit par exemple de l'addition de faibles quantités d'oxygène pour faire pratiquement disparaître tous les électrons libres par formation d'ions négatifs d'oxygène.

On a pu évaluer le nombre de chocs que doit subir l'électron avant sa combinaison avec la molécule neutre. Ce nombre dépend de la pression et de la valeur du champ, et nous n'indiquerons que son ordre de grandeur : pour l'oxygène, il y a un choc sur 10.000 qui est suivi de combinaison ; pour l'air, qui contient une molécule d'oxygène pour quatre d'azote, il y en a un sur 50.000 ; pour le gaz carbonique il y en a un sur 15 millions ; dans l'hydrogène, l'azote, les gaz rares, il n'y en a aucun. Pour juger de la signification de ces nombres, on n'oubliera pas qu'une molécule d'un gaz à la pression atmosphérique subit plusieurs milliards de chocs par seconde ; dans l'air, ce n'est qu'aux très basses pressions qu'il apparaîtra des électrons libres ; on trouve en effet que, jusqu'à une pression de 0 ^{mm},15, la mobilité des ions négatifs varie en raison inverse de la pression, mais que, pour des pressions plus basses, elle subit une augmentation plus rapide, indiquant l'apparition d'électrons libres.

Les valeurs des mobilités données à la fin du paragraphe précédent sont relatives aux *petits ions*, qui se forment normalement dans l'ionisation par les rayons X ou les substances radioactives. Au cours de certaines réactions chimiques, par exemple dans l'oxydation lente du phosphore à l'air, ou encore lorsqu'on fait barboter de l'air dans l'eau ou qu'on pulvérise de l'eau dans l'air, il se forme des ions dont les mobilités, très variables, peuvent être mille fois plus petites : ce sont de *gros ions*, constitués par le groupement, autour de la molécule centrale chargée, d'un nombre de molécules neutres qui peut atteindre plusieurs centaines.

II. — *IONISATION PAR CHOCS*

367. Potentiel d'ionisation. — Lorsque, dans l'étude du courant dans un gaz, on donne à la différence de potentiel entre les électrodes une valeur très élevée, on peut obtenir (courbe CD de la figure 434, § 364) un courant plus intense que le courant de saturation. Les électrodes reçoivent alors un nombre d'ions supérieur au nombre d'ions créés par le rayonnement ionisant : on admet (Townsend) que les ions primitifs, lancés avec une grande vitesse par le champ électrique, sont susceptibles, lors de leurs chocs sur les molécules neutres, de les briser, et d'en arracher un électron, c'est-à-dire de produire de nouveaux ions. Ce phénomène est appelé l'**ionisation par chocs**; ses lois sont encore mal connues; elles dépendent de la nature de l'ion qui le provoque et de la nature du gaz où il se produit. Nous indiquerons seulement quelques résultats expérimentaux, relatifs au cas où l'ionisation est produite par des électrons lancés avec de faibles vitesses dans un gaz raréfié.

On admet que, pour qu'un électron puisse, par son choc contre un emol écule, ioniser cette molécule, il faut qu'il possède une énergie cinétique $mv^2/2$ supérieure ou au moins égale à une certaine valeur W ; s'il y a ionisation, une énergie cinétique égale à W disparaît au moment du choc : elle représente le **travail d'ionisation**, c'est-à-dire le travail qu'il faut dépenser pour faire sortir un électron de la molécule. On peut l'exprimer par la différence de potentiel V

nécessaire pour communiquer à l'électron la force vive W : le potentiel V, donné par la relation $eV = W$, s'appelle le **potentiel d'ionisation** du gaz.

Il peut être mesuré à l'aide du dispositif représenté schématiquement par la figure 436 (Franck et Hertz). Dans un récipient contenant un gaz raréfié, on produit des électrons à l'aide d'un filament incandescent FF′, et on les lance par l'action d'un champ électrique E_1, produit entre le filament et une grille métallique G. Prenons comme zéro des potentiels le potentiel du filament, et désignons par V_1 le potentiel de la grille : les électrons franchissent la grille avec une vitesse mesurée par le potentiel V_1. Dans la seconde partie du récipient, on établit, entre la grille G et une plaque métallique P, portée à un potentiel $V_1 - V_2$, un champ E_2, dirigé en sens inverse de E_1; on choisit la différence de potentiel V_2 assez élevée pour qu'aucun des électrons ne puisse parvenir à la plaque P. S'il n'y a pas production d'ions positifs dans le gaz, un électromètre auquel est reliée la plaque P ne reçoit aucun courant; si au contraire les électrons qui franchissent la grille ont une vitesse suffisante pour ioniser le gaz, il y a production d'ions positifs, qui sont entraînés par le champ E_2 et apportent un courant sur la plaque P. L'expérience consiste à faire varier le potentiel V_1 de la grille, et à mesurer, à l'aide d'un électromètre, le courant reçu par la plaque : le potentiel d'ionisation est égal à la valeur V du potentiel de grille pour laquelle l'électromètre commence à recevoir un courant. On doit opérer dans un gaz très raréfié, à une pression de l'ordre de 1/100 de millimètre de mercure, car, aux pressions ordinaires, les électrons rencontrent des molécules neutres presque immédiatement après leur sortie du filament, alors que leur vitesse est très faible, et se fixent sur elles pour former des ions négatifs.

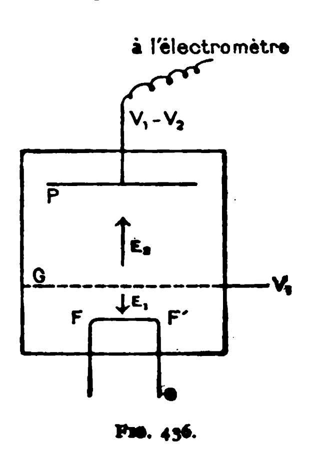


FIG. 436.

Les expériences ont montré que la valeur du potentiel d'ionisation est caractéristique de chaque gaz; elle varie de 5,1 volts pour la vapeur de sodium à 25,4 volts pour l'hélium.

Lorsque le gaz étudié est un gaz monoatomique, le travail d'ionisation W représente le travail qu'il faut dépenser pour faire sortir un électron de l'atome; lorsque cet électron y rentre, par suite de la recombinaison des ions, l'atome doit restituer la même énergie W. On admet qu'il la restitue sous forme de radiations lumineuses; la fréquence la plus élevée qui puisse être émise (cf. § 417) satisfait à la relation d'Einstein, $W = h\nu$, et la longueur d'onde correspondante λ peut être calculée, à partir du potentiel d'ionisation, par la relation :

$$eV = h\frac{c}{\lambda}.$$

Dans le cas de la vapeur de mercure, par exemple, le potentiel d'ionisation est de 10,4 volts, et l'on a constaté, lors de l'ionisation, l'émission du spectre

d'arc complet, dont les séries ont pour limite la longueur d'onde ultra-violette $\lambda = 1.188$ angströms.

La valeur du potentiel d'ionisation, calculée à partir de cette longueur d'onde :

$$V = \frac{hc}{\lambda e} = \frac{6,61 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{1\ 188 \cdot 10^{-8} \cdot 1,6 \cdot 10^{-20}} = 10,4 \cdot 10^{8} \text{ u. é. m.} = 10,4 \text{ volts},$$

est en bon accord avec la valeur observée directement.

368. Potentiel de résonance. — Supposons que, dans un récipient contenant un gaz raréfié monoatomique, par exemple de la vapeur de mercure, on émette des électrons à l'aide d'un filament incandescent FF′ au potentiel V_1 (*fig.* 437), et qu'on recueille ces électrons sur une plaque P, portée à un potentiel V_2 supérieur à V_1. Si on mesure à l'électromètre l'intensité i du courant obtenu, et qu'on construise la courbe qui représente ses variations en fonction de la différence de potentiel $V_2 - V_1$, on constate naturellement qu'elle présente un point anguleux M pour une valeur de cette différence de potentiel égale au potentiel d'ionisation, V = 10,4 volts (*fig.* 438) : il y a en effet à ce moment accroissement brusque du courant par suite de l'ionisation du gaz.

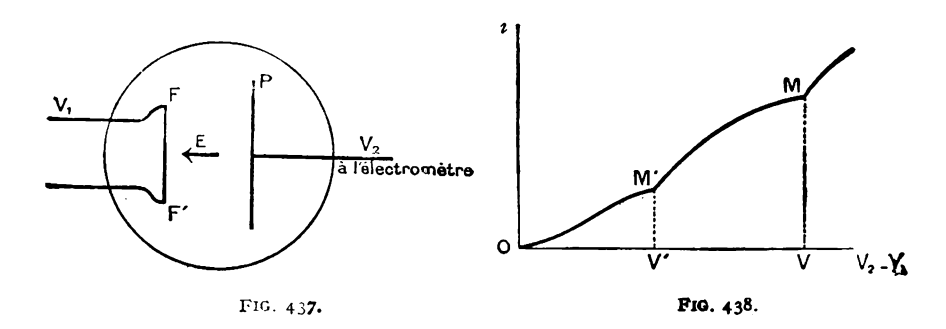


FIG. 437. FIG. 438.

Mais, si la vapeur de mercure n'est pas très raréfiée, la courbe présente un premier point anguleux M′, pour une valeur du potentiel V′ = 4,9 volts, inférieure au potentiel d'ionisation V, et correspondant à une valeur $W' = eV'$ de la force vive des électrons insuffisante pour ioniser l'atome de mercure. On explique ce phénomène en admettant que cet atome peut, en absorbant l'énergie W′, passer de son état normal A à un état différent B, caractérisé par une autre disposition des orbites des électrons qu'il contient ; il peut ensuite, par un nouveau choc, passer de l'état B à un autre état C, et finalement être ionisé par un troisième choc. Le potentiel V′, nécessaire pour faire passer l'atome de l'un à l'autre des deux états A et B dans lesquels il peut exister, s'appelle le **potentiel de résonance.**

L'atome tend à revenir à son état normal A : s'il ne subit pas un second choc presque immédiatement après le premier, il reviendra de l'état B à l'état A en libérant une quantité d'énergie W′ : il y aura apparition d'un rayonnement lumineux, de fréquence ν' donnée par la relation d'Einstein, $h\nu' = eV'$. On constate effectivement, dans le cas de la vapeur de mercure, l'émission de la

raie de résonance ultra-violette $\lambda' = 2.537$ angströms. La valeur du potentiel de résonance, calculée à partir de cette longueur d'onde,

$$V' = \frac{hc}{\lambda' e} = \frac{6,61 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2\,537 \cdot 10^{-8} \cdot 1,6 \cdot 10^{-20}} = 4,88 \cdot 10^{8} \text{ u. é. m.} = 4,88 \text{ volts},$$

est en très bon accord avec la valeur observée expérimentalement.

369. Loi de Paschen. — Lorsqu'on établit entre deux plateaux P_1 et P_2 (*fig.* 439), placés dans un gaz à une pression p, et séparés par une distance d, une différence de potentiel suffisante, une étincelle jaillit entre les deux plateaux. La différence de potentiel nécessaire pour que l'étincelle jaillisse s'appelle le potentiel explosif (cf. § 84).

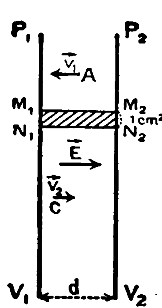


FIG. 439.

Dans la plupart des gaz, on constate, en faisant varier la pression, la température et la distance des plateaux, que *le potentiel explosif entre deux plateaux indéfinis ne dépend que de la masse de gaz contenue entre les deux plateaux, par centimètre carré de leur surface* : c'est la **loi de Paschen.**

Si l'on opère à température constante, et si l'on se contente de l'approximation donnée par la loi de Mariotte, cette masse, qui est la masse de gaz contenue à la pression p dans un cylindre $M_1N_1M_2N_2$ de base 1 et de hauteur d (*fig.* 439), est proportionnelle à pd. On peut alors exprimer la loi de Paschen en écrivant que le potentiel explosif V ne dépend que du produit pd :

$$V = f(pd).$$

Pour des valeurs élevées du produit pd, la courbe qui représente cette fonc-

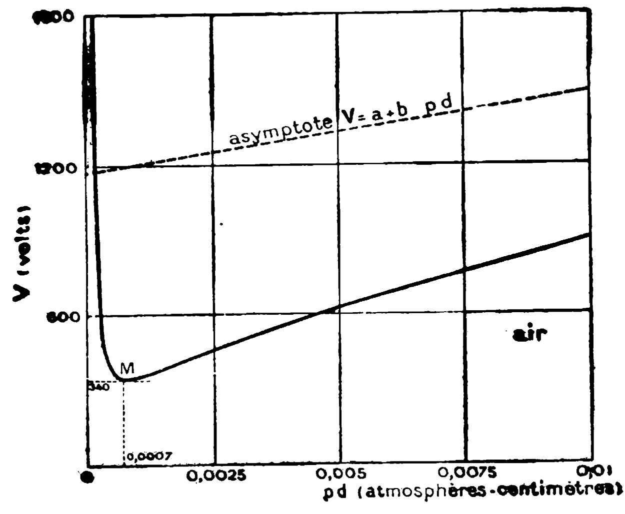


FIG. 440.

tion peut être confondue avec une droite, $V = a + bpd$; dans le cas de l'air,

en mesurant V en volts, d en centimètres, et p en atmosphères, on a $a = 1170$, $b = 32100$; si pd est de l'ordre de 1, on peut même négliger a, et prendre $V = bpd$. Pour des valeurs faibles du produit pd, la courbe a la forme indiquée par la figure 440; elle présente un minimum M : dans le cas de l'air, sa valeur est d'environ 340 volts, et il correspond à une valeur du produit pd d'environ $7 \cdot 10^{-4}$ atm. cm.

On peut considérer que cette même courbe représente les variations du potentiel explosif en fonction de la distance des plateaux, quand on maintient la pression p constante, ou encore qu'elle représente les variations du potentiel explosif entre électrodes fixes ($d = C^{te}$), en fonction de la pression. On voit que, dans ce dernier cas, l'augmentation du potentiel explosif constatée quand la pression décroît au-dessous de la valeur que caractérise le point M correspond au fait que le vide absolu est un isolant parfait.

370. Théorie de la décharge disruptive. — Dans la théorie des ions, on explique la décharge disruptive en admettant qu'il existe toujours entre les plateaux quelques ions, et que le gaz est rendu conducteur par les phénomènes d'ionisation par chocs qu'ils provoquent lorsque le champ électrique devient assez intense.

L'existence d'ions dans l'air normal résulte de l'existence des phénomènes de déperdition : un électroscope, parfaitement isolé à l'ambre, placé dans un vase clos de grandes dimensions, se décharge lentement, quelles que soient les précautions prises pour débarrasser l'air de ses poussières et de ses ions et éviter la présence, dans l'air ou sur les parois du vase, de substances radioactives. On peut déduire le nombre d'ions qui existent dans l'air de la mesure de la charge qu'ils apportent à l'électroscope : l'air de l'atmosphère contient normalement plusieurs milliers d'ions par centimètre cube ; l'air enfermé dans un vase clos ne contient jamais moins de 10 à 20 ions par centimètre cube.

L'ionisation par chocs ne peut amener le passage entre les deux plateaux d'une étincelle, c'est-à-dire d'une quantité d'électricité extrêmement grande par rapport à la charge d'un ion, que si elle est produite par les ions des deux signes. Supposons en effet que seuls les ions négatifs puissent produire l'ionisation, et considérons un ion négatif A qui part du plateau P_2 au potentiel le moins élevé pour se diriger vers le plateau P_1 au potentiel le plus élevé (*fig.* 439) ; il crée sur son chemin de nouveaux ions négatifs, qui se dirigent avec lui vers P_1. Au bout d'un temps très court, tous les ions négatifs ainsi créés, aussi bien que ceux qui préexistaient, seront arrivés sur ce plateau ; il n'y en aura plus dans le gaz, l'ionisation par chocs et le courant cesseront. Il n'en est plus de même si les ions positifs C sont aussi capables de produire l'ionisation par chocs : ceux qui sont produits au voisinage du plateau P_1 par les derniers ions négatifs qui l'atteignent sont entraînés par le champ vers P_2, et créent entre les plateaux de nouveaux ions négatifs, qui peuvent entretenir l'ionisation par chocs et le passage du courant.

Il faut d'ailleurs remarquer qu'on expliquerait ausi bien l'entretien de la décharge en supposant que l'action des ions positifs se réduit à l'arrachement d'électrons du métal du plateau P_2 lors de leur impact sur ce plateau.

On voit que la théorie complète de la décharge disruptive ne pourra être établie que lorsqu'on connaîtra complètement les lois de l'ionisation par

chocs aux différentes pressions, aussi bien pour les ions positifs que pour les ions négatifs. L'hypothèse faite généralement est que l'ion est arrêté complètement lors de son choc sur une molécule, qu'il y ait ionisation ou non; la force vive qu'il possède au moment d'un choc est alors égale au travail de la force électrique qui agit sur lui dans l'intervalle qui sépare deux chocs : si l'on désigne par E le champ, par e la charge de l'ion et par l son libre parcours moyen, c'est-à-dire le chemin qu'il parcourt entre deux chocs, ce travail est égal à Eel. Le libre parcours moyen l est inversement proportionnel à la pression p, et peut être représenté par la quantité $\frac{k}{p}$; le champ E est égal à $\frac{V}{d}$; la force vive de l'ion au moment d'un choc est $\frac{kVe}{pd}$. Si l'on admet que l'ionisation peut avoir lieu lorsque cette force vive est supérieure à une certaine valeur W, on trouvera que la décharge disruptive peut avoir lieu si l'on a $V > \frac{W}{ke} \cdot pd$: c'est la proportionalité du potentiel explosif au produit pd observée pour les valeurs élevées de ce produit.

Ce raisonnement suppose essentiellement que le libre parcours moyen l est petit par rapport à la distance d des plateaux : si les plateaux sont très rapprochés ou si la pression est très basse, il peut y avoir des ions qui aillent de l'un à l'autre plateau sans rencontrer de molécules. On explique ainsi que la valeur du potentiel explosif aille en croissant lorsque le produit pd descend au-dessous de la valeur qui correspond au point M (*fig.* 440). Dans l'air à la pression atmosphérique, on obtient le potentiel explosif minimum pour $d = 7^{\mu}$, alors que le libre parcours moyen est de l'ordre de $0^{\mu},1$: lorsque la distance des plateaux est de l'ordre de $0^{\mu},1$, il y a très peu de chocs entre ions et molécules, et il devient très difficile d'entretenir la décharge.

La loi de Paschen ne s'applique qu'à la décharge entre plateaux indéfinis, ou du moins très larges. Il est évident en effet que les phénomènes sont entièrement modifiés si le champ électrique n'est plus uniforme. En particulier, si l'une des électrodes est une pointe, le champ E est très intense à son voisinage, même pour des valeurs modérées du potentiel V : les phénomènes d'ionisation par chocs peuvent facilement s'y produire et rendre l'air conducteur.

371. Cas des gaz rares. — Si l'on mesure les potentiels explosifs dans les gaz rares — hélium, néon, argon — pris à l'état pur, on obtient des valeurs beaucoup plus faibles que dans l'air : à la pression atmosphérique, elles sont environ cent fois plus faibles, et l'expérience montre qu'elles ne dépendent pas de la pression, tant que le libre parcours moyen reste petit par rapport à la distance des électrodes. *Les lois de la décharge disruptive dans les gaz rares purs sont donc différentes de celles qui s'appliquent aux autres gaz*; il suffit d'ailleurs que le gaz rare renferme une faible quantité d'air, de l'ordre de 1 pour 100, pour que les lois de la décharge soient les mêmes que dans l'air.

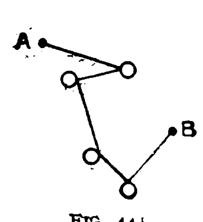


FIG. 441.

Une première différence peut provenir de ce que les atomes des gaz rares, qui sont chimiquement inertes, ne sont pas aptes à fixer des électrons pour donner des ions négatifs : on admet que les gaz rares purs ne con-

tiennent pas d'ions négatifs, mais seulement des électrons libres; la preuve expérimentale en est fournie par les mesures des mobilités des ions (cf. § 366).

Une seconde différence provient de ce que les lois du choc d'un électron sur une molécule ne sont pas les mêmes pour les molécules monoatomiques des gaz rares et pour les molécules telles que celles d'oxygène. *Dans l'oxygène, ce choc est mou :* un électron qui a heurté une molécule perd sa vitesse, qu'il y ait eu ionisation ou non, et l'ionisation ne peut se produire que si l'électron acquiert la force vive nécessaire dans l'intervalle qui sépare deux chocs. *Dans les gaz rares, au contraire, le choc est parfaitement élastique :* l'électron qui a heurté une molécule sans l'ioniser rebondit avec une force vive égale à celle qu'il avait avant le choc. Lorsque l'électron passe d'un point A à un point B (*fig.* 441), son accroissement de force vive est toujours égal à e (V_B — V_A), quel que soit le nombre de chocs qu'il a subis dans ce parcours; il pourra produire l'ionisation par choc en B, si la différence de potentiel totale V_B — V_A est suffisante, quel que soit le nombre de molécules qui se trouvent entre A et B, c'est-à-dire quelle que soit la pression. Il est d'ailleurs nécessaire que toutes les molécules rencontrées soient des atomes de gaz rares : il suffit que l'une d'elles soit une molécule d'oxygène pour que l'électron perde toute sa vitesse dans le choc correspondant, c'est-à-dire qu'il suffit d'une faible proportion d'air pour faire disparaître le caractère particulier de la décharge.

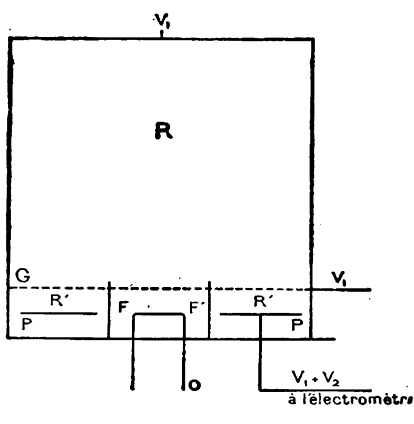


FIG. 442.

On a pu montrer, par une expérience directe, que les électrons animés de faibles vitesses rebondissent d'une façon parfaitement élastique sur les atomes d'hélium. Les électrons, émis par un filament incandescent FF', et lancés, avec une vitesse inférieure à celle qui produit l'ionisation, par le champ électrique établi entre ce filament et une grille G (*fig.* 442), pénètrent à travers cette grille dans un volume R où n'existe aucun champ; ceux d'entre eux qui rebondissent sur les atomes d'hélium pénètrent dans une partie R' du récipient, où ils sont captés par une plaque P portée à un potentiel $V_1 + V_2$ supérieur au potentiel V_1 de la grille. On mesure, par le courant reçu par la plaque P, le nombre d'électrons qui pénètrent dans le volume R' : on constate qu'il est égal à celui qu'on peut calculer par la théorie cinétique, dans l'hypothèse du choc parfaitement élastique. Si l'on remplace l'hélium par de l'oxygène, la plaque P ne reçoit plus d'électrons : il n'y a plus aucun rebondissement, et on doit admettre que le choc est parfaitement mou.

III. — *DÉCHARGES A BASSE PRESSION*

372. Aspect de la décharge. — Lorsqu'on maintient, à l'aide d'une machine électrostatique, d'une bobine d'induction ou d'un transformateur,

une différence de potentiel suffisante entre deux électrodes A et C placées dans un tube où la pression est de l'ordre du millimètre de mercure, il s'établit dans le tube un régime permanent de décharge; pour une distance des électrodes de l'ordre du décimètre et un potentiel de l'ordre du kilovolt, on obtient un courant dont l'intensité est de l'ordre de quelques milliampères. Nous nous bornerons à l'étude de la décharge produite par une différence de potentiel continue, telle que celle que peut fournir une machine électrostatique; son aspect diffère peu de celui de la décharge obtenue à l'aide d'une bobine d'induction, qui fournit une différence de potentiel périodique, mais toujours de même sens.

La figure 443 représente schématiquement l'aspect du tube. En partant de la cathode C, on rencontre d'abord une mince couche très lumineuse, dite **gaine cathodique,** puis un espace obscur, dit **espace obscur de Crookes,** dont la longueur augmente à mesure que la pression diminue. Ensuite vient une région faiblement lumineuse, dite **lumière négative,** qui est séparée de l'espace obscur de Crookes par une surface assez nette à peu près parallèle à la cathode. Elle est suivie d'une seconde région sombre, dite **espace obscur de Faraday.** Enfin, de l'espace obscur de Faraday à l'anode se trouve une colonne lumineuse, dite **colonne positive,** qui se termine par une luminosité assez vive collée sur l'anode, et qui présente quelquefois des stratifications tournant leur concavité vers l'anode.

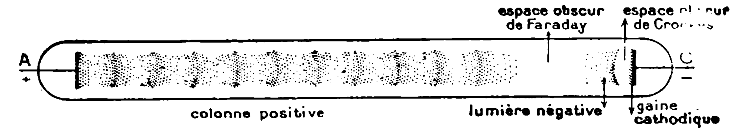


FIG. 443.

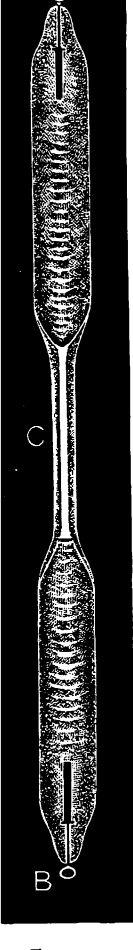


FIG. 444.

Aux pressions de l'ordre du millimètre, la colonne positive remplit presque tout le tube, quelle que soit sa longueur, et s'approche jusqu'à 2 ou 3 centimètres de la cathode. C'est elle qui produit à peu près toute la lumière émise par le tube : on sait qu'avec des tubes au néon de plusieurs mètres de longueur on peut obtenir une lumière rose assez intense pour être employée à l'éclairage. La couleur de la lumière positive dépend de la nature du gaz qui remplit le tube; son spectre est formé de raies caractéristiques du gaz. On sait qu'on étudie généralement le spectre d'un gaz en le plaçant dans un tube de Geissler (*fig.* 444) : c'est un tube à décharges qui présente une partie capillaire C, dans laquelle l'éclat de la colonne positive est plus grand, et qu'on actionne à l'aide d'une petite bobine de Ruhmkorff .

373. Potentiel et champ électrique dans le tube. — On peut, en plaçant en différents points du tube une pointe métallique qui sert de sonde,

mesurer la différence de potentiel qui existe entre ce point et l'une des électrodes. Les résultats obtenus sont représentés, dans le cas d'une décharge sans stratifications, par la courbe I de la figure 445. La répartition des potentiels est caractérisée surtout par l'existence d'une variation régulière, tout le long de la colonne positive, et d'une chute brusque, dite **chute de potentiel cathodique,** au voisinage immédiat de la cathode. Le gradient du potentiel dans la colonne positive dépend de la pression et de l'intensité du courant. Il augmente quand la pression croît, et diminue quand le courant augmente : dans le cas de l'azote, il est de l'ordre de 30 volts par centimètre pour un courant de 1 milliampère et une pression de 1 millimètre de mercure. La valeur de la chute de potentiel cathodique semble indépendante de la pression et de l'intensité du courant, et est vraisemblablement égale à la valeur du potentiel explosif minimum dans le gaz qui remplit le tube; elle est d'environ 430 volts dans l'air. Le potentiel est à peu près constant dans l'espace obscur de Faraday et dans la lumière négative; il subit une chute rapide, peu importante d'ailleurs, au voisinage de l'anode.

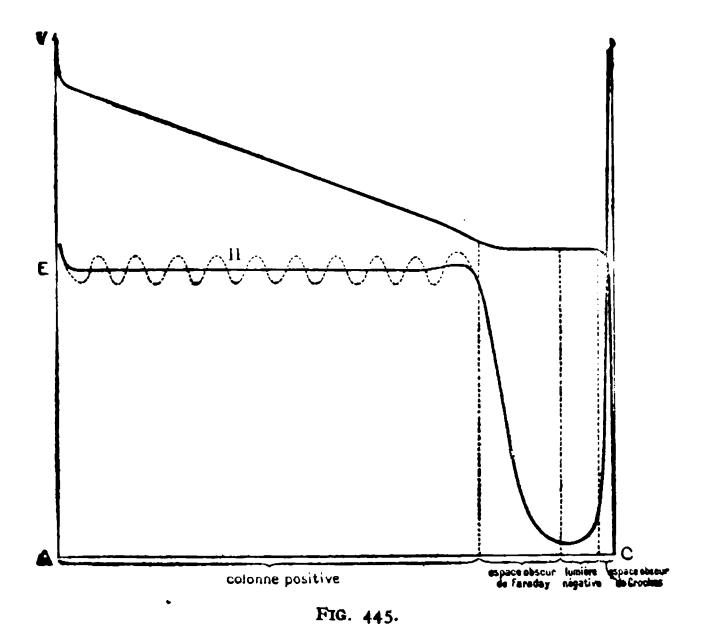


FIG. 445.

Il est facile de déduire de la répartition des potentiels les valeurs du champ électrique : les ordonnées de la courbe qui le représente (courbe II de la figure 445) sont proportionnelles aux coefficients angulaires de la courbe des potentiels. Le champ est constant dans la colonne positive, passe par un minimum dans la lumière négative, ou quelquefois dans l'espace obscur de Faraday, et devient très grand au voisinage immédiat de la cathode. Dans le cas où la colonne positive présente des stratifications, le champ n'y est pas constant, mais il présente des maxima dans les stratifications brillantes (courbe ponctuée de la figure 445).

374. Afflux positif. — Le passage de la décharge exige (cf. § 370) que l'ionisation du gaz soit produite à la fois par les ions négatifs et par les ions positifs. On admet généralement que ces derniers ne peuvent acquérir une vitesse suffisante pour l'ionisation que lorsqu'ils arrivent dans le champ électrique élevé qui existe au voisinage de la cathode. La cathode reçoit un **afflux positif,** qui provient de toutes les régions de l'espace obscur de Crookes, et qui produit à sa surface une ionisation intense, libérant ainsi des électrons, qui vont se diriger vers l'anode et entretenir dans tout le tube l'ionisation du gaz.

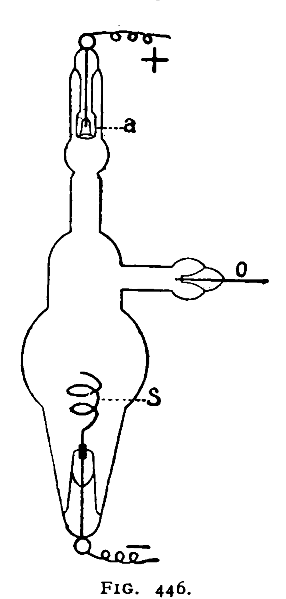


FIG. 446.

L'ionisation produite à la surface de la cathode par les ions positifs se manifeste par l'existence de la gaine lumineuse cathodique; il est d'ailleurs difficile de savoir si les électrons sont arrachés aux molécules du gaz ou aux molécules du métal qui constitue la cathode, car l'analyse spectrale de la lumière de la gaine cathodique montre à la fois les raies du gaz et celles du métal.

L'existence de l'afflux positif n'est pas douteuse; dans certains cas, il est nettement visible : dans un tube à rayons cathodiques contenant de l'oxygène, il est rose et se distingue nettement du faisceau de rayons cathodiques qui est jaune. Un objet placé dans l'espace obscur de Crookes porte ombre dans la gaine cathodique en arrêtant l'afflux positif; si la cathode présente des trous, l'afflux positif les traverse, et forme, de l'autre côté de la cathode, les rayons positifs, que nous étudierons dans le prochain chapitre.

Le rôle essentiel de l'afflux positif dans la décharge a pu être mis en évidence expérimentalement. Les électrons émis par la cathode constituent, dans un gaz assez raréfié, un faisceau de rayons cathodiques visible : en limitant par un diaphragme percé d'un trou l'afflux positif, on constate que le faisceau de rayons cathodiques part uniquement des points frappés par cet afflux. La **soupape de Villard** (*fig.* 446), employée avant l'invention des lampes-valves pour redresser les courants à haute tension, permet de montrer que la décharge ne peut passer dans un tube que si la cathode peut recevoir l'afflux positif. C'est un tube à gaz raréfié dont l'une des électrodes *a*, courte et logée au fond d'un tube étroit, ne peut que difficilement recevoir l'afflux positif, tandis que l'autre S, placée au milieu de l'ampoule et possédant une large surface, peut facilement le recevoir. La soupape de Villard ne laisse passer le courant que lorsque l'électrode S est cathode; il suffit, pour le vérifier, de mesurer, à l'aide d'un milliampèremètre, le courant qu'y donne une bobine de Ruhmkorff, lorsqu'on le fait passer successivement dans un sens et dans l'autre [1].

375. Ionisation par les électrons. — Les électrons, produits à la surface de la cathode par l'afflux positif, se mettent en mouvement vers l'anode; ils

[1] Le fonctionnement n'est satisfaisant que si la pression a une valeur convenable : un régulateur O permet de faire rentrer du gaz dans le tube.

acquièrent une grande vitesse à la traversée de la chute de potentiel cathodique, et constituent alors les rayons cathodiques, que nous étudierons dans le prochain chapitre. Ils produisent l'ionisation des molécules gazeuses qu'ils rencontrent : il se forme à chaque choc ionisant un ion positif, qui se dirige vers la cathode, et un électron, qui se dirige vers l'anode, et prend d'ailleurs le plus souvent une vitesse suffisante pour pouvoir à son tour produire l'ionisation de nouvelles molécules. La cathode reçoit donc un nombre d'ions positifs bien supérieur à celui des électrons qu'elle émet; comme d'autre part ces ions, beaucoup plus lourds, ont une mobilité beaucoup plus faible que les électrons, il se produit, dans l'espace qui avoisine la cathode, une accumulation de charges positives, qui explique la décroissance du champ à mesure qu'on s'éloigne de la cathode (*fig.* 445, courbe II). Lorsqu'on arrive à la lumière négative, le champ électrique, dirigé vers l'anode, créé par cette répartition spatiale positive, compense à peu près totalement le champ produit par le potentiel extérieur appliqué au tube, et le champ résultant est devenu à peu près nul.

Les électrons cathodiques qui arrivent à la lumière négative ont été ralentis par les nombreux chocs ionisants qu'ils ont subis; le champ étant très peu intense, les ions positifs et négatifs qu'ils forment en produisant l'ionisation ne peuvent également prendre que des vitesses très faibles : la lumière négative est une région d'accumulation des ions des deux signes. On a pu montrer, en mesurant la conductibilité du gaz entre deux électrodes auxiliaires, placées dans un même plan perpendiculaire à l'axe du tube et soumises à une faible différence de potentiel, que c'est, en effet, dans la lumière négative qu'il est le plus fortement ionisé.

La luminosité du gaz est produite par l'excitation de ses atomes par les chocs électroniques (§§ 367, 368 et 417) : presque nulle dans l'espace obscur de Crookes, où il y a peu d'électrons, elle devient intense dans la lumière négative. On a constaté qu'elle y était bien produite par les électrons qui viennent de la cathode, en constatant qu'un objet placé dans l'espace obscur de Crookes les arrête et porte ombre dans la lumière négative. Le champ très faible qui existe à la limite de la lumière négative et de l'espace obscur de Faraday n'entraîne vers ce dernier espace qu'un petit nombre d'électrons; à mesure qu'ils s'éloignent de la lumière négative, ils sont soumis à un champ croissant, s'accélèrent et en produisent d'autres par ionisation des molécules. On retrouve donc, après l'espace obscur de Faraday où le nombre d'électrons est insuffisant pour produire la luminosité du gaz, une région plus riche en électrons, qui est à nouveau lumineuse : c'est la colonne positive.

Lorsque la colonne positive n'est pas stratifiée, le champ y est constant d'une extrémité à l'autre, et chaque élément de volume y contient un nombre d'électrons égal au nombre d'ions positifs; comme le courant et le champ, ce nombre est le même dans toutes les sections (cf. § 364) : il y a équilibre dans chaque section entre l'ionisation par les chocs des électrons sur les molécules et la recombinaison des ions, qui se fait sans doute principalement sur les parois. Si au contraire les conditions de cet équilibre ne se trouvent pas réalisées, il y a formation de stratifications, avec des stries sombres, analogues à l'espace obscur de Faraday, aux endroits où il n'y a pas suffisamment d'électrons, des stries brillantes aux endroits où leur nombre est maximum.

CHAPITRE XXXV

RAYONS CATHODIQUES ET RAYONS POSITIFS

I. — *RAYONS CATHODIQUES*

376. Production des rayons cathodiques. — Lorsqu'on réduit de plus en plus la pression dans un tube à décharges, l'espace obscur de Crookes s'agrandit de plus en plus et il finit par remplir tout le tube. Les **tubes de Crookes** sont des tubes dans lesquels la pression a été réduite à une valeur de l'ordre du 1/100 ou du 1/1000 de millimètre de mercure; il est nécessaire, pour y produire la décharge, d'établir entre les électrodes une différence de potentiel de plusieurs dizaines de kilovolts. La chute de potentiel cathodique, qui était indépendante de la pression pour des pressions supérieures à 1/10 de millimètre de mercure, est maintenant d'autant plus grande que la pression est plus basse. L'expérience montre qu'elle est presque égale à la totalité de la différence de potentiel appliquée aux électrodes : toutes les parties de l'ampoule, autres que celles qui sont au voisinage immédiat de la cathode, sont au même potentiel que l'anode. Le champ électrique, extrêmement intense à la surface de la cathode, est pratiquement nul aux autres points du tube.

Les électrons qui sont produits par l'afflux positif à la surface de la cathode acquièrent une très grande vitesse en traversant la chute de potentiel cathodique : ils continuent leur mouvement à travers tout le tube, et se déplacent en ligne droite, avec une vitesse constante, jusqu'à la paroi opposée, qu'ils illuminent d'une vive fluorescence. Ces électrons, animés de grandes vitesses, constituent les **rayons cathodiques.** On peut calculer leur vitesse, par la relation $eV = mv^2 / 2$, en supposant que la différence de potentiel V qui les lance est égale à celle qu'on a établie entre l'anode et la cathode : à une différence de potentiel $V = 40.000$ volts correspond une vitesse $v = 120.000$ km/sec. (§ 342). Ce calcul n'est qu'approximatif, car la chute de potentiel cathodique n'est pas rigoureusement égale à la différence de potentiel totale appliquée au tube, et les électrons ne proviennent sans doute pas tous de la surface de la cathode : certains peuvent avoir été produits par ionisation de molécules gazeuses, et provenir de points dont le potentiel est déjà notablement supérieur à celui de la cathode. En fait, l'expérience montre (§ 378) que le faisceau de rayons cathodiques fourni par un tube de Crookes n'est pas homogène, et contient des électrons animés de vitesses très différentes.

Les rayons cathodiques peuvent également être obtenus dans le vide parfait, alors que la décharge ne peut plus passer entre les deux électrodes, en portant l'électrode négative à l'incandescence, de façon qu'elle émette des électrons; nous décrirons le dispositif employé quand nous étudierons les rayons X (§ 384)

377. Propriétés des rayons cathodiques. — Les rayons cathodiques possèdent la propriété de rendre la plupart des substances vivement fluorescentes. Sous leur action, le verre émet une lumière verte, le rubis une lumière rouge, la craie une lumière jaune orangé. Les gaz que contient le tube de Crookes peuvent eux-mêmes devenir lumineux, malgré leur raréfaction; la lumière qu'ils émettent est toujours peu intense. Sa couleur dépend de la nature du gaz : elle est jaune si le vide a été fait dans un tube contenant de l'oxygène.

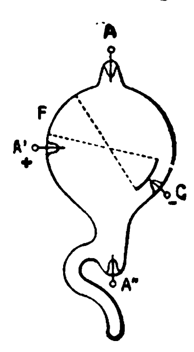


FIG. 447.

On peut ainsi apercevoir le faisceau cathodique sur tout son trajet : *on constate qu'il est émis normalement par la cathode, quelle que soit la position de l'anode* (*fig.* 447), et qu'il se propage en ligne droite. Le courant qui traverse le tube, et qui provient nécessairement de l'anode, ne doit donc pas être confondu avec le courant que transportent les électrons du faisceau cathodique. On peut encore montrer que la propagation est rectiligne en plaçant un obstacle métallique *b* en forme de croix sur le trajet des rayons, et en observant, grâce à la fluorescence des parois de l'ampoule, l'ombre *c* qu'il porte sur ces parois (*fig.* 448). Dans un tube à gaz peu raréfié, que l'espace obscur de Crookes ne remplit pas entièrement, le faisceau de rayons cathodiques existe toujours entre la cathode et la lumière négative (§ 375), mais paraît flou : la propagation paraît d'autant plus rectiligne que les électrons rencontrent moins de molécules gazeuses.

Les rayons cathodiques sont susceptibles de produire un certain nombre de réactions chimiques, généralement des réductions. Sous leur action, les verres contenant du plomb noircissent, par formation de plomb métallique ; le chlorure de sodium devient brun, par suite de la formation de sous-chlorure. Ils impressionnent la plaque photographique.

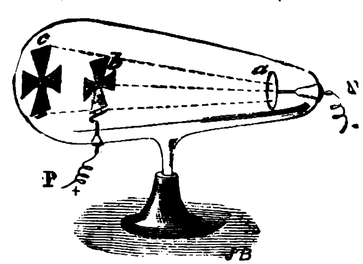


FIG. 448.

Enfin, signalons dès maintenant que les substances frappées par les rayons cathodiques émettent un rayonnement électromagnétique de courte longueur d'onde, qui constitue les rayons X, et que nous étudierons dans un chapitre spécial.

378. Mesure de la vitesse et du rapport e/m. — Nous allons résumer maintenant les principales expériences qui ont permis de montrer que les rayons cathodiques étaient constitués par des particules électrisées négativement, toutes identiques entre elles.

Lorsque les rayons cathodiques rencontrent un obstacle, leur énergie cinétique disparaît, et se transforme pour la plus grande partie en énergie calorifique. L'échauffement produit peut être assez intense pour porter au rouge, et même fondre, une lame mince de platine placée au point où convergent les électrons émis par une cathode concave (*fig.* 447). Si on laisse un faisceau cathodique un peu intense atteindre les parois de l'ampoule, le verre qui les

constitue se ramollit ; si l'on prolonge trop l'expérience, il finit par céder à la pression extérieure.

Les rayons cathodiques, constitués par des particules électrisées négativement, sont déviés par les champs magnétiques (§ 345) ; l'expérience est extrêmement facile à réaliser, et réussit même avec des champs faibles. Il suffit d'approcher un barreau aimanté ordinaire du tube à la croix pour voir l'ombre de la croix se déplacer ; elle devient en même temps plus floue, car les rayons contiennent des électrons de vitesses différentes, qui sont inégalement déviés par le champ magnétique.

Les rayons cathodiques sont aussi déviés par le champ électrique ; comme les parois du tube de Crookes sont toujours très fortement électrisées, il est nécessaire de placer à l'intérieur de l'ampoule les plateaux qui produisent le champ (*fig.* 449). La mesure simultanée des déviations électrique et magnétique a permis de déterminer la vitesse v des rayons cathodiques et le rapport e/m caractéristique des électrons qui les constituent (§ 346).

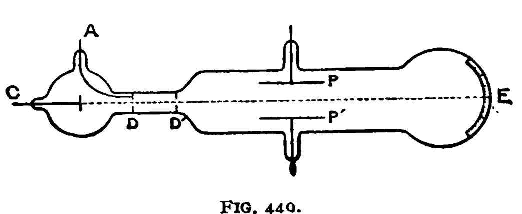


FIG. 449.

La charge électrique négative qu'ils transportent a pu être mise en évidence par une expérience directe (Perrin), en les recevant dans un cylindre de Faraday ABCD *relié à un électroscope* (*fig.* 450). Le cylindre de Faraday doit être entouré par une cage métallique EFGH reliée au sol, qui le protège contre les phénomènes d'influence électrostatique et empêche les ions du gaz de l'atteindre ; son ouverture β peut elle-même être fermée par une lame mince d'aluminium, d'une épaisseur de quelques microns, que les rayons cathodiques traversent. Le cylindre de Faraday et sa cage protectrice peuvent aussi être disposés latéralement, de façon qu'ils ne reçoivent pas les rayons cathodiques ; la feuille de l'électroscope reste immobile, mais si on dévie le faisceau à l'aide d'un aimant de façon à l'amener à tomber sur l'ouverture β et à pénétrer dans le cylindre, on constate aussitôt que l'électroscope se charge négativement.

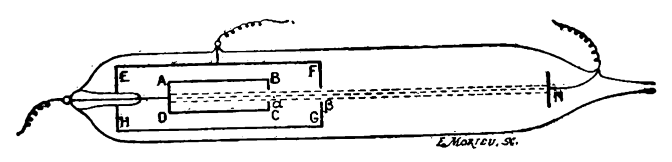


FIG. 450.

On peut, dans cette expérience, mesurer la charge q reçue par le cylindre de Faraday : s'il a reçu n électrons, cette charge est $q = ne$. On peut également mesurer la quantité de chaleur Q qu'il a reçue : elle est équivalente à l'énergie cinétique $nmv^2/2$ perdue par les n électrons et on a :

$$\frac{q}{JQ} = 2\,\frac{e}{m}\cdot\frac{1}{v^2}.$$

Cette mesure fournit la valeur de la quantité $\frac{e}{m}\cdot\frac{1}{v^2}$: elle peut remplacer,

pour la détermination de la vitesse v et du rapport **e** /m, la mesure de la déviation électrique.

Nous avons déjà dit quels avaient été les résultats de ces mesures (§ 349) : *quels que soient le mode de production des rayons cathodiques et la nature du gaz contenu dans le tube, les particules qui les composent sont des électrons, caractérisés par une valeur constante du rapport* **e** /**m**, *égale* à 1,76 . 10^7 u. é. m.

Les vitesses v varient d'une expérience à l'autre, et, dans un faisceau donné de rayons cathodiques, d'un électron à l'autre. On a obtenu, avec les tubes de Crookes, des vitesses comprises entre 20.000 et 200.000 km/sec ; dans le vide parfait, en utilisant les électrons émis par une cathode incandescente et en les lançant avec des différences de potentiel de l'ordre de 250.000 volts, on est arrivé à obtenir des vitesses de l'ordre de 250.000 kilomètres par seconde.

Si l'on produit la déviation magnétique des rayons cathodiques par l'action du champ d'une bobine parcourue par un courant variable, on obtient une déviation qui suit toutes les variations du courant magnétisant, avec un retard qui est pratiquement nul, à cause de la très faible inertie du faisceau cathodique. C'est là le principe des **oscillographes cathodiques**, qui permettent d'enregistrer sur une plaque photographique placée dans le tube les oscillations des courants de haute fréquence utilisés en Télégraphie sans fil.

En faisant traverser à un faisceau de rayons cathodiques des champs électriques et des champs magnétiques convenablement disposés, on arrive à ce que les électrons émis en un point A dans différentes directions viennent finalement converger en un point A′, qu'on peut appeler l'image du point A à travers le système de champs. Un objet AB traversé par un faisceau d'électrons, d'une certaine ouverture 2 u, donne une image A′B′, qu'on peut observer par photographie ou sur un écran fluorescent. C'est le principe des **microscopes électroniques**, avec lesquels on a déjà réalisé des grandissements A′B′/AB de l'ordre de 30.000. Leur intérêt vient surtout de ce que la diffraction d'électrons de vitesse v est la même (cf. § 420) que celle d'ondes lumineuses de longueur d'onde $\lambda = \mathbf{h}/\mathbf{m}v$ beaucoup plus faible que les longueurs d'onde optiques, de sorte que e pouvoir séparateur théorique 0,61 λ/sin u (cf. *Cours d'Optique*, § 141) peut être beaucoup meilleur que celui du microscope optique : les appareils actuellement construits, bien que correspondant à des ouvertures 2 u faibles, permettent déjà de séparer largement des points distants d'un vingtième de micron.

379. Rayons de Lenard. — On peut faire sortir les rayons cathodiques de l'ampoule où ils ont pris naissance, en ménageant dans sa paroi une petite fenêtre qu'on ferme par une lame mince d'aluminium, de quelques microns d'épaisseur (Lenard, 1894). Les électrons rapides qui constituent les rayons cathodiques traversent cette lame ; ils forment dans l'air les rayons de Lenard.

Les rayons produits dans le tube de Crookes sont rapidement arrêtés dans l'air à la pression atmosphérique par leurs chocs contre les molécules gazeuses, et ne s'y propagent pas à plus de quelques centimètres ; la propagation n'est d'ailleurs pas rectiligne, par suite des déviations produites par ces chocs. Ils produisent dans l'air une ionisation intense, accompagnée d'une vive illumination ; on constate en même temps la formation d'ozone.

Au lieu de faire sortir les rayons à l'air libre, on peut les faire passer dans une enceinte où existe une pression réduite, de l'ordre par exemple de quelques

centimètres de mercure : on constate que leur parcours est d'autant plus grand que la pression est plus basse, et que la vitesse initiale des électrons est plus grande.

On a répété l'expérience de Lenard avec des rayons plus rapides, produits par des tubes à cathode incandescente : les tubes du modèle ordinaire peuvent fonctionner sous des différences de potentiel de 200.000 à 300.000 volts, et Coolidge a construit des tubes spéciaux fonctionnant jusqu'à 900.000 volts. Il a obtenu dans l'air des parcours de l'ordre du mètre, et observé des actions chimiques particulièrement vives : c'est ainsi que ces électrons très pénétrants colorent rapidement la silice fondue, le sel gemme, la sylvine.

II. — *RAYONS POSITIFS*

380. Production des rayons positifs. — Nous avons déjà signalé (§ 374) que l'émission des électrons par la cathode d'un tube à décharges était provoquée par l'arrivée sur la cathode d'ions positifs, qui constituent l'*afflux positif*. Dans un tube de Crookes où la chute de potentiel cathodique a une valeur très élevée, ces ions arrivent sur la cathode avec une grande vitesse : si la cathode est percée, ils traversent ses ouvertures et forment dans la région Q située en arrière d'elle (*fig.* 451) des faisceaux de **rayons positifs** ou **rayons-canaux**.

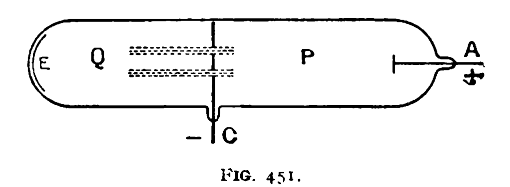


FIG. 451.

Les rayons-canaux ont été découverts par Goldstein en 1886 ; leur existence se manifeste par l'illumination du gaz qu'ils traversent ; ils paraissent jaunes d'or dans l'azote, roses dans l'hydrogène. On peut déterminer la position de leur point d'impact sur le fond du tube en y plaçant un écran E recouvert de willemite, dont ils excitent la fluorescence, ou mieux une plaque photographique, à couche sensible très mince et très riche en sel d'argent, qu'ils impressionnent.

Les rayons positifs produisent une ionisation intense des gaz qu'ils traversent ; ils sont arrêtés très rapidement si la pression n'est pas très basse. Dans les tubes construits spécialement pour leur production, on fait dans la partie Q qu'ils doivent traverser un vide aussi parfait que possible ; on doit néanmoins conserver dans la partie P une pression, de l'ordre du 1/100 de millimètre de mercure, qui permette la formation de l'afflux positif. Le compartiment Q est réuni à une pompe, qui extrait le gaz au fur et à mesure qu'il diffuse de P vers Q : on sait maintenant construire des groupes à vitesse de pompage suffisante pour qu'on puisse donner à l'ouverture percée dans la

cathode un diamètre de plusieurs millimètres et obtenir un faisceau d'ions hydrogène (protons ou deutons) transportant plus d'un milliampère.

On a pu obtenir des rayons positifs formés par des ions métalliques en les faisant émettre, dans un vide parfait, de l'ordre du millième du millimètre de mercure, par une anode incandescente. L'anode est, par exemple, un filament de platine recouvert d'un sel alcalin, et chauffé électriquement à une température un peu inférieure à la température de fusion de ce sel : les atomes alcalins chargés positivement sont extraits du sel et projetés en ligne droite à travers le tube, de façon à constituer des **rayons anodiques**, s'il existe un champ électrique suffisant, de l'ordre du demi-million de volts par centimètre, à la surface de l'anode. On arrive à réaliser cette condition en employant une anode pointue (pouvoir des pointes, § 43) et en établissant entre elle et la cathode une différence de potentiel de l'ordre de 100.000 volts. Aux pressions extrêmement basses auxquelles on opère, et que l'on maintient par le fonctionnement permanent d'une pompe convenable, la décharge dans le gaz ne s'établit pas, et le courant est entièrement transporté par les ions positifs extraits du sel : on a pu obtenir des débits de plusieurs milliampères.

Dans le vide élevé ainsi employé, les rayons anodiques, ne rencontrant pas de molécules gazeuses susceptibles, par leur choc, de leur faire émettre de la lumière, ne sont pas visibles. Ils ne sont décelables que par de petites houppes lumineuses, dont la couleur dépend de la nature du métal alcalin employé, qui apparaissent aux points où ils frappent la cathode. Cette dernière doit toujours être placée assez près de l'anode; mais on peut la percer d'un canal qui laisse passer les rayons positifs intenses obtenus dans les appareils destinés à leur étude.

381. Mesure de la vitesse *v* et du rapport / *m*. — On a pu vérifier que les rayons-canaux étaient formés de particules électrisées positivement, en constatant qu'ils étaient déviés par le champ électrique et par le champ magnétique, et aussi en les recueillant dans un cylindre de Faraday; on a pu déterminer la vitesse des particules et le rapport *e* / *m* qui les caractérise en mesurant les deux déviations électrique et magnétique.

Les valeurs trouvées pour le rapport *e* / *m* concordent parfaitement avec celles qu'on calcule en supposant que les ions positifs qui constituent les rayons-canaux sont des atomes ou des molécules des gaz que renferme le tube à décharge, portant une charge égale à une ou deux fois la charge élémentaire e; elles sont analogues à celles qui correspondent aux ions électrolytiques, et sont toujours beaucoup plus petites que celle qui caractérise l'électron. Ces mesures confirment l'hypothèse de la structure discontinue de l'électricité (§ 347), et conduisent naturellement à l'hypothèse que nous avons indiquée au paragraphe 351 : *tandis que l'électricité négative peut exister à l'état libre, sous forme d'électrons, l'électricité positive est toujours liée à un support matériel; un atome est chargé positivement lorsqu'il a perdu un ou plusieurs électrons; la masse de l'ion positif ainsi formé ne diffère pas d'une façon appréciable de celle de l'atome neutre, à cause de la petitesse de la masse de l'électron.*

Les valeurs de la vitesse sont beaucoup plus petites pour les rayons-canaux que pour les rayons cathodiques, et ne dépassent pas quelques milliers de kilomètres par seconde. Considérons par exemple un ion positif formé par un atome d'hydrogène portant la charge élémentaire, et supposons qu'il soit

lancé par une chute de potentiel cathodique $V = 80.000$ volts $= 8 . 10^{12}$ u. é. m. La vitesse qu'il acquiert est donnée (§ 342) par la relation $v^2 = 2Ve / m = 16 . 10^{12} . 9649 = 15{,}4 . 10^{16}$; on trouve $v = 4 . 10^8 = 4.000$ km/sec, environ.

La quantité $mv^2 / 2e$ représente la chute de potentiel qui a lancé la particule : elle est du même ordre de grandeur pour les rayons positifs que pour les rayons cathodiques, et la déviation électrique, qui est proportionnelle à la quantité e / mv^2, est aussi du même ordre de grandeur. Mais la déviation magnétique, qui est proportionnelle à la quantité e / mv, est beaucoup plus faible pour les rayons positifs, dont la vitesse est plus faible : il a néanmoins été possible de la mesurer avec précision.

Dans les expériences de détermination du rapport e / m, il est nécessaire de mesurer simultanément les deux déviations, car les ions qui constituent un faisceau de rayons positifs n'ont pas tous la même vitesse. Les premières mesures ont été faites par J.-J. Thomson par la méthode décrite au paragraphe 346 : l'action simultanée des deux champs parallèles E et H produit deux déviations rectangulaires y et z, et la valeur de e / m est :

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{lD} \frac{E}{H^2} \cdot \frac{z^2}{y}.$$

Tous les ions de même espèce, pour lesquels la valeur de e / m est la même, viennent frapper la plaque photographique aux points d'une courbe dont l'équation est de la forme $z^2 = 2py$. Cette courbe est une parabole de paramètre :

$$p = \frac{lD}{2} \frac{H^2}{E} \cdot \frac{e}{m}.$$

On obtient effectivement sur la plaque un certain nombre d'arcs de parabole; on peut facilement déterminer, pour chaque arc, la valeur du paramètre p, et en déduire la valeur du rapport e/m pour l'ion correspondant. La précision obtenue est de l'ordre du centième ; elle peut même être plus grande lorsque l'on se contente de mesures relatives : il suffit alors, pour déterminer le rapport des valeurs de e/m correspondant à deux ions différents, présents simultanément dans les rayons positifs, de mesurer sur la plaque le rapport des ordonnées z' et z correspondant à une même valeur de l'abscisse y.

L'expérience montre qu'un gaz quelconque contient toujours des ions d'espèces différentes. L'hydrogène donne deux paraboles, correspondant l'une à l'atome H portant une charge élémentaire (H_+), l'autre à la molécule H^2 portant une charge élémentaire ($H^2{}_+$) ; on observe en outre un arc de parabole, d'intensité moins grande, correspondant à des déviations électrique et magnétique de sens contraires aux premières : il est donné par des ions négatifs H_-, qui se forment dans l'ionisation du gaz produite par les rayons positifs, et est faible si le vide est élevé.

L'oxygène contient encore davantage d'ions différents : on trouve des ions pouvant contenir jusqu'à 6 atomes et portant 1 ou 2 charges, caractérisés par les paraboles O_+, $O^2{}_+$, $O^3{}_+$, $O^6{}_+$, O_{++} et O_-.

Dans toutes ces expériences, si le vide a été fait avec une pompe à mercure, on trouve des paraboles produites par les atomes de mercure ionisés, notamment les paraboles Hg_+ et Hg_{++}. On voit que l'*étude des rayons positifs com-*

titue une méthode d'analyse chimique extrêmement sensible, permettant de déceler des traces de matière qui échappent même à l'analyse spectrale. On se rendra compte de l'extrême sensibilité de cette méthode d'analyse, comparée aux méthodes purement chimiques, en songeant qu'elle permet presque d'étudier les atomes individuellement, alors qu'un dixième de milligramme de mercure, par exemple, contient encore plus de 10^{17} atomes.

382. Spectrographie de masse : les isotopes. — Si l'on admet l'hypothèse de la structure discontinue de l'électricité (§ 347), c'est-à-dire si l'on admet que la charge e d'un ion est toujours égale à un multiple entier simple d'une même charge élémentaire, on voit que *la mesure du rapport des valeurs de e / m relatives à deux ions permet de mesurer, à un nombre entier près, le rapport des masses des atomes qui les constituent, c'est-à-dire le rapport des masses atomiques des éléments qui les fournissent.* Cette mesure peut être faite, soit au moyen de l'appareil à paraboles de J.-J. Thomson, soit à l'aide d'appareils plus perfectionnés, dont le premier a été construit par Aston, qui utilisent également les déviations électrique et magnétique, et qui fournissent, au lieu d'une série d'arcs de paraboles, une série de petites droites; le cliché obtenu a l'aspect d'un spectre de raies, dont chacune caractérise une espèce d'ions: c'est le spectre de masses du mélange gazeux placé dans le tube.

Les expériences d'Aston ont fourni un résultat extrêmement important : *presque tous les corps se comportent comme un mélange de plusieurs éléments.* C'est ainsi que le chlore, de masse atomique Cl = 35,46, donne des raies doubles, aussi bien pour l'ion Cl_+ que pour l'ion Cl_{++}, comme s'il était formé d'un mélange de deux éléments, de masses atomiques 35 et 37 : on admet que ces deux éléments existent réellement, et se trouvent mélangés, dans une proportion fixe, dans les différents produits chlorés que l'on rencontre dans la nature.

Ces deux éléments sont deux **isotopes** (§ 352); leurs propriétés chimiques sont identiques, de sorte qu'aucune réaction chimique n'est capable de les séparer. *Le mélange des deux isotopes conserve au cours des réactions une composition constante, il résiste à toute tentative de fractionnement,* et c'est pourquoi il a toujours été considéré comme un corps simple. Quelle que soit la réaction par laquelle on l'obtient, le chlorure d'argent AgCl préparé à partir du chlore naturel renferme toujours la même proportion de molécules AgCl = 143, contenant l'atome Cl = 35, et de molécules AgCl = 145, contenant l'atome Cl = 37; son analyse fournit toujours pour le chlore la même masse atomique Cl = 35,46.

Nous verrons plus loin (§ 415) comment on interprète l'existence des isotopes : deux atomes isotopes possèdent des noyaux de masses différentes, ayant même charge électrique. Le nombre et la répartition des électrons qui gravitent autour du noyau sont donc les mêmes pour les deux atomes, et il y a identité des propriétés chimiques, qui ne dépendent que de cette répartition électronique. Les spectres de raies émis par les atomes ne dépendent également que des orbites des électrons (cf. § 417) : *deux atomes isotopes ont pratiquement le même spectre;* il ne peut apparaître dans la position des raies que de très petites différences, dues à l'effet d'entraînement du noyau par l'électron mobile. Ces différences ont effectivement été mises en évidence dans le cas des isotopes du plomb, qui se trouvent séparés dans les minerais radioactifs

(§ 411); elles sont de l'ordre de 5 à 8 millièmes d'angström pour des raies de longueur d'onde comprises entre 3.000 et 4.000 angströms : on voit qu'il s'agit là d'écarts de l'ordre du millionième, qui ne peuvent être observés que grâce à l'extrême précision des mesures de spectroscopie interférentielle. On peut s'attendre à des différences plus importantes dans l'étude des *spectres de bandes*, qui sont produits par des rotations et des oscillations des atomes dans la molécule, et sont plus directement liés à leurs masses; une variation de 2 ou 3 pour 100 de la masse d'un des atomes peut entraîner un déplacement de plusieurs angströms des raies qui constituent certaines bandes. C'est ainsi qu'on a pu montrer que les bandes de CuCl sont formées de raies quadruples, correspondant aux deux isotopes du chlore de masses atomiques 35 et 37, et aux isotopes du cuivre de masses atomiques 63 et 65, formant les quatre molécules $^{63}Cu\,^{35}Cl$, $^{65}Cu\,^{35}Cl$, $^{63}Cu\,^{37}Cl$ et $^{65}Cu\,^{37}Cl$. De même, l'étude des bandes d'absorption de l'oxygène atmosphérique a montré l'existence des isotopes ^{17}O et ^{18}O, la proportion de ^{17}O étant environ 1/3.000 et celle de ^{18}O 1/500.

Dans les spectrographes de masse modernes, une disposition convenable des champs électrique et magnétique assure une double focalisation, rassemblant en un même point de la plaque photographique réceptrice les ions de même masse émis avec des vitesses légèrement différentes ou dans des directions formant un faisceau divergent d'ouverture notable. On arrive ainsi à obtenir des raies fines, dont la largeur ne dépasse pas 1/10 de millimètre, et à déterminer le rapport des masses de deux ions avec une précision de l'ordre de 1/50.000, tout au moins lorsque ces deux ions ont des masses voisines, comme par exemple la molécule d'hydrogène lourd $^{2}D^{2}$ et l'atome d'hélium ^{4}He, la molécule $^{12}C\,^{1}H^{4}$ et l'atome d'oxygène ^{16}O.

Les valeurs ainsi obtenues peuvent être comparées aux masses atomiques calculées par les chimistes : il faut toutefois prendre garde qu'en chimie on attribue la masse O = 16 à l'ensemble d'isotopes qui constitue l'oxygène atmosphérique, tandis qu'en spectrographie de masse on attribue la valeur O = 16 à la masse de l'isotope le plus léger de cet ensemble. Dans ce dernier système, l'oxygène des chimistes a la masse atomique 16,0035; les masses atomiques des chimistes doivent donc être augmentées d'environ 2/10.000 pour être comparées à celles des physiciens. On peut dire que, dans l'ensemble, la concordance est excellente : la masse atomique calculée, à partir des mesures de la spectrographie de masse, pour le mélange d'isotopes qui constitue un élément naturel, diffère au plus de quelques dix-millièmes de la valeur admise par les chimistes, et la différence est généralement explicable par l'insuffisance de la précision avec laquelle nous connaissons la proportion des différents isotopes dans le mélange naturel.

Nous connaissons aujourd'hui environ 280 isotopes stables des 83 éléments qui précèdent les corps radioactifs naturels dans le tableau de Mendeleeff. Il est remarquable que, sauf pour les isotopes de l'hydrogène ($^{1}H = 1,0081$, $^{2}H = 2,0147$) *les masses de tous ces isotopes sont exprimées, dans le système* $^{16}O = 16$, *par des nombres très voisins de nombres entiers*. Nous reviendrons plus loin (§ 422 *ter*) sur l'interprétation de ce fait, ainsi que sur l'interprétation des écarts (*défauts de masse*) entre les masses des isotopes et les nombres entiers; précisons seulement que ces écarts sont très généralement inférieurs à 1/1.000 en valeur relative.

De nombreux efforts ont été faits pour obtenir la séparation des isotopes

qui constituent un élément naturel. Le spectrographe de masse ne permet pas en effet d'isoler des quantités importantes des ions qui parviennent en des points différents du récepteur. Ce n'est qu'avec les métaux alcalins qu'on peut obtenir des faisceaux d'ions positifs relativement intenses, transportant par exemple un courant de 100 microampères, ce qui correspond pour le lithium à un débit de 0,02 milligramme par heure : on est arrivé à séparer complètement en leurs isotopes des échantillons de quelques milligrammes de rubidium et de potassium.

Les différents isotopes d'un même élément ayant mêmes propriétés chimiques, leur séparation ne peut être réalisée qu'en utilisant les propriétés physiques qui dépendent directement des masses des atomes, ou des masses des molécules des composés qu'ils forment. Les meilleures méthodes sont celles qui font appel aux différences des vitesses d'agitation moléculaire que fait prévoir la théorie cinétique classique, et qui utilisent la diffusion, soit à travers une paroi poreuse, soit dans la vapeur de mercure d'une pompe à diffusion. On est ainsi parvenu par exemple, par des fractionnements répétés, à obtenir des enrichissements notables de néon (Ne = 20,19) en isotopes ^{20}Ne et ^{22}Ne, et même à isoler l'isotope ^{20}Ne à l'état pur.

Dans le cas de l'hydrogène, la masse de l'isotope lourd ^{2}H, ou *deutérium*, est le double de celle de l'hydrogène ordinaire. Le rapport des masses des deux isotopes est ici égal à 2, au lieu de ne différer de l'unité que de quelques centièmes : aussi les diverses méthodes de diffusion, de distillation, etc., donnent-elles dans leur séparation un rendement bien meilleur que pour les autres corps. C'est ainsi que l'hydrogène lourd se concentre spontanément dans les cuves où l'on électrolyse l'eau pour la préparation industrielle de l'hydrogène : tandis que l'eau naturelle ne contient que des quantités de l'ordre de 2/10.000 d'eau lourde $^{2}H^{2}O$, l'eau qui a subi l'électrolyse arrive à en contenir 1/2.000. Le mélange d'hydrogènes préparé par réduction de cette eau peut être enrichi en isotope lourd par liquéfaction et distillation : on obtient ainsi des mélanges qui donnent au spectrographe de masses les raies des atomes $^{2}H^{+}$ ou des molécules $^{1}H\,^{2}H$. On a même pu par diffusion obtenir l'isotope ^{2}H à l'état pur : le spectre de l'atome ^{2}H est le même que celui de l'atome ^{1}H, mais les raies sont déplacées d'environ 1,5 angström vers le violet; dans les spectres des molécules $^{1}H\,^{2}H$ et $^{2}H^{2}$, les déplacements sont tels, par rapport aux raies de $^{1}H^{2}$, que l'aspect même des spectres paraît entièrement différent.

Signalons en terminant que l'*eau lourde*, $^{2}H^{2}O$, préparée avec l'isotope ^{2}H pur, présente des propriétés physiques différentes de celles de l'eau ordinaire : elle fond à + 3° 8, bout à 101°,4, a une densité de 1,106. On voit par ces chiffres quelle est l'importance des études modernes sur les isotopes : elles peuvent conduire à remettre en cause un certain nombre de définitions fondamentales, points fixes de l'échelle des températures, définition du litre, base du système des masses atomiques, que l'on croyait fondées sur les propriétés de corps purs, et qui sont fondées sur des propriétés, susceptibles de variations continues, de mélanges d'isotopes.

CHAPITRE XXXVI

LES RAYONS X

I. — *PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES*

383. Production des rayons X dans un tube de Crookes. — Les rayons X, ou rayons de Rœntgen, ont été découverts par Rœntgen en 1895; on sait maintenant qu'ils sont constitués par un rayonnement électromagnétique dont la longueur d'onde, très courte, est de l'ordre de l'angström, et qu'ils sont émis par toutes les substances frappées par des rayons cathodiques.

Pour produire un faisceau intense de rayons X au moyen d'un tube de Crookes, on place, au point où convergent les rayons cathodiques émis par une cathode concave, une plaque métallique A, généralement reliée à l'anode (*fig.* 452), qu'on appelle l'**anticathode;** sa surface émet des rayons X dans toutes les directions. Comme elle s'échauffe beaucoup par suite du choc des électrons, l'anticathode doit être faite d'un métal peu fusible, platine, ou mieux tungstène, et être prise massive. Dans l'appareil représenté par la figure 452, elle est refroidie par un courant d'eau, qui circule entre l'intérieur de la masse métallique et le réservoir R : on peut, avec de tels tubes, obtenir des courants de l'ordre de 50 milliampères avec des différences de potentiel de l'ordre de 150.000 volts.

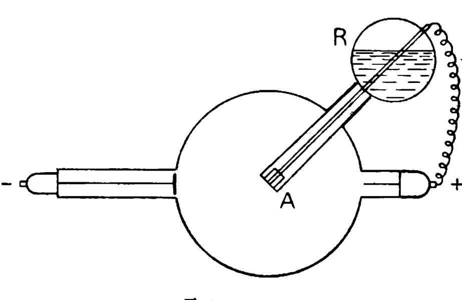


FIG. 452.

Le rayonnement émis n'est pas homogène et comprend toujours des rayons de longueurs d'onde différentes; la répartition de l'énergie rayonnante entre ces différentes longueurs d'onde dépend à la fois de la nature de l'anticathode (cf. § 393) et des conditions de fonctionnement du tube. Si, lors de l'arrivée d'un électron, l'anticathode fournit une énergie rayonnante W, la fréquence ν des rayons X émis est donnée par la relation $h\nu = W$ (§ 343). Quelles que soient les conditions du choc d'un électron rapide sur un atome métallique, il est certain que l'énergie W qui se retrouve sous forme d'énergie rayonnante est inférieure ou au plus égale à l'énergie cinétique $mv^2 / 2$ de l'électron; d'autre part, si V est la différence de potentiel établie entre les deux électrodes du

tube de Crookes, l'énergie cinétique $mv^2/2$ est au plus égale à eV. La relation d'Einstein fournit donc une limite supérieure de la fréquence ν des rayons X émis par le tube, et par suite une limite inférieure de leur longueur d'onde $\lambda = c/\nu$. On a :

$$\lambda \geqq \frac{hc}{eV}.$$

Si la différence de potentiel est $V = 40.000$ volts $= 4 \cdot 10^{12}$ u. é. m., on a :

$$\lambda \geqq \frac{6{,}55 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{1{,}59 \cdot 10^{-20} \cdot 4 \cdot 10^{12}}, \qquad \text{ou :} \qquad \lambda \geqq 0{,}3 \text{ angströms environ.}$$

Nous indiquerons tout à l'heure comment on peut former un spectre de rayons X et mesurer les longueurs d'onde de ces rayons. Le spectre fourni par une anticathode comprend un spectre continu, dont la limite est très nette du côté des courtes longueurs d'onde; la position de cette limite concorde parfaitement avec celle qu'on calcule par la relation d'Einstein et l'on admet que sa détermination est l'une des meilleures méthodes de mesure de la constante h : la valeur de h/e ainsi obtenue dans les mesures les plus récentes est $h/e = 1{,}3762 \cdot 10^{12}$ (cf. § 356), d'où, pour $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ u.é.s., $h = 6{,}61 \cdot 10^{-27}$.

L'emploi du tube de Crookes présente l'inconvénient que la pression y diminue spontanément au cours du fonctionnement; on est obligé d'adjoindre au tube de Crookes un régulateur permettant de produire un dégagement gazeux à l'intérieur du tube. Le réglage de la pression obtenu par l'emploi du régulateur est le seul réglage dont on dispose : plus la pression est faible, plus la différence de potentiel V nécessaire à l'obtention de la décharge est grande et plus la longueur d'onde des rayons obtenus est petite.

384. Tube Coolidge. — Dans les installations puissantes, on remplace aujourd'hui le tube de Crookes par un tube Coolidge (*fig.* 453). C'est un tube dans lequel on a établi un vide aussi parfait que possible, et dans lequel les électrons sont émis par une cathode incandescente, formée d'un filament de tungstène F. L'anticathode est constituée par une lame de tungstène A, portée par un bloc de cuivre solidaire d'un tube de molybdène T. On porte le filament F à l'incandescence au moyen du courant fourni par une batterie B de quelques accumulateurs, et on établit une grande différence de potentiel entre les électrodes A et F à l'aide d'une source à haute tension S; notons que le circuit de chauffage, relié à l'une des bornes de S, doit être soigneusement isolé. La source S peut être le secondaire d'un transformateur à courant alternatif : comme le courant ne peut être transporté à travers le tube que par les électrons qui sortent du filament incandescent, il ne peut passer que pendant la moitié de la période où ce filament est cathode. Toutefois, si l'anticathode vient à rougir, elle peut émettre elle-même des électrons : il est préférable, surtout si le régime de fonctionnement doit être un peu poussé, d'intercaler une lampe-valve entre la source S et le tube.

Le fonctionnement du tube Coolidge est entièrement différent de celui du tube de Crookes; dans ce dernier, l'émission des rayons cathodiques est liée à l'existence d'une chute de potentiel cathodique importante; pratiquement, presque toute l'ampoule se trouve au potentiel de l'anode (§ 373), et on

est obligé, pour éviter la rupture du verre, de donner une forme allongée au col du ballon qui porte la cathode (*fig.* 452); d'autre part toutes les parois de l'ampoule se trouvent chargées positivement, et le bombardement constant qu'elles subissent de la part des rayons cathodiques diffusés par l'anticathode leur communique une fluorescence intense, verte ou bleue suivant la nature du verre. Dans le tube Coolidge au contraire, il n'y a plus de chute de potentiel cathodique, et il n'y a plus de gaz dont l'ionisation puisse amener des centres positifs sur la paroi; les électrons diffusés par l'anticathode viennent charger la paroi jusqu'à ce qu'elle ait pris un potentiel tel qu'ils ne puissent plus l'atteindre : toute l'ampoule est pratiquement au potentiel de la cathode, et c'est

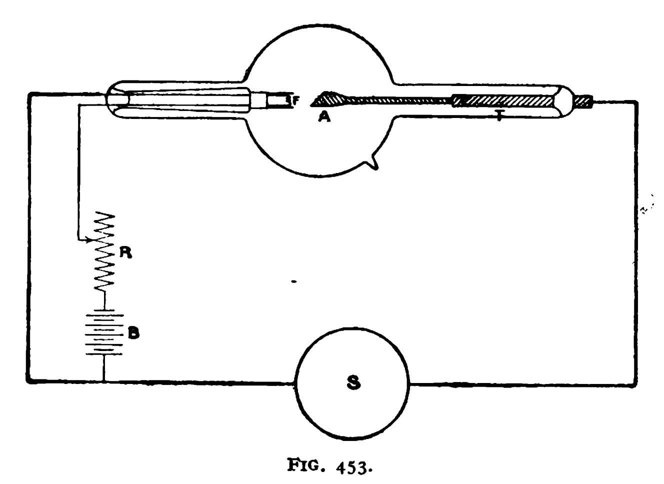


FIG. 453.

le col de l'anticathode qui supporte toute la différence de potentiel, et qui doit être particulièrement allongé. En même temps, la suppression du bombardement électronique des parois supprime totalement leur fluorescence.

Le tube Coolidge peut fournir des rayons X beaucoup plus intenses que le tube de Crookes; son rendement est bien meilleur, car toute la puissance fournie par la source S est transformée en force vive dans le faisceau cathodique; son emploi est plus commode, car le vide s'y maintient indéfiniment. Il est facile de le régler, et de faire varier, indépendamment l'une de l'autre, la longueur d'onde et l'intensité des rayons X émis : on peut en effet modifier séparément la vitesse des électrons, en agissant sur la différence de potentiel fournie par la source S, et leur nombre, en agissant sur l'intensité du courant de chauffage.

La limite inférieure des longueurs d'onde obtenues peut être calculée par la relation d'Einstein, à partir de la valeur maximum V de la différence de potentiel fournie par la source S. Dans les appareils modernes, le tube est plongé dans de l'huile, qui assure en même temps son isolement et son refroidissement; les parois métalliques extérieures de la cuve à huile servent également à protéger les opérateurs contre les rayons X, une fenêtre convenablement disposée ne laissant sortir que ceux qu'on utilise effectivement. Dans les installations de radiothérapie, on utilise couramment des potentiels de 200 et même de 400 kilovolts. On a même pu, avec des tubes de construction spéciale, sou-

mettre les électrons à des chutes de potentiel dépassant un million de volts, et obtenir des rayons X ayant une longueur d'onde de l'ordre de 0,01 angström : ces rayons, qui peuvent traverser plus de 10 centimètres de plomb, appartiennent au domaine des rayons γ des substances radioactives (§ 404).

385. Propriétés des rayons X. — L'existence des rayons X peut être décelée, soit par l'impression qu'ils produisent sur la plaque photographique, soit par la fluorescence qu'ils provoquent sur des écrans au platinocyanure de baryum ou au tungstate de cadmium. Ils n'excitent pas la fluorescence du verre : la fluorescence verte des parois de l'ampoule de Crookes est produite par des rayons cathodiques secondaires.

Les rayons X se propagent en ligne droite et traversent la plupart des substances, en subissant une absorption qui dépend à la fois de la longueur d'onde des rayons et de la nature de la substance. L'absorption par l'air, par la lame de verre qui constitue la paroi de l'ampoule, par la feuille de papier noir qui entoure la plaque photographique ou par la feuille de carton qui porte la substance fluorescente est en général négligeable; l'absorption par les chairs du corps humain est faible, l'absorption par les os est plus importante. Les métaux ont un pouvoir absorbant assez fort, d'autant plus fort que la masse atomique du métal est plus élevée : une lame de plomb de 2 centimètres d'épaisseur constitue un écran qui arrête la plupart des rayons X.

Dans un grand nombre de cas, l'absorption diminue régulièrement à mesure que la longueur d'onde diminue : dans le cas de l'aluminium, la loi de variation est assez bien connue pour qu'on puisse déduire la longueur d'onde de la radiation de la mesure de son absorption; ce sont en général des écrans d'aluminium, d'une épaisseur de l'ordre du centimètre, qu'on emploie lorsqu'on veut filtrer le rayonnement d'une ampoule à rayons X pour ne conserver que les rayons durs. Les rayons de grande longueur d'onde, produits par des différences de potentiel faibles, sont peu pénétrants, et sont appelés des *rayons mous;* les rayons de courte longueur d'onde, produits par des différences de potentiel élevées, sont très pénétrants, et sont appelés des *rayons durs :* on a réalisé des rayons très mous de longueur d'onde supérieure à 100 angströms, arrêtés par la traversée de quelques centimètres d'air à la pression atmosphérique, et des rayons très durs de longueur d'onde inférieure à 0,1 angström, susceptibles de traverser 2 à 3 centimètres de plomb.

Lorsque les rayons X émis par une anticathode de petites dimensions traversent un objet dont les différentes parties produisent des absorptions différentes, les parties opaques donnent des ombres, qu'on peut observer sur un écran fluorescent **(radioscopie)** ou enregistrer sur une plaque photographique **(radiographie)**. Aussi les rayons X ont-ils reçu de nombreuses applications pour l'examen des corps qui ne sont pas transparents aux rayons lumineux; la possibilité de faire varier leur dureté dans de larges limites permet de les employer à l'examen d'objets d'opacités très différentes. Parmi leurs principales applications, citons leur emploi en médecine, pour l'examen des fractures des os, la recherche dans les tissus des corps étrangers métalliques, etc., et leur emploi en métallurgie pour l'étude de l'homogénéité d'un métal au voisinage d'une soudure, la recherche des bulles dans les métaux coulés, etc.

L'action des rayons X sur les tissus de l'organisme peut produire, si elle est très prolongée, des brûlures profondes extrêmement dangereuses; il est indis-

pensable, dans les installations radioscopiques, de protéger les opérateurs par des écrans de plomb, des tabliers en caoutchouc contenant du plomb, des glaces et des lunettes en verre à base de plomb. Il semble que les tissus tels que les tissus cancéreux soient plus rapidement détruits que les tissus sains : on a essayé d'obtenir la guérison du cancer par l'action, convenablement dosée, des rayons X.

Un corps quelconque, recevant un faisceau de rayons X, émet des rayons secondaires, sur lesquels nous reviendrons plus loin : ils sont formés de rayons X (§ 393) et d'électrons animés de grandes vitesses (§ 394).

Les rayons X produisent l'ionisation des gaz, et la mesure du courant de saturation dans le gaz ionisé (§ 364) fournit une mesure de l'intensité du faisceau de rayons X. Il semble que le phénomène que produit directement leur action sur les molécules du gaz est l'émission de rayons secondaires, constitués par des électrons animés de grandes vitesses, et que ce sont ces rayons secondaires qui produisent l'ionisation du gaz (cf. § 394).

386. Optique physique des rayons X. — Dès la découverte des rayons X, on s'est préoccupé de rechercher quelle pouvait être leur nature, et on a constaté que ni le champ électrique, ni le champ magnétique n'étaient susceptibles de les dévier, c'est-à-dire qu'ils n'étaient pas constitués par des particules électrisées. On a également pu déterminer leur vitesse de propagation, et on a trouvé qu'elle était égale à la vitesse de la lumière : on a dès lors supposé qu'ils étaient constitués par des ondes électromagnétiques, analogues aux ondes lumineuses.

Mais toutes les expériences tentées de 1895 à 1912 pour mettre en évidence des phénomènes de réflexion, de réfraction et de diffraction analogues aux phénomènes de l'Optique n'ont fourni que des résultats négatifs, et ont simplement permis de conclure que la longueur d'onde des rayons X devait être beaucoup plus courte que celle des radiations lumineuses. La preuve expérimentale directe de leur nature périodique n'a été obtenue qu'en 1912, quand Laue a observé leur diffraction par le réseau de diffraction naturel, à intervalles extrêmement serrés, que constituent les atomes d'un cristal : les phénomènes de diffraction cristalline des rayons X ont permis, dans les dix années qui ont suivi la découverte de Laue, de mesurer leurs longueurs d'onde avec précision et d'en édifier une véritable spectroscopie. Bien que ces questions se rattachent plus à l'Optique qu'à l'Électricité, nous en dirons quelques mots dans les paragraphes suivants ; nous allons auparavant indiquer quelques expériences plus récentes, qui ont reproduit, avec les rayons X, les phénomènes les plus importants de l'Optique.

La valeur de l'indice de réfraction d'une substance transparente est donnée, en fonction de la longueur d'onde λ des radiations lumineuses, par la formule de dispersion de Drude. Si, dans cette formule, on donne à λ les valeurs, de l'ordre de l'angström, qui correspondent aux rayons X usuels, on trouve des indices μ inférieurs à l'unité : la différence $\delta = 1 - \mu$ est de l'ordre de 5.10^{-6} pour le verre usuel, et est proportionnelle à λ^2. L'indice de l'air étant inférieur à celui du verre, un faisceau de rayons X tombant dans l'air sur une surface de verre doit pouvoir subir la **réflexion totale** ; si θ est l'angle du faisceau avec la surface, l'angle d'incidence, au sens habituel de l'Optique, est $\frac{\pi}{2} - \theta$,

et l'angle limite θ_m est donné par la condition :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_m\right) = \mu, \qquad \sin\theta_m = \sqrt{1-\mu^2} = \sqrt{2\delta}.$$

Pour $\delta = 5.10^{-6}$, on trouve ainsi $\theta_m = 3{,}1.10^{-3}$ radian $= 11'$; l'angle du faisceau réfléchi et du faisceau incident doit être $22'$, valeur parfaitement observable avec un faisceau de rayons X suffisamment délié, tel qu'on peut l'obtenir en le limitant par des fentes fines. L'expérience a en effet été faite avec succès, aussi bien pour le verre que pour différents métaux; Siegbahn a même réussi, en faisant tomber un faisceau délié au voisinage de l'arête A d'un prisme (*fig.* 454), à obtenir sur une plaque photographique P trois taches

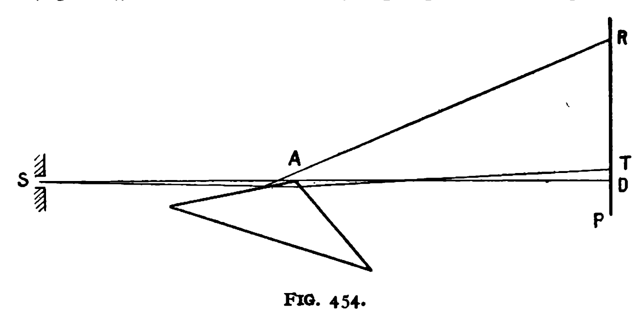


FIG. 454.

distinctes, une tache D non déviée correspondant à ceux des rayons qui passent en dehors de l'arête, une tache R correspondant aux rayons réfléchis, une tache T correspondant aux rayons transmis par le prisme et dont la déviation est en sens inverse de la déviation optique habituelle. Si le faisceau contient plusieurs radiations distinctes, on obtient en T un véritable **spectre prismatique,** qui permet de mesurer l'indice μ : la différence $\delta = 1 - \mu$ est bien de l'ordre de grandeur calculé par la formule de Drude et varie bien proportionnellement à λ^2.

On a pu reproduire avec les rayons X les phénomènes **d'interférences** dits *franges de Lloyd;* les rayons proviennent d'une fente de 0,1 μ de largeur placée à une distance de 2,2 μ de la surface d'un miroir; on photographie sur une plaque placée à 150 millimètres les interférences des rayons directs et des rayons réfléchis : avec la raie $K\alpha$ du cuivre ($\lambda = 1{,}54$ A), l'interfrange est de 5 μ, et correspond bien à la valeur théorique. On a de même observé avec des fentes de quelques microns, les phénomènes de **diffraction par une fente;** les franges sont en tout point semblables à celles de l'Optique et présentent bien la largeur calculée par les formules classiques.

387. Mesure absolue de la longueur d'onde des rayons X. — L'existence de la réflexion totale des rayons X a permis d'*employer à la diffraction des rayons X les réseaux ordinaires de l'Optique* — réseaux plans sur métal ou sur verre — *à condition de les éclairer sous une incidence rasante.* Soit θ l'angle, inférieur à θ_m, que forme le faisceau incident monochromatique avec la surface du réseau; soit Δ la déviation du faisceau diffracté (*fig.* 455) : son angle avec la surface du réseau est $\Delta - \theta$. Les angles d'incidence et de diffraction,

au sens habituel de l'Optique, sont les angles complémentaires de θ et $\Delta - \theta$, et la formule classique des réseaux donne, pour le spectre d'ordre p d'un réseau de n traits par unité de longueur :

$$\cos \theta - \cos (\Delta - \theta) = np\lambda,$$

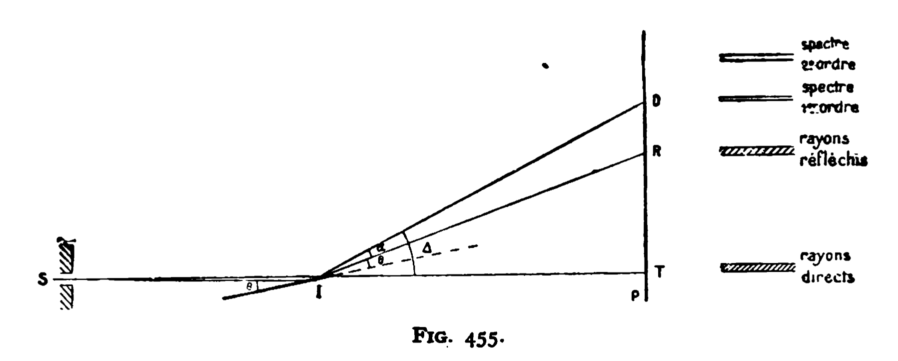


FIG. 455.

ou, en tenant compte de la petitesse des angles θ et Δ, et en introduisant l'angle $\alpha = \Delta - 2\theta$ du rayon diffracté et du rayon réfléchi :

$$np\lambda = \frac{(\Delta - \theta)^2 - \theta^2}{2} = \frac{\alpha\Delta}{2}.$$

Pour un réseau à 200 traits par millimètre, et pour $y = 1{,}5$ A, le spectre du premier ordre correspond à $np\lambda = 3.10^{-5}$; pour un angle $\theta = 15' = 0{,}0045$ radian, la formule donne $(\Delta - \theta)^2 = \theta^2 + 2np\lambda = 80{,}3.10^{-6}$, d'où $\Delta - \theta = 0{,}0089 = 30'$; on doit donc avoir $\Delta = 45'$ et $\alpha = 15'$: sur une plaque photographique P placée à une distance $d = 1$ mètre du réseau, les traces T, R et D des trois faisceaux seront séparées par des distances $TD = \Delta d = 12{,}4$ mm et $RD = ad = 4^{mm}, 4$. Ce sont là des distances parfaitement mesurables si le faisceau incident est suffisamment fin : on a pu effectivement enregistrer des spectres de diffraction à raies très fines, jusqu'au quatrième ordre dans certains cas ; comme le cliché porte toujours, outre les traces R et D des rayons réfléchis et diffractés, la trace T des rayons qui ont passé au-dessus du réseau, on peut y mesurer les longueurs TD et RD, calculer les angles Δ et α et en déduire la valeur des longueurs d'onde.

Ces mesures sont extrêmement importantes, car *elles ont permis de calculer les longueurs d'onde des rayons* X *à partir d'une longueur directement mesurée, qui est l'intervalle des traits du réseau.* Elles ont permis de confirmer de façon définitive les valeurs fournies par la diffraction cristalline ; nous reviendrons plus loin (§ 392) sur la vérification de l'accord des deux méthodes. Signalons simplement ici que, si l'emploi de la diffraction cristalline est plus avantageux que celui des réseaux pour la plupart des problèmes de la spectrographie des rayons X, il donne aujourd'hui moins de précision dans la détermination des longueurs d'onde en valeur absolue : l'emploi de réseaux concaves a permis, dans cette détermination, d'atteindre, et peut-être de dépasser, la précision du dix-millième.

II. — *DIFFRACTION DES RAYONS X PAR LES CRISTAUX*

388. Réflexion d'une onde plane par un réseau cristallin. — Rappelons d'abord que, d'après les hypothèses fondamentales de la cristallographie un cristal est constitué par des éléments identiques — atomes, molécules ou groupements de molécules — distribués régulièrement dans l'espace, aux sommets des mailles d'un ***réseau.*** Dans le cas d'un cristal appartenant au système cubique, la maille élémentaire du réseau est un cube, et le réseau est constitué par une infinité de mailles cubiques identiques entre elles : les éléments matériels, que nous supposerons, pour la commodité du langage, être des atomes, occupent les sommets de ces cubes (*fig.* 456).

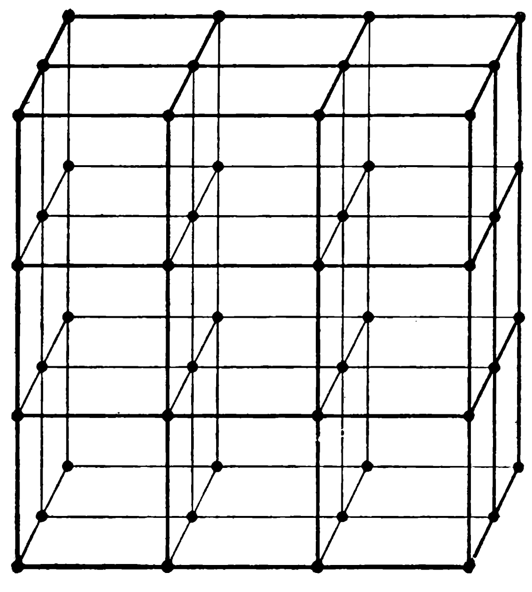


FIG. 456.

Lorsque l'onde électromagnétique plane que constitue un faisceau parallèle de rayons X tombe sur un cristal, elle y pénètre profondément : la formation d'un faisceau réfléchi fait intervenir tous les atomes du cristal, qu'ils se trouvent dans des couches profondes ou dans des couches superficielles. On déterminera la direction du faisceau réfléchi en appliquant, comme en Optique, le principe d'Huyghens : chacun des atomes atteint par l'onde incidente fonctionne comme une source de rayons X ; il produit une onde diffractée sphérique, et l'existence d'un faisceau réfléchi provient de l'interférence de l'ensemble de ces ondes diffractées. Les ondes élémentaires à composer sont très nombreuses, et leurs centres sont régulièrement répartis dans l'espace ; le problème à traiter est analogue à celui de l'interférence des ondes lumineuses diffractées par les traits d'un réseau : le faisceau réfléchi est bien défini, et sa direction est celle dans laquelle toutes les ondes élémentaires diffractées sont en accord de phase.

On trouvera dans les traités d'Optique le détail des calculs qui fournissent les conditions nécessaires à la réalisation de cet accord de phase. Groupons tous les atomes suivant un système de **plans réticulaires,** c'est-à-dire suivant des plans équidistants, les contenant tous (*fig.* 457). Soit d l'équidistance

A_2H de ces plans, θ l'angle que forment avec eux les rayons incidents S_1A_1 ... On montre d'abord que les ondes diffractées par les différents atomes d'un

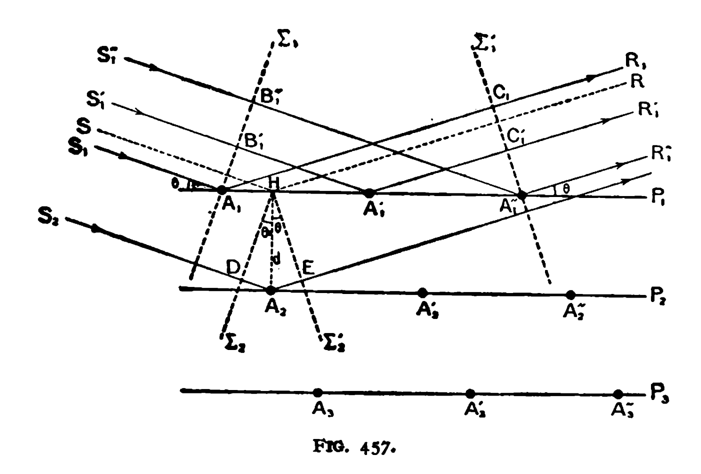


FIG. 457.

même plan sont en phase si la direction des rayons diffractés A_1R_1... fait avec ce plan un angle égal à θ ; on montre ensuite que les systèmes d'ondes fournies par les différents plans réticulaires sont en phase si la différence de marche $DA_2 + A_2E = 2\,d \sin \theta$ est égale à un nombre entier de longueurs d'onde.

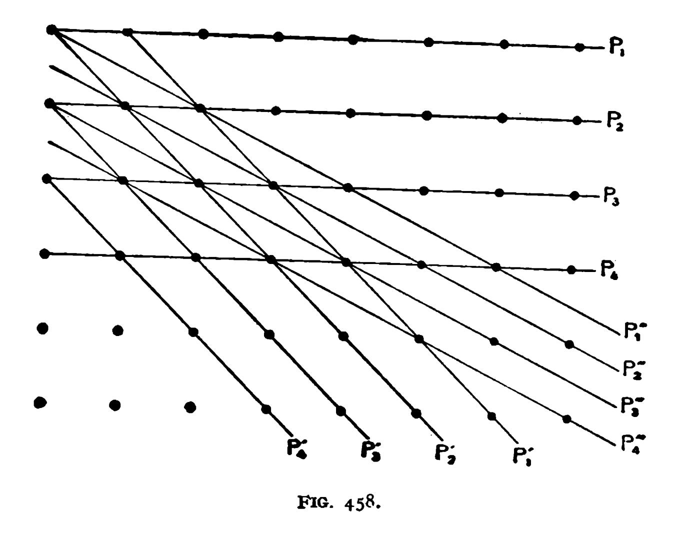


FIG. 458.

En résumé, *un faisceau de rayons X tombant sur un cristal donne naissance à un faisceau réfléchi, dont la direction est donnée, à partir de la direction des plans réticulaires, par les lois ordinaires de la réflexion, à condition que la longueur*

d'onde* λ *des rayons et l'angle* θ *qu'ils forment avec le plan réticulaire soient liés par la relation :

$$2d \sin \theta = p\lambda,$$

p étant un nombre entier quelconque.

On voit quelles sont les différences qui existent entre la réflexion des rayons X et celle des rayons lumineux. Les rayons lumineux ont une longueur d'onde qui est grande par rapport à l'intervalle des éléments cristallins : la matière se comporte pour eux comme si elle était continue, et la réflexion a toujours lieu sur la surface du cristal. Au contraire, les rayons X ont une longueur d'onde comparable à la distance des atomes; ils pénètrent profondément dans le cristal, et on ne peut observer de rayon réfléchi que si les ondes réfléchies à l'intérieur du cristal ne détruisent pas par interférence celles qui sont réfléchies à la surface : à ce point de vue, on peut comparer la réflexion des rayons X par un cristal à la réflexion des ondes lumineuses par les plaques obtenues dans la photographie en couleurs par la méthode de Lippmann.

De même, tandis que la direction des rayons lumineux réfléchis à la surface d'un cristal ne dépend que de l'orientation de cette surface, la direction des rayons X réfléchis à l'intérieur du cristal dépend uniquement de l'arrangement des atomes, c'est-à-dire de l'orientation des plans réticulaires : elle ne dépend pas de l'orientation de la surface cristalline. Il existe d'ailleurs dans un cristal plusieurs façons de grouper les atomes en plans réticulaires, et par conséquent plusieurs directions de réflexion possibles : si la répartition des atomes correspond au schéma de la figure 458, la réflexion peut avoir lieu sur les plans P_1P_2..., ou sur les plans $P'_1P'_2$..., ou sur les plans $P''_1 P''_2$..

389. Spectromètres à rayons X. — Si l'on fait tomber un pinceau homogène de rayons X, de longueur d'onde λ, sur un cristal C, l'angle θ qu'il forme avec un des plans réticulaires ne satisfait pas en général à la condition $2d \sin \theta = p\lambda$, et il n'y a pas de rayons réfléchis. Mais si l'on fait tourner lentement le cristal autour d'un axe I perpendiculaire au rayon incident (*fig.* 459), il y a des positions particulières du cristal pour lesquelles la relation est satisfaite : pour l'une de ces positions, on observe un rayon réfléchi IR faisant avec le rayon incident SI un angle 2θ.

On mesure l'intensité du rayon réfléchi en le recevant dans une chambre d'ionisation L, et en mesurant l'intensité i du courant de saturation qu'il produit entre deux plateaux parallèles PP′ (Bragg). Le cristal est porté par la plate-forme d'un goniomètre; on le fait tourner d'angles θ mesurés par ce goniomètre, et on fait tourner à chaque mesure la chambre d'ionisation d'un angle double de celui dont a tourné le cristal. On construit une courbe en portant en abscisses les angles θ et en ordonnées les intensités i : elle présente des maxima extrêmement nets (*fig.* 462, § 391), et permet de déterminer les valeurs θ_1, θ_2, θ_3, ... des angles θ pour lesquels la réflexion a lieu [1].

L'expérience montre que les réflexions successives se font bien sous des angles θ_1, θ_2, θ_3, ... *correspondant aux valeurs successives* 1, 2, 3... *du nombre entier* p *et*

[1] Il serait difficile de déterminer la position du cristal pour laquelle le plan réflecteur est parallèle au rayon incident SI ; au lieu de mesurer l'angle θ on mesure l'angle 2θ que forment les positions de réflexion symétriques C et C′.

que les rayons réfléchis sont bien avec le rayon incident les angles $2\theta_1$, $2\theta_2$, $2\theta_3$... *Elle donne en même temps la valeur du rapport* λ / d :

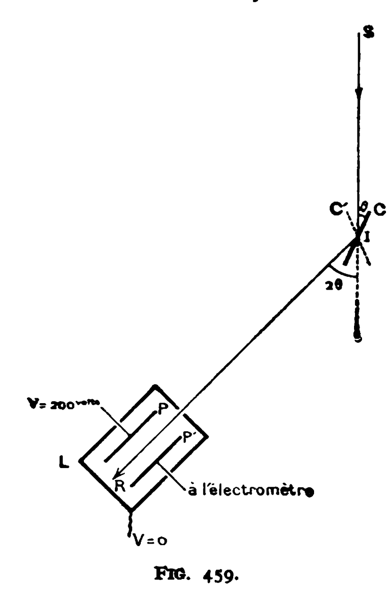


FIG. 459.

$$\frac{\lambda}{2d} = \frac{\sin \theta_1}{1} = \frac{\sin \theta_2}{2} = \frac{\sin \theta_3}{3} = \dots$$

C'est ainsi que, dans la réflexion des rayons X du palladium sur un cristal de sel gemme, la valeur de ce rapport est voisine de 0,1, et les angles θ sont de l'ordre de 6°, 12°, 18°,...

On peut aussi déterminer la direction des rayons X réfléchis en les recevant sur une plaque photographique (de Broglie). On fait tourner lentement le cristal de façon que les rayons réfléchis balaient la plaque P (*fig.* 460) : elle n'est impressionnée qu'aux points R pour lesquels la déviation HIR a l'une des valeurs privilégiées $2\theta_1$, $2\theta_2$ ... On déduit la valeur de l'angle θ de la mesure de la distance RH : le point H est marqué sur la plaque par la tache qu'y produisent les rayons directs SIH, car il y a toujours une partie du faisceau qui traverse le cristal sans être réfléchie ni absorbée. On peut aussi, si la plaque est assez grande, y enregistrer les deux déviations symétriques HR et HR′ correspondant aux deux positions C et C′ du cristal, et déduire l'angle 4θ de la mesure de la distance RR′.

Si le faisceau de rayons X n'est pas homogène, et contient des radiations de longueurs d'onde différentes λ, λ'..., chacune d'elles donne une série de taches, correspondant à des angles θ_1, θ_2, ..., θ'_1, θ'_2... On obtient ainsi un **spectre de rayons X** : plus exactement, le cristal fournit la série des spectres des différents ordres, comme un réseau de diffraction fournit la série des spectres lumineux des différents ordres. *On déduit le rapport des longueurs d'onde* λ *et* λ' *de la mesure des angles* θ_p *et* θ'_p *correspondant à un même spectre ; on a :*

$$2d \sin \theta_p = p\lambda ; \quad 2d \sin \theta'_p = p\lambda' ;$$
$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sin \theta'_p}{\sin \theta_p}.$$

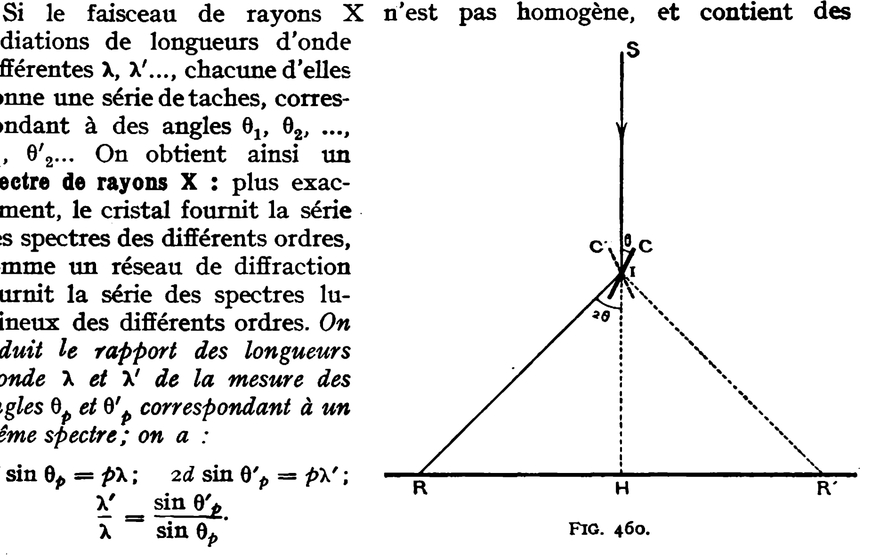


FIG. 460.

Les indications que nous venons de donner ne représentent, bien entendu, que le schéma des spectromètres destinés aux mesures précises ; des dispositifs

spéciaux permettent d'obtenir dans ces appareils des raies à la fois fines et intenses, et on y réalise des déviations assez grandes par l'emploi de spectres d'ordre élevé; pour les mesurer avec précision, on monte la plaque photographique sur l'alidade d'un goniomètre, et on détermine l'angle 4θ dont il faut la faire tourner pour que les deux raies R et R′ coïncident (Siegbahn).

On est ainsi arrivé à déterminer le rapport des longueurs d'onde de deux radiations appartenant au spectre de rayons X avec une précision voisine du cent-millième.

390. Étude de la structure d'un cristal. — Comme les rayons X peuvent être réfléchis par les différents plans réticulaires suivant lesquels on peut grouper les atomes d'un cristal, l'étude des spectres de rayons X permet de déterminer la répartition de ces plans dans l'espace, et peut par suite donner des renseignements sur la structure du cristal. Une même radiation est réfléchie sur les différents systèmes de plans réticulaires pour des angles différents θ_1, θ_2..., θ'_1, θ'_2..., θ''_1, θ''_2..., et l'on peut observer les différentes déviations $2\theta_1$, $2\theta_2$..., $2\theta''_2$... On peut les mesurer sur un même spectrogramme en remplaçant le cristal tournant par une plaque fixe formée de grains très fins, de l'ordre de 1/100 de mm, obtenus en pulvérisant le cristal (Hull, Debye-Scherrer) : il y a toujours des grains orientés de façon que la réflexion sous l'un quelconque des angles θ_1... puisse se produire.

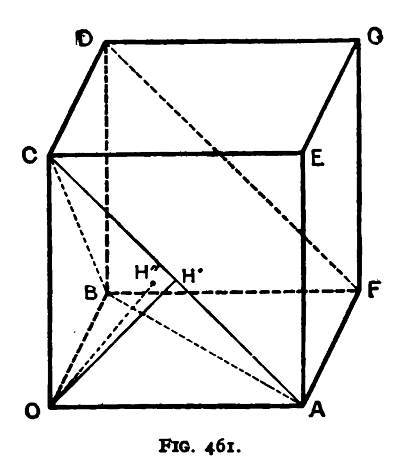


FIG. 461.

La mesure des déviations permet d'obtenir le rapport des équidistances d, d′, d″... des systèmes de plans réticulaires. Pour les spectres du premier ordre, on a :

$$2d \sin \theta_1 = \lambda; \qquad 2d' \sin \theta'_1 = \lambda; \qquad 2d'' \sin \theta''_1 = \lambda;$$

d'où :

$$d \sin \theta_1 = d' \sin \theta'_1 = d'' \sin \theta''_1.$$

Considérons par exemple un cristal cubique, et soit OABCDEFG un cube élémentaire constituant une des mailles du réseau (*fig.* 461) : les atomes peuvent être groupés en plans réticulaires parallèles aux plans CDEG, CDAF, ou CAB, et les équidistances de ces trois systèmes sont les distances OC, OH′ OH″ du point O aux trois plans CDEG, CDAF et CAB. On a :

$$d = d' \sqrt{2} = d'' \sqrt{3},$$

et on doit avoir :

$$\frac{\sin \theta_1}{1} = \frac{\sin \theta'_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \theta''_1}{\sqrt{3}}.$$

Cette relation est bien vérifiée, par exemple pour la sylvine (chlorure de potassium KCl).

De même *la mesure des déviations* $2\theta_1$ *et* $2\theta'_1$ *données par deux cristaux diffé-*

rents avec la même radiation permet d'obtenir le rapport des distances d et d' de leurs plans réticulaires.

Si l'on étudie deux cristaux cubiques de constitutions chimiques analogues, les éléments placés à chacun des sommets sont analogues, et les volumes occupés dans chaque cristal par une molécule-gramme comprennent le même nombre de cubes élémentaires. Le volume occupé par une molécule-gramme d'un corps de masse moléculaire M dans un cristal de densité ρ est M / ρ ; le volume d'un cube élémentaire est d^3. D'autre part, pour une radiation donnée, on a $d \sin \theta = \lambda/2 = C^{te}$. On doit donc avoir pour tous les cristaux d'un même groupe :

$$M/\rho d^3 = C^{te} \qquad \text{ou} \qquad \sin \theta \sqrt[3]{M/\rho} = C^{te}.$$

Effectivement, en mesurant les valeurs de θ pour les rayons du palladium, on a trouvé que les valeurs de cette quantité étaient égales, pour le chlorure de sodium NaCl, à 0,312, pour le chlorure de potassium KCl, à 0,314 et, pour le bromure de potassium KBr, à 0,312.

391. Constitution des sels cristallisés. — Nous avons supposé que les éléments placés aux sommets des mailles du réseau cristallin sont des atomes : c'est en effet la conclusion à laquelle a conduit l'étude de la structure cristalline d'un certain nombre de sels. Nous allons en donner un exemple.

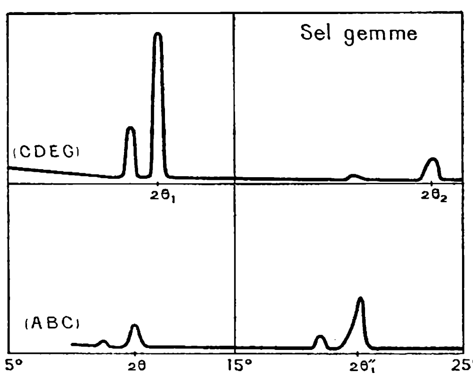


FIG. 462.

L'étude de la réflexion des rayons X du palladium sur un cristal de sel gemme donne, pour la déviation $2\theta_1$ due à la réflexion sur le plan CDEG (*fig.* 461), une valeur égale à 11°8 ; la valeur correspondante de la déviation $2\theta''_1$ due à la réflexion sur le plan ABC, déduite de la relation $\sin \theta''_1 = \sqrt{3} \sin \theta_1$, est égale à 21°. Or lorsqu'on étudie cette réflexion, on observe, en plus de la réflexion avec déviation de 21°, une première réflexion plus faible pour une valeur de l'angle 2θ égale à 11° : la figure 462 reproduit la courbe obtenue (1) par la méthode de l'ionisation (§ 389). Pour $2\theta = 21°$, il y a une différence de marche de λ entre les rayons réfléchis par deux plans réticulaires consécutifs ABC et IJKL (*fig.* 463); pour $2\theta = 11°$, il y a entre ces rayons une différence de marche de $\lambda/2$. L'expérience montre que les rayons réfléchis par ces deux plans ne se détruisent pas complètement lorsqu'ils sont en opposition de phase : c'est donc que leurs intensités sont différentes; autrement dit, deux plans réticulaires consécutifs ont des pouvoirs réflecteurs différents. On ne peut l'expliquer qu'en admettant qu'ils ont des

(1) Les abscisses sont les angles 2θ fournis par la position de a chambre d'ionisation; les ordonnées sont les courants d'ionisation mesurés. On remarquera que chacun des maxima observés est double, parce que la raie du palladium employée est en réalité un doublet.

constitutions différentes; *le plan* IJKL *ne contient que des atomes de sodium, le plan* ABC *ne contient que des atomes de chlore*, et la véritable équidistance des plans réticulaires parallèles à ABC est la distance $2d''$ des deux plans identiques ABC et A′B′C′.

On est ainsi conduit à représenter la distribution des atomes dans le cristal de sel gemme par le schéma de la figure 463 : le long d'une arête du réseau, on rencontre alternativement un atome de sodium et un atome de chlore. *Il n'y a nulle part de groupement qui ressemble à une molécule de chlorure de sodium* NaCl; l'atome de sodium qui se trouve en O est entouré de 6 atomes de chlore, et il n'y a pas de raison de supposer qu'il soit lié à l'un quelconque de ces 6 atomes plutôt qu'aux cinq autres.

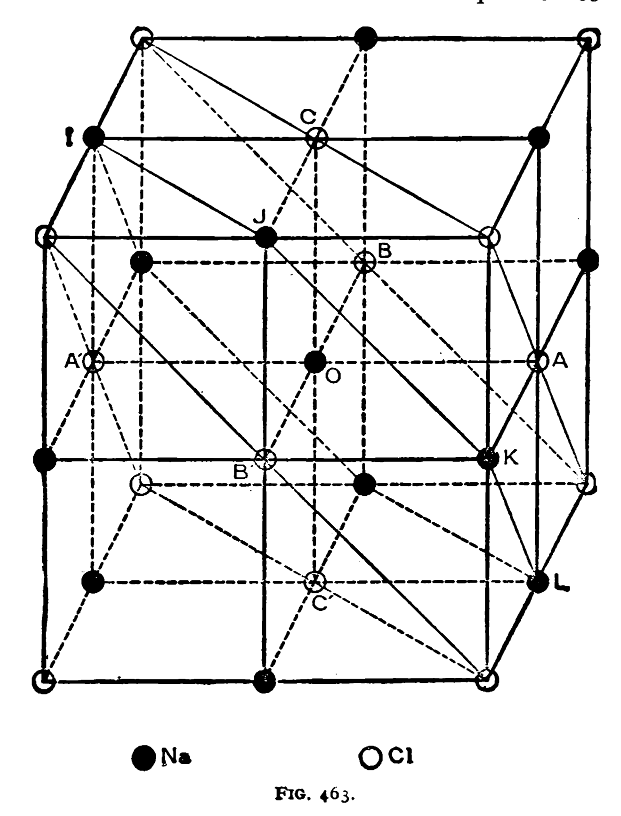


FIG. 463.

Des distributions analogues ont été trouvées pour un grand nombre de sels, et le fait de la dissociation de la molécule saline en ses éléments à l'intérieur du réseau cristallin paraît général. Il est naturel de le rapprocher du fait de sa dissociation en ions dans les solutions (§ 167), et de supposer que les éléments du réseau cristallin sont, non pas les atomes, mais les ions Na^+ et Cl^-. Dans cette hypothèse, les forces de cohésion cristalline ne sont autres que les forces d'attraction électrostatique qui s'exercent entre ces ions, et la chaleur absorbée par la dissolution du cristal, c'est-à-dire l'énergie qu'il faut fournir pour le faire passer dans une solution étendue, n'est autre que le travail qu'il faut fournir contre les forces électrostatiques pour séparer les ions les uns des autres au sein du milieu diélectrique constitué par l'eau.

392. Valeur absolue des longueurs d'onde. — La connaissance de la structure d'un cristal de sel gemme permet de calculer la longueur d de l'arête du cube élémentaire. Si nous désignons par N le nombre d'Avogadro, la molécule-gramme de chlorure de sodium comprend en tout 2N atomes; comme chaque cube a 8 sommets, et que chaque sommet, occupé par un atome, est

commun à 8 cubes, le volume qu'elle occupe doit contenir 2N cubes élémentaires. Ce volume est égal au quotient de la masse moléculaire M par la masse spécifique ρ du cristal; le volume d'un cube élémentaire est d^3; on a :

$$\frac{M}{\rho} = 2Nd^3, \qquad d = \sqrt[3]{\frac{1}{2N} \cdot \frac{M}{\rho}}.$$

On trouve ainsi, en prenant $N = 6{,}05 \cdot 10^{23}$, $M = 58{,}5$, $\rho = 2{,}17$:

$$d = 2{,}814 \text{ angströms.}$$

Il est facile de déterminer le rapport des distances des plans réticulaires de deux cristaux : à partir de la valeur qui caractérise le sel gemme, prise comme étalon, on pourra calculer les valeurs qui correspondent à un autre cristal quelconque.

On peut également, à partir de cette distance d, calculer en valeur absolue la longueur d'onde λ des rayons X qui donnent des réflexions pour les angles θ_1, θ_2... ; on a :

$$\frac{\lambda}{2d} = \frac{\sin\theta_1}{1} = \frac{\sin\theta_2}{2} = \frac{\sin\theta_3}{3} = \ldots$$

C'est ainsi qu'à un angle θ_1 de réflexion sur le sel gemme voisin de 6° correspondra une longueur d'onde λ voisine de 0,6 angström.

Les distances réticulaires des cristaux sont de l'ordre de quelques angströms ; les longueurs d'onde des rayons X usuels sont de l'ordre de quelques dixièmes d'angströms ; leurs fréquences $\nu = c / \lambda$, *sont de l'ordre de* 10^{19}.

Comme nous l'avons déjà signalé (§ 387), ces résultats sont parfaitement confirmés par les mesures directes de longueur d'onde effectuées à l'aide de réseaux optiques sur verre. Mais il faut remarquer que dans le calcul numérique que nous venons de faire nous avons employé pour le nombre d'Avogadro la valeur $N = 6{,}05 \cdot 10^{23}$ que l'on admettait il y a quelques années. Lorsque l'emploi des réseaux (§ 387) permit de déterminer avec précision en valeur absolue la longueur d'onde λ d'une radiation X, et par conséquent l'équidistance d d'un réseau cristallin, on préféra conduire le calcul de façon à déduire de ces mesures la valeur N du nombre d'Avogadro, ou, ce qui est équivalent, la charge élémentaire e ($Ne = 9\,649$ u. é. m.) : on obtint ainsi des valeurs de e comprises entre $4{,}799$ et $4{,}805 \cdot 10^{-10}$ u. é. s., supérieures à la valeur $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ qu'avait donnée Millikan. Les expériences récentes ont montré que c'était cette dernière valeur qui était trop faible, par suite d'une précision insuffisante dans la détermination du coefficient de viscosité de l'air : nous avons dit au paragraphe 348 que l'on admet maintenant que l'expérience de Millikan donne $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ u. é. s., de sorte que l'accord des différentes méthodes peut être considéré comme satisfaisant.

La réflexion sur un cristal ne peut avoir lieu que si la formule $2d \sin\theta = \lambda$ donne une valeur de $\sin\theta$ inférieure à 1, c'est-à-dire si l'on a $\lambda < 2d$: la différence de marche maximum entre les rayons réfléchis sur deux plans réticulaires consécutifs est $2d$, et ces rayons ne peuvent jamais être en phase si λ est supérieur à $2d$. On peut utiliser la réflexion cristalline aux mesures de longueur d'onde tant que la longueur d'onde ne dépasse pas une douzaine d'angströms, en employant des cristaux à larges mailles, tels que le mica ($d = 10{,}1$ A).

En étendant sur du plomb une couche mince d'*acide mélissique*, on forme un savon à molécules orientées, dont l'équidistance des plans réticulaires est de 87 A; Dauvillier a réussi avec un tel réseau à mesurer des longueurs d'onde allant jusqu'à 150 A. Mais, dans ces régions, il semble plus avantageux (Thibaud, 1927) d'employer les réseaux sur verre sous l'incidence rasante (§ 387); quel que soit d'ailleurs l'appareil que l'on emploie à l'étude des rayons mous, il est nécessaire d'opérer dans le vide, à cause de l'importance de l'absorption de ces rayons par l'air.

Du côté des petites longueurs d'onde (rayons X très pénétrants), la principale difficulté provient de la petitesse des angles à mesurer. Avec un cristal de sel gemme, Frilley (1928) a réussi à mesurer des angles θ d'une dizaine de minutes, et à atteindre des longueurs d'onde dont la plus courte était de 16 millièmes d'angström. Ces longueurs d'onde se mesurent d'ailleurs plus commodément par la méthode des **spectres corpusculaires** (§ 394).

III. — *SPECTRES DE RAYONS X*

393. Production du spectre d'émission d'un élément. — Le spectre des rayons X obtenus en faisant tomber des rayons cathodiques sur une anticathode métallique se compose d'un **spectre continu** et d'un **spectre de raies;** sa limite du côté des courtes longueurs d'onde est très nette et peut être calculée par la relation d'Einstein, $eV = h\nu$ (§ 383); *les longueurs d'onde des raies sont caractéristiques des atomes contenus dans l'anticathode.* En général, la plus grande partie de l'énergie émise correspond au spectre de raies : en constituant l'anticathode par un corps simple, on obtient le spectre de raies de cet élément, ou du moins la partie de ce spectre dont l'émission peut être excitée par les rayons cathodiques employés, c'est-à-dire dont la longueur d'onde est supérieure à la limite calculée par la relation d'Einstein. Signalons dès maintenant (cf. § 395) que les longueurs d'onde des raies caractéristiques d'un élément sont d'autant plus petites que sa masse atomique est plus élevée : pour obtenir des rayons durs, on emploie, avec des différences de potentiel élevées, des anticathodes de tungstène (W = 184) ou de platine (Pt = 195).

Un corps quelconque, sur lequel on fait tomber un faisceau de rayons X, émet à son tour d'autres rayons X, qu'on appelle des **rayons secondaires** (Sagnac). Ils comprennent à la fois des rayons diffusés, identiques aux rayons incidents, et des rayons secondaires proprement dits, formés des radiations caractéristiques de la substance qui les émet. Ce sont en général ces derniers rayons qui transportent la presque totalité de l'énergie du rayonnement secondaire : aussi forme-t-on le plus souvent le spectre de raies d'un élément à l'aide des rayons X secondaires qu'il émet sous l'action des rayons X produits par un tube Coolidge.

On n'obtient ainsi que celles des raies de l'élément dont la longueur d'onde λ est supérieure à la longueur d'onde λ_0 des radiations excitatrices, c'est-à-dire dont la fréquence ν est inférieure à la fréquence ν_0 du rayonnement incident : la production d'un spectre de raies par cette méthode n'est guère possible que si l'élément qui constitue le radiateur secondaire a une masse atomique plus petite que l'élément qui constitue l'anticathode. Ce fait expérimental s'ex-

plique immédiatement dans la théorie des quanta : les échanges d'énergie entre les rayons X primaires et les atomes du radiateur secondaire ne peuvent se faire que par quanta égaux à $h\nu_0$; quel que soit le mécanisme des échanges, la fraction W de cette énergie qui est restituée par l'atome sous forme de rayonnement secondaire est inférieure à $h\nu_0$; comme l'énergie W, échangée entre l'atome et le rayonnement de fréquence ν, est égale au quantum d'énergie $h\nu$, on a nécessairement $h\nu < h\nu_0$, ou $\lambda > \lambda_0$.

394. Spectre d'absorption et émission d'électrons secondaires. — Lorsqu'on interpose sur le trajet d'un faisceau de rayons X formant un spectre continu un écran d'épaisseur convenable, on obtient un **spectre d'absorption.** Quand la longueur d'onde va en décroissant, les rayons deviennent de plus en plus pénétrants et l'absorption décroît régulièrement; mais, pour certaines longueurs d'onde, l'absorption augmente brusquement (*fig.* 464), et l'aspect du cliché obtenu est analogue à celui d'un spectre d'absorption lumineux avec des bandes d'absorption à bord net du côté des grandes longueurs d'onde. *La position des* **discontinuités d'absorption** *est caractéristique des éléments contenus dans l'écran;* elle ne dépend pas, au moins en première approximation, de la nature des combinaisons chimiques où ils sont engagés. Les longueurs d'onde correspondantes sont faciles à déterminer, et l'étude du spectre d'absorption peut être employée avantageusement pour caractériser un élément.

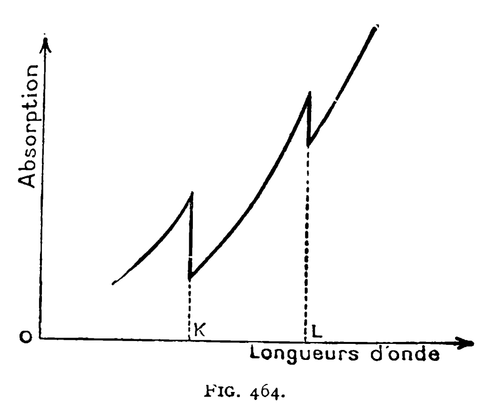


FIG. 464.

Dans la théorie des quanta, on interprète l'existence de la discontinuité de l'absorption pour une longueur d'onde λ_1 en admettant que le quantum d'énergie correspondant, $W_1 = h\nu_1$, représente le travail qu'il faut dépenser pour faire sortir un électron de l'atome de l'élément absorbant. Tant que la longueur d'onde λ du rayonnement incident est supérieure à λ_1, il ne peut échanger de l'énergie avec la matière que par quanta égaux à $h\nu$ et inférieurs à W_1 : ces quanta sont inutilisables par l'atome absorbant, et l'absorption est faible. Mais, dès que la longueur d'onde λ diminue, et devient inférieure à λ_1, il peut céder à l'atome des quanta d'énergie $h\nu$ supérieurs à W_1, et l'expulsion des électrons peut avoir lieu : l'établissement brusque de ce phénomène correspond à une augmentation brusque de l'absorption.

Cette émission d'électrons par les corps frappés par les rayons X a effectivement lieu : le rayonnement secondaire (§ 385) comprend, outre les rayons X secondaires, des rayons, analogues aux rayons cathodiques, constitués par des électrons animés de vitesses v assez grandes. On a pu mesurer la vitesse d'émission de ces électrons par la mesure de leur déviation magnétique : l'appareil employé par M. de Broglie est représenté par la figure 464 *bis.* Le radiateur secondaire, de forme linéaire, est placé en S, à une distance AS = a au-dessous d'une large fente F, et l'ensemble de l'appareil, dans lequel on peut faire le

vide, est placé dans un champ magnétique uniforme d'une centaine de gauss, perpendiculaire au plan du tableau. Les électrons de vitesse v décrivent dans ce champ des circonférences de rayon $\rho = v \frac{m}{e} \frac{1}{H}$ (§ 345); ceux qui passent par le milieu A de la fente viennent rencontrer la plaque photographique P en un point M, diamétralement opposé à S sur la circonférence qu'ils décrivent; la mesure de l'abscisse AM $= x$ permet de calculer ρ par la relation $4\rho^2 = x^2 + a^2$. On montre d'ailleurs facilement que les électrons de même vitesse v qui ont passé par d'autres points de la fente viennent rencontrer la plaque en des points très voisins du point M : toutes les circonférences décrites, qui ont même diamètre 2ρ, sont en effet tangentes à la circonférence Γ de centre S et de rayon 2ρ, et passent à une distance de M qui est très petite par rapport à la largeur de la fente.

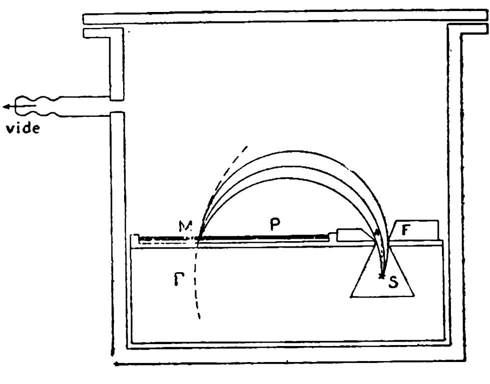


FIG. 464 *bis*.

Les électrons de même vitesse se réunissent donc sur la plaque P pour y donner une raie fine. Si le radiateur secondaire S émet des électrons de vitesses v_1, v_2..., on obtient un **spectre corpusculaire**, dont la mesure fournit la valeur des vitesses v_1, v_2... L'énergie cinétique $mv_1^2/2$ d'un électron est égale à l'énergie $h\nu$ fournie par le rayonnement incident, diminuée du travail $W_1 = h\nu_1$ qu'il a fallu dépenser pour arracher l'électron de l'atome : aux discontinuités d'absorption du radiateur secondaire, de fréquences ν_1, ν_2..., doivent correspondre des électrons de vitesses v_1, v_2..., données par :

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = h(\nu - \nu_1), \qquad \frac{1}{2} mv_2^2 = h(\nu - \nu_2).$$

En réalité, on obtient des électrons ayant toutes les vitesses possibles à partir de 0, parce que les électrons ont pu subir, avant de sortir, des chocs sur les atomes du métal S (cf. § 356); mais ils se répartissent en groupes donnant sur la plaque l'aspect d'un spectre de bandes à bords nets du côté des grandes vitesses, et ce sont ces bords qui donnent les vitesses d'expulsion v_1, v_2.. *Le spectre corpusculaire est ainsi une transposition du spectre d'absorption de l'élément S, et sa mesure permet le calcul des fréquences des discontinuités d'absorption* ν_1, ν_2... si la fréquence incidente ν est connue. Inversement, l'emploi d'un radiateur S secondaire de discontinuités ν_1, ν_2... connues permet de déterminer la fréquence ν d'une radiation incidente. Dans tous les cas où les fréquences ν_1, ν_2 ont pu être mesurées directement ainsi que la fréquence ν, *l'étude du spectre corpusculaire a vérifié la relation d'Einstein avec toute la précision* — quelques millièmes — *qui correspond aux erreurs d'expérience :* son emploi est donc parfaitement justifié pour la détermination des fréquences trop élevées pour permettre la mesure par diffraction cristalline (cf. § 404).

On remarquera l'analogie entre ce phénomène et l'effet photoélectrique

(§ 356); la relation qui donne la vitesse des électrons est la même dans les deux cas, mais les travaux W_0 et W_1 nécessaires à l'expulsion d'un électron ne sont pas les mêmes : il est probable que les électrons expulsés par les rayons X ne proviennent pas de la même région de l'atome que les électrons expulsés par la lumière ultra-violette. D'autre part, comme les fréquences des rayons X sont beaucoup plus grandes que les fréquences lumineuses, l'énergie $h\nu$ est beaucoup plus grande dans le cas des rayons X, et les électrons émis ont en général des vitesses beaucoup plus grandes : on a pu observer des vitesses de l'ordre de 180.000 km/sec, correspondant (§ 342) à des potentiels de 120.000 volts. Il y a lieu de noter que, pour de telles vitesses, le calcul doit tenir compte de la variation de la masse de l'électron avec la vitesse signalée à la fin du paragraphe 350.

C'est d'ailleurs à cet effet photo-électrique qu'est due l'ionisation par les rayons X : les expériences de C. T. R. Wilson, dont nous parlerons plus loin (cf. § 404, *fig.* 468), montrent que l'ionisation ne s'effectue pas suivant le trajet des rayons X, mais suivant la trajectoire des rayons corpusculaires arrachés par les rayons X aux molécules du gaz. Dans le cas des gaz rares, la photographie de ces trajectoires a montré (Auger, 1926) qu'un atome du gaz pouvait être le point de départ de plusieurs rayons corpusculaires d'inégale longueur, et l'explication en est très simple dans la théorie que nous venons d'esquisser; soient en effet ν_1 et ν_2 les fréquences de deux discontinuités d'absorption, correspondant aux énergies d'ionisation W_1 et W_2, et supposons que W_1 soit supérieur à W_2, c'est-à-dire que l'électron 1 appartienne à une couche plus profonde que l'électron 2. Le rayon X incident, de fréquence ν supérieure à ν_1, arrache l'électron 1 et le projette avec l'énergie $h(\nu - \nu_1)$; il reste dès lors une place vide dans les orbites électroniques, qui peut être comblée par la chute de l'électron 2 sur l'orbite qu'occupait précédemment l'électron 1, avec mise en liberté de l'énergie $W_1 - W_2 = h(\nu_1 - \nu_2)$. Cette énergie peut apparaître sous forme de rayons X de fréquence $\nu' = \nu_1 - \nu_2$; le mécanisme est alors analogue à celui par lequel nous avons expliqué l'émission des raies de résonance (§ 368); mais elle peut également apparaître sous forme d'un rayon corpusculaire, un second électron, appartenant à la même couche que l'électron 2 (cf. § 416), étant expulsé avec l'énergie cinétique $(W_1 - W_2) - W_2 = h(\nu_1 - 2\nu_2)$. Les valeur $h(\nu - \nu_1)$ et $h(\nu_1 - 2\nu_2)$ ainsi calculées pour les énergies cinétiques des électrons expulsés rendent bien compte, au moins qualitativement, des longueurs obtenues expérimentalement pour leurs trajectoires dans le gaz.

395. Lois des spectres de rayons X. — La structure des spectres de rayons X est beaucoup plus simple que celle des spectres lumineux; elle est la même pour tous les éléments. Aussi les lois de la répartition des raies sont-elles beaucoup mieux connues pour les spectres de rayons X que pour les spectres lumineux (cf. *Cours d'Optique*, chap. XXVIII).

On répartit les raies d'un spectre de rayons X en séries, qu'on désigne sous le nom de raies K, raies L, raies M..., et, dans chaque série, on désigne les raies par les notations K_α, $K_{\alpha'}$, K_β ..., etc. De même, il existe, pour chaque élément, une discontinuité d'absorption correspondant aux raies K, des discontinuités d'absorption correspondant aux raies L, etc. Dans chaque spectre, les raies K sont les raies de plus courte longueur d'onde, c'est-à-dire celles

qui correspondent aux rayons les plus durs : on les connaît à peu près pour tous les éléments. Les raies L ont des longueurs d'onde beaucoup plus grandes : elles ne s'observent commodément que pour les éléments de masse atomique un peu élevée. Les raies M, encore plus molles, ne peuvent être observées que pour des éléments très lourds.

Comparons entre elles les longueurs d'onde d'une même raie (ou d'une même discontinuité d'absorption) dans les spectres des différents corps simples. Elle correspond à des rayons de plus en plus durs à mesure que la masse atomique de l'élément augmente, et on trouve que *sa fréquence* ν *dans le spectre d'un élément quelconque est proportionnelle au carré du nombre atomique* N *de cet élément* (§ 352) ; c'est la **loi de Moseley.**

On a, A étant une constante :

$$\nu = A^2N^2, \qquad \sqrt{\nu} = AN.$$

Si l'on représente sur un même diagramme les fréquences d'une même raie pour tous les éléments, en portant en abscisses les nombres atomiques N et en ordonnées les racines carrées des fréquences, on obtient une droite passant par l'origine. En réalité, la loi de Moseley ne représente, pour les raies d'émission, qu'une approximation assez grossière; pour les discontinuités d'absorption, en construisant le diagramme d'après les valeurs expérimentales, on trouve bien que tous les points se placent sur la même droite avec une très grande approximation; mais le plus souvent cette droite ne passe pas tout à fait par l'origine; la loi de Moseley s'exprimera avec plus de précision par une formule dans laquelle on aura retranché, du nombre atomique N, une constante n de valeur assez faible : $\sqrt{\nu} = A\,(N - n)$.

396. Rayons X et radiations lumineuses. — Les rayons X sont constitués par des ondes électromagnétiques; leur nature est identique à celle des ondes lumineuses, et ils n'en diffèrent que par leur longueur d'onde. Cette identité a été établie de façon définitive par les expériences que nous avons indiquées au paragraphe 386, et par le succès des mesures de longueur d'onde effectuées à l'aide des réseaux usuels de l'Optique (§ 387).

Nous avons déjà fait remarquer l'analogie qui existe entre l'émission d'électrons secondaires par les rayons X et l'effet photo-électrique, et nous avons signalé la similitude des lois des deux phénomènes; les rayons ultra-violets de très courte longueur d'onde ionisent l'air par l'effet photo-électrique qu'ils produisent sur les molécules gazeuses, comme les rayons X l'ionisent par l'intermédiaire des électrons qu'ils arrachent à ses molécules.

Les lois de la distribution des raies dans les spectres des rayons X sont tout à fait analogues aux quelques lois connues sur la distribution des raies dans les spectres lumineux. Citons parmi ces lois celles qui sont représentées par la **formule de Balmer** généralisée : les fréquences ν de certaines raies du spectre de l'élément de nombre atomique N sont données par la formule :

$$\nu = RN^2\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right);$$

où R est une constante, dite *constante de Rydberg*, et p et q sont deux nombres entiers.

Pour N = 1, cette formule représente avec une très grande approximation les raies lumineuses du spectre de l'hydrogène; en donnant à p la valeur 2

et à q les valeurs 3, 4, 5..., 31, on retrouve les raies usuelles qui constituent la série de Balmer. La valeur de la constante de Rydberg calculée à partir des longueurs d'onde des raies de cette série appartenant au spectre visible est $R = 3{,}290 \cdot 10^{15}$.

Dès que le nombre atomique N devient un peu grand, la formule de Balmer donne pour les fréquences des valeurs extrêmement élevées, qui appartiennent au spectre de rayons X. Prenons par exemple $p = 1$, $q = 2$: nous obtenons une raie dont la fréquence théorique, $\nu = 0{,}75\ RN^2$, est proportionnelle au carré du nombre atomique, conformément à la loi de Moseley. Pour l'hydrogène ($N = 1$), cette fréquence théorique correspond à la longueur d'onde $\lambda = 1216$ A : on connaît une raie ultra-violette ayant précisément cette longueur d'onde (Lyman). Pour le palladium ($N = 46$), la formule donne une longueur d'onde $\lambda = 0{,}576$ A : la longueur d'onde de la raie K_α est 0,584 A.

La même formule représente, soit des radiations lumineuses, visibles ou ultraviolettes, soit des rayons X, suivant l'ordre de grandeur des fréquences auxquelles elle conduit : la loi de Moseley permet de relier entre elles des radiations lumineuses et des radiations de Rœntgen. Les deux phénomènes sont produits par le même mécanisme, et il n'y a pas de différence de nature entre eux.

Les travaux récents ont montré que les radiations dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de 200 angströms pouvaient être obtenues, soit par les méthodes de production des rayons ultra-violets, soit par les méthodes de production des rayons X. En photographiant, à l'aide d'un réseau concave placé dans le vide, les spectres d'étincelle, on a obtenu des raies ultra-violettes dont les longueurs d'onde descendent jusqu'à environ 90 A. Ces mêmes radiations ont été obtenues comme rayons X par Holweck, grâce à l'emploi d'appareils analogues au tube Coolidge, fonctionnant sous différence de potentiel très faible (30 à 60 volts), et à l'observation des rayons dans l'air à pression réduite. Holweck décelait l'existence des rayons X mous par l'ionisation qu'ils produisent, et déduisait leur longueur d'onde de la différence de potentiel qui les avait produits; depuis, on a pu mesurer directement cette longueur d'onde, d'abord par les réseaux d'acides gras (§ 392), puis par la méthode du réseau à éclairage tangentiel (§ 387). Cette dernière méthode, utilisable pour les rayons X ordinaires, donne également, dans le vide, de bons résultats pour les rayons ultra-violets de Millikan (de 100 à 1.000 angströms); *elle a en particulier permis à Thibaud d'obtenir, sur la même plaque et avec le même appareil des raies ultra-violettes et des raies de Röntgen, et elle réalise complètement la jonction des deux domaines.*

Il n'existe donc aucune discontinuité entre les radiations lumineuses et les rayons X, et on sait à l'heure actuelle réaliser des ondes électromagnétiques de toutes les longueurs d'onde supérieures à 0,01 angström; leurs propriétés varient d'une façon continue, des rayons X durs aux rayons X mous, des rayons X aux rayons ultra-violets, des rayons ultra-violets aux radiations visibles et aux radiations infra-rouges, et enfin des radiations infra-rouges aux ondes hertziennes, dont les longueurs d'onde vont d'une fraction de millimètre à quelques myriamètres (cf. § 338). Nous connaissons les caractères essentiels des ondes électromagnétiques et nous savons qu'ils varient d'une façon continue, lorsque la longueur d'onde varie depuis quelques millièmes d'angström jusqu'à quelques dizaines de kilomètres, c'est-à-dire, pour employer le langage de l'Acoustique, le long d'une gamme d'environ 50 octaves.

CHAPITRE XXXVII

RADIOACTIVITÉ

I. — *RAYONNEMENT DES SUBSTANCES RADIOACTIVES*

397. Généralités. — Les atomes radioactifs émettent des rayons susceptibles d'ioniser les gaz et d'impressionner la plaque photographique ou les écrans fluorescents; ils subissent en même temps une transformation qui modifie leur caractère chimique. *La nature et l'intensité du rayonnement émis, ainsi que la vitesse de la transformation, sont les mêmes, pour un atome donné, quelle que soit la combinaison où il est engagé; elles ne dépendent pas non plus des agents physiques.* température, champ électrique, etc., *qu'on peut faire agir sur lui.*

On connaît aujourd'hui une trentaine d'éléments radioactifs, qui sont les éléments les plus lourds du tableau de Mendeléeff (cf. § 410), et parmi lesquels deux seulement, l'uranium et le thorium, étaient connus avant la découverte des phénomènes de radioactivité. Le premier élément dont la radioactivité ait été constatée est l'uranium (Becquerel, 1896); l'élément qui se prête le mieux à l'étude des phénomènes radioactifs est le **radium**, découvert en 1898 par M. et Mme Curie. Le radium (Ra = 226) est plusieurs millions de fois plus radioactif que l'uranium; sa transformation est pourtant assez lente pour que ses propriétés ne soient pas modifiées d'une façon appréciable au bout d'une dizaine d'années. C'est un métal de la famille des métaux alcalino-terreux, et ses sels ne peuvent se séparer des sels de baryum que par des cristallisations fractionnées. Il a été préparé à l'état métallique, mais on l'utilise généralement sous la forme d'un de ses sels, chlorure ou bromure : la radioactivité est une propriété atomique, et ne dépend pas de la nature du sel employé.

On peut doser la quantité de radium contenue dans une substance quelconque en la plaçant dans une chambre d'ionisation, et en mesurant, à l'électroscope ou à l'électromètre, le courant de saturation qu'elle y produit (§ 364). On arrive ainsi à déceler l'existence de quantités de radium de l'ordre d'un cinquante-millionième ($2 \cdot 10^{-7}$) de milligramme.

Les rayons émis par les substances radioactives appartiennent à trois catégories distinctes, facilement séparables par la déviation produite par l'action d'un champ magnétique (*fig.* 465) :

1° Les **rayons α**, peu pénétrants, sont constitués par des particules électrisées positivement; ces particules sont identiques au noyau de l'atome d'hé-

lium : leur masse est celle de l'atome d'hélium, leur charge est égale à deux fois la charge élémentaire;

2° Les **rayons** β, cent fois plus pénétrants que les rayons α, sont constitués par des électrons lancés avec une très grande vitesse;

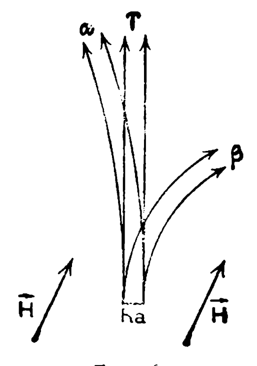


FIG. 465.

3° Les **rayons** γ, cent fois plus pénétrants que les rayons β, sont des rayons X de très courte longueur d'onde.

398. Parcours, vitesse et rapport e/m **des particules** α. — Les rayons α sont peu pénétrants; ils ne peuvent traverser une lame d'aluminium que si son épaisseur ne dépasse pas quelques centièmes de millimètre. Dans l'air, à la pression atmosphérique, ils sont arrêtés après avoir parcouru quelques centimètres; la valeur de ce parcours dépend de la nature de l'élément qui les émet : il est très sensiblement proportionnel au cube de la vitesse d'émission des particules α (Loi de Geiger, $p = kv^3$) et varie pour les groupes les plus importants entre $2^{cm},5$ (rayons α de l'uranium) et $8^{cm},6$ (rayons α du thorium C').

Quoiqu'elles soient très faibles, on a pu mesurer les déviations que subissent les rayons α so us l'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique, et en déduire les valeurs de la vitesse et du rapport e/m.

Les valeurs du rapport e/m données par les divers éléments ne diffèrent que de quantités inférieures aux erreurs d'expérience : *toutes les particules* α *sont identiques entre elles, quel que soit l'élément radioactif qui les fournit.* Les valeurs obtenues sont voisines de 4.800 u. é. m.; on peut admettre qu'elles sont égales à la moitié du rapport $e/m_H = 9.580$ u. é. m. qui caractérise l'ion hydrogène dans l'électrolyse : dans les rayons α, la charge élémentaire est supportée par une masse égale à deux fois la masse de l'atome d'hydrogène. Si l'on admet que chaque particule porte deux charges élémentaires, on en déduit que sa masse est égale à quatre fois la masse de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire à la masse de l'atome d'hélium (cf. § 400).

La vitesse dépend de l'élément radioactif qui produit les rayons α; les anciennes mesures donnaient pour chaque élément radioactif une vitesse unique, comprise entre 14.000 et 25.000 km/sec. Les rayons α du Ra C' (cf. § 408) ont par exemple un parcours de $6^{cm},93$ et une vitesse de 19.220 km/sec; la masse d'une particule α étant $4/6,02 \cdot 10^{23}$, son énergie cinétique est $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6,02 \cdot 10^{23}} (1,92 \cdot 10^9)^2 = 1,23 \cdot 10^{-5}$ ergs. C'est l'énergie que posséderait un électron lancé par une différence de potentiel

$V = W/e = 1,23 \cdot 10^{-5}/1,60 \cdot 10^{-20} = 7,65 \cdot 10^{14}$ u. é. m. $= 7,65 \cdot 10^6$ volts : on dit que *les rayons* α *du* RaC' *possèdent une énergie de* 7,65 *millions* **d'électrons-volts.**

A une telle vitesse correspond, dans un champ magnétique H = 20.000 gauss, un rayon de courbure $R = \frac{mv}{eH} = \frac{1.92 \cdot 10^7}{4.800 \times 20.000} = 20$ centimètres. L'emploi

des champs étendus que permet d'obtenir le gros électro-aimant de Bellevue (§ 200) a permis d'appliquer avec des courbures de cet ordre la méthode que nous avons décrite pour les électrons au paragraphe 394, et d'obtenir de véritables *spectres de rayons α*. Si certains éléments, comme Ra C', donnent bien des rayons ayant tous même vitesse, d'autres fournissent au contraire un rayonnement complexe : c'est ainsi que les rayons α de Th C donnent un groupe de six raies, pour lesquelles l'écart extrême des vitesses est environ 4 o/o. On a d'autre part montré qu'il existait, à côté des rayons α normaux, et en proportion de l'ordre de 10.000 fois plus petite, des *rayons à longs parcours*, dont le parcours atteint par exemple $11^{cm},6$ pour Th C'.

399. Dénombrement des particules α. — Plaçons en un point O, à un centimètre par exemple d'un écran fluorescent au sulfure de zinc, un grain extrêmement petit de matière radioactive, et examinons l'écran à l'aide d'une loupe : l'écran paraît constellé d'étoiles, qui s'allument et s'éteignent aussitôt. Chacune de ces **scintillations** est produite par l'arrivée sur l'écran d'une particule α; si les conditions de l'expérience sont convenablement choisies, on peut compter le nombre de scintillations, c'est-à-dire le nombre de particules α émises par le grain radioactif O dans l'angle solide ω défini par le contour de l'écran. *C'est la première expérience dans laquelle on ait observé un phénomène produit par une particule isolée, et qui ait permis de dénombrer directement les atomes d'un corps* (cf. § 400). Nous allons montrer par quelques chiffres la possibilité de la réaliser.

La radioactivité d'un sel de radium est due à la destruction des atomes de radium; on admet (§ 407) qu'il y a chaque année destruction d'un atome sur 2.300; à chaque seconde il y a destruction d'un atome sur $2.300 \times 365 \times 86400$, soit à peu près un atome sur $7{,}25.10^{10}$. Un atome-gramme, c'est-à-dire 226 grammes, de radium contient $6 \,.\, 10^{23}$ atomes, et un gramme en contient $6 \,.\, 10^{23} : 226 = 2{,}7.\,10^{21}$: il y a, à chaque seconde, destruction dans chaque gramme de radium de $2{,}7.10^{21} : 7{,}25.10^{10} = 3{,}7\,.10^{10}$ atomes, et dans chaque milligramme, de $3{,}7.\,10^{7}$, soit 37 millions d'atomes. On peut constituer le grain radioactif avec une quantité de matière contenant un millionième de milligramme de radium, quantité facilement mesurable par l'ionisation qu'elle produit : il s'y détruit alors 37 atomes par seconde. Si le radium est en équilibre avec ses produits de désintégration, la destruction d'un atome correspond à l'émission de 4 particules α (§ 408) : il y a émission d'environ 148 particules α par seconde. Elles sont émises dans tout l'angle solide qui correspond à une sphère entière entourant le point O; si l'écran a $0^{cm^2},5$ et est placé à 1 centimètre de O, il est vu de O sous un angle solide $\omega = 0{,}5$, correspondant environ à 1/25 de sphère : il reçoit 5 à 6 particules par seconde, et il devient possible de compter les scintillations.

La méthode a d'ailleurs été perfectionnée et transformée en une méthode d'enregistrement. Au lieu de tomber sur un écran fluorescent, les particules α pénètrent par une petite ouverture, vue du point O sous l'angle solide ω, dans une chambre d'ionisation. A l'arrivée d'une particule correspond le passage d'un courant entre les électrodes; le nombre d'ions produit par une particule α est assez grand pour que ce courant puisse être enregistré par des appareils sensibles : on peut par exemple, en l'amplifiant par un amplificateur à lampes, faire en sorte que l'arrivée de chaque particule α se traduise par un signal

inscrit par un récepteur Morse. Un tel appareil constitue un *compteur à ionisation.*

L'expérience montre qu'un milligramme de radium émet par seconde 147 millions de particules α, l'erreur étant inférieure à 2 millions.

400. Nature de la particule α. — On peut mesurer directement la charge transportée par les particules α émises par une quantité donnée de radium dans un angle solide donné : il suffit de les recevoir dans un cylindre de Faraday. L'expérience est assez délicate : il faut opérer dans le vide pour éviter la production de nouvelles charges par ionisation du gaz, il faut se débarrasser des rayons β en les déviant par un champ magnétique (§ 403) et il faut éviter, par l'emploi d'un champ électrique convenable, que les électrons produits par l'impact des rayons α ne s'échappent du cylindre de Faraday. On a trouvé que l'ensemble des particules α émises par un milligramme de radium transportait un courant de $4{,}5.10^{-11}$ ampère : les 147 millions de particules émises à chaque seconde emportent une charge de $4{,}5.10^{-11}$ coulomb, soit $4{,}5.10^{-12}$ u. é. m. Chacune d'elles porte une charge $e = 4{,}5.10^{-12} : 147.10^{6} = 3.10^{-20}$ u. é. m. $= 9.10^{-10}$ u. é. s. environ. Il faut d'ailleurs faire une correction pour tenir compte de ce que certaines particules α ont capté un électron (cf. § 401) avant de pénétrer dans le cylindre de Faraday ; les meilleures mesures semblent encore être celles de Regener (1909), qui ont donné $= 9{,}58.10^{-10}$ u. é. s., *cette charge est égale, aux erreurs d'expérience près, à deux fois la charge élémentaire* e $= 4.803.10^{-10}$.

La charge d'une particule est ainsi déterminée par une expérience directe : dénombrement des particules et mesure de la quantité d'électricité portée par un nombre connu de particules. De la valeur du rapport e/m, on déduit que la masse d'une particule α est égale à la masse d'un atome d'hélium.

On admet (§ 352) que l'atome d'hélium se compose d'un noyau portant deux charges positives autour duquel gravitent deux électrons : *la particule α est identique au noyau de l'atome d'hélium, et elle reconstitue l'atome d'hélium lorsqu'elle s'arrête et qu'elle revient à l'état neutre en fixant deux électrons.* Cette transformation des particules α en hélium a été mise en évidence directement par des expériences de Rutherford : dans l'une des expériences, on enferme de l'émanation du radium dans un tube de verre mince ; les rayons α qu'elle émet traversent la paroi de verre, et sont recueillis dans un tube plus large qui entoure le premier ; au bout d'un certain temps, on fait passer dans un tube de Geissler le gaz contenu dans le tube large, et on constate qu'il donne le spectre de l'hélium.

Le nombre de particules α émis par le radium ou par son émanation peut être compté directement, et on peut en quelque sorte voir la masse d'hélium dégagée se constituer atome par atome. *En mesurant le volume d'hélium produit par une quantité de radium connue, on obtient, non seulement la preuve expérimentale directe de l'identité de la particule α et du noyau de l'atome d'hélium, mais encore le dénombrement direct des atomes contenus dans un volume donné.* La valeur du nombre d'Avogadro trouvée par ces expériences, $N = 6{,}3.10^{23}$, concorde bien avec la valeur donnée par les autres méthodes.

401. Ionisation par les particules α. — La possibilité de dénombrer les particules α permet de déterminer le nombre n de particules qui pénètrent

par seconde dans une chambre d'ionisation; la mesure de l'intensité du courant de saturation qu'elles y produisent permet de déterminer le nombre p d'ions qu'elles créent par seconde. Le rapport p / n représente le nombre de molécules gazeuses ionisées par chaque particule α : il est considérable, et peut atteindre, dans l'air à la pression ordinaire, des valeurs de l'ordre de 200.000. La grandeur de ce nombre explique que les corps radioactifs puissent produire des courants d'ionisation mesurables alors que le nombre d'atomes qui se détruisent est extrêmement faible, et que l'on ne peut mettre en évidence ni la transformation chimique de la matière radioactive, ni la charge électrique emportée par les rayons qu'elle émet.

Les ions formés dans un gaz par les rayons α peuvent être rendus visibles grâce à la condensation de la vapeur d'eau sursaturante qu'ils sont susceptibles de produire (§ 363). *La photographie des gouttes ainsi produites a permis de photographier les trajectoires des particules* α (C.-T.-R. Wilson). On produit la détente adiabatique d'une masse d'air humide en présence d'un grain de matière radioactive, et, un instant très court après la détente, on éclaire vivement le gaz par une puissante étincelle électrique. Les rayons α émis par la substance radioactive entre la détente et l'illumination ont produit, tout le long de leur parcours, des ions dont chacun s'est entouré d'une gouttelette d'eau; l'appareil photographique, disposé latéralement par rapport au faisceau lumineux, enregistre, grâce à la lumière qu'elles diffractent, la position de ces gouttes au moment de l'étincelle. La quantité de matière radioactive est assez faible pour que les particules α soient peu nombreuses, et l'illumination suit la détente d'assez près pour que les ions n'aient pas eu le temps de se déplacer; la file de gouttelettes produite par chaque rayon apparaît sur la photographie comme un trait fin et continu, qui dessine la trajectoire de la particule α.

Ces trajectoires sont des lignes droites qui partent du point où est placée la substance radioactive; elles se terminent presque toujours par un crochet AB de courte longueur, et présentent aussi quelquefois un coude brusque C bien avant la fin du parcours (*fig.* 466). La particule α passe sans être déviée à travers les molécules gazeuses qu'elle ionise, mais, dans des cas exceptionnels, les conditions du choc sont telles que la particule est déviée, et la trajectoire présente un coude brusque.

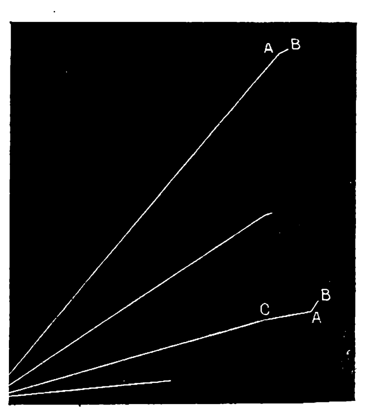


FIG. 466.

L'étude des photographies obtenues par la méthode de C. T. R. Wilson a permis de montrer que les trajectoires des différents rayons émis par une même substance radioactive n'ont pas toutes exactement la même longueur. Les parcours se répartissent, suivant une loi de probabilité, autour d'un certain parcours moyen, dont ils diffèrent d'ailleurs assez peu. C'est ainsi que les rayons α du polonium ont une longueur moyenne de $38^{mm},5$ et que 90 o/o des rayons ont des parcours qui ne diffèrent pas de 1 millimètre de cette valeur moyenne; l'approximation que nous avons faite

au paragraphe 398, en considérant le parcours comme caractéristique de l'élé ment, peut donc être considérée comme satisfaisante dans la plupart des cas.

Le rayon α n'a pas exactement les mêmes propriétés tout le long de son trajet : c'est ainsi que le nombre d'ions qu'il crée par millimètre de parcours commence par croître lentement, passe par un maximum 3 à 4 millimètres avant la fin du trajet, puis décroît rapidement jusqu'à s'annuler. Il est d'autre part probable que, dès sa sortie du noyau radioactif, la particule α, ou atome d'hélium doublement chargé He^{++}, est apte à capter un électron au hasard des chocs moléculaires, pour donner un atome simplement chargé He^{+}; elle peut ensuite le perdre au moment d'un autre choc pour redevenir He^{++}, ces deux transformations inverses s'effectuant peut être 1.000 fois le long du parcours à grande vitesse. Puis, lorsque la particule a été suffisamment ralentie par les chocs qu'elle a subis, l'ion He^{+} peut capter un second électron pour donner l'atome neutre He; ce n'est qu'après un certain nombre de chocs et de transformations $He^{+} \rightarrow He$ et $He \rightarrow He^{+}$ que la vitesse de la particule devient trop faible pour qu'elle produise l'ionisation, la scintillation ou l'impression photographique, et qu'elle est définitivement transformée en un atome neutre He.

402. Énergie dégagée par les substances radioactives. — Les rayons α, comme d'ailleurs les rayons β et les rayons γ, transportent de l'énergie; lorsque les particules α ont été arrêtées complètement par une série de chocs sur les molécules gazeuses, toute l'énergie cinétique qu'elles possédaient a été cédée à ces molécules, c'est-à-dire transformée en chaleur. On a effectivement constaté ce dégagement de chaleur en plaçant la substance radioactive dans un calorimètre; on a trouvé qu'un gramme de radium dégageait par heure 140 calories-grammes.

Il est facile de calculer l'énergie cinétique emportée par les particules α, puisqu'on connaît le nombre de particules émises par le radium, et qu'on a mesuré la vitesse d'émission des diverses catégories de rayons α. On trouve qu'elle représente 90 o/o de la chaleur totale dégagée : *la plus grande partie de l'énergie émise par le radium est émise sous forme de rayons α.*

Au bout d'une année, un gramme de radium a dégagé $140 \times 24 \times 365 = 1{,}22 \,.\, 10^6$ calories-grammes, alors que la quantité de radium qui a disparu est d'environ 1/2.300 de gramme; à la destruction d'un atome-gramme, soit 226 grammes, de radium correspond l'apparition d'une quantité d'énergie égale à $1{,}22 \,.\, 10^6 \times 2.300 \times 226 = 6{,}35 \,.\, 10^{11}$ calories-grammes, soit près *d'un milliard de calories-kilogramme.* Si l'on compare cette énergie à la chaleur dégagée par la combustion d'un atome-gramme de carbone — environ cent calories-kilogrammes — on voit que l'*énergie intra-atomique, libérée lors de la destruction de l'atome, est incomparablement plus grande que l'énergie chimique mise en jeu lors de la formation ou de la destruction de la molécule.* Il y a, à l'intérieur des atomes radioactifs, des réserves considérables d'énergie; mais il nous est complètement impossible de les utiliser, parce que nous ne connaissons aucun moyen d'accélérer ou de retarder la marche des transformations qui les libèrent.

403. Rayons β. — Les rayons β sont beaucoup plus pénétrants que les rayons α : certains rayons β du radium peuvent traverser 7 millimètres d'aluminium. On sépare facilement les rayons β des rayons α, en plaçant le sel de

radium qui les fournit dans un tube de verre à parois assez épaisses, ou en le recouvrant d'une lame d'aluminium de quelques dixièmes de millimètre d'épaisseur.

Les rayons β sont constitués par des électrons animés de très grandes vitesses. Les déviations magnétique et électrique sont assez faciles à produire et à observer; l'action simultanée du champ magnétique et du champ électrique permet de déterminer la vitesse v et le rapport **e / m**. Le rapport **e / m** est celui qui caractérise l'électron.

Les vitesses trouvées sont en général de 40 à 80 o/o de la vitesse de la lumière; pour certains rayons du radium, elles atteignent 299.700 km/sec. La théorie électromagnétique indique (§ 350) que la masse apparente d'un électron augmente avec sa vitesse, et croît indéfiniment quand sa vitesse tend vers celle de la lumière. Cette théorie est confirmée par le fait qu'on n'a jamais observé de rayons β de vitesses égales ou supérieures à celle de la lumière; les formules qu'elle fournit, en supposant toute la masse de l'électron d'origine électromagnétique, sont parfaitement d'accord avec les valeurs du rapport **e / m** obtenues pour les rayons β rapides.



FIG. 467

On peut donc considérer comme établi que tous les rayons β sont constitués par des électrons : dès lors, la simple mesure de la déviation magnétique permet de calculer leur vitesse. La mesure s'effectue à l'aide de l'appareil décrit au paragraphe 394 (*fig.* 464 *bis*), en disposant en S, parallèlement à la fente F, un tube mince contenant la substance radioactive; les résultats s'expriment en donnant la valeur en **électrons-volts** de l'énergie des particules, c'est-à-dire en donnant en volts la différence de potentiel V qui serait nécessaire pour lancer l'électron avec la vitesse observée. A chaque corps radioactif correspond ainsi un *spectre β naturel*, analogue aux spectres corpusculaires du paragraphe 394; il contient généralement un fond continu, mais il se compose surtout d'un *spectre de raies* β, dont les énergies sont caractéristiques de l'élément radioactif étudié : le spectre naturel du radium contient des raies dont les énergies vont de 37.000 à 10 millions d'électrons-volts.

Les trajectoires des rayons β ont pu être photographiées par la même méthode que celles des rayons α (§ 401). Elles sont marquées par des files de gouttes qui paraissent séparées; celles des rayons rapides sont à peu près rectilignes, celles des rayons lents sont courbes, mais ne présentent pas de coudes

brusques (*fig.* 467) : les électrons qui forment les rayons β sont déviés par chacun des atomes qu'ils traversent.

Les particules β ne produisent pas de scintillations sur l'écran au sulfure de zinc; quoi qu'elles produisent une ionisation moins intense que les particules α, on a pu les dénombrer par la méthode d'amplification et d'inscription du courant d'ionisation provoqué par l'arrivée de chaque particule. On a vérifié directement qu'elles portent une charge négative en les recevant dans un cylindre de Faraday. On a mesuré le nombre d'ions créé par chaque particule β : il est de 12.600 pour une particule rapide à la pression ordinaire.



FIG. 468.

404. Rayons γ. — Les rayons γ sont des rayons très pénétrants : certains rayons γ du radium peuvent traverser 22 centimètres de plomb. Il est facile de les séparer des rayons α et β, soit en faisant traverser au rayonnement un champ magnétique, qui dévie les rayons α et β sans dévier les rayons γ (*fig.* 465) soit en recouvrant la substance radioactive d'une lame de plomb de quelques millimètres d'épaisseur, qui ne laisse passer que les rayons γ.

L'ionisation produite par les rayons γ, comme celle que produisent les rayons X, est due en réalité aux électrons secondaires qu'ils expulsent des molécules gazeuses. La photographie des ions produits a été réalisée par C. T. R. Wilson; les gouttelettes d'eau sont réparties sur des trajectoires courbes, identiques aux trajectoires caractéristiques des rayons β, qui partent toutes de la région traversée par les rayons X et s'enchevêtrent dans tout l'espace voisin (*fig.* 468).

Les rayons γ, très pénétrants, ont des longueurs d'onde extrêmement courtes, très inférieures en général au dixième d'angström; *on peut les mesurer par la méthode du cristal tournant :* on a pu ainsi atteindre des longueurs d'onde de 0,016 angström (§ 392), correspondant, d'après la relation d'Einstein, à une énergie de 770.000 volts; la *méthode des spectres corpusculaires* (§ 394) a permis d'étudier les rayons encore plus pénétrants, et de mesurer des longueurs d'onde plus courtes, jusqu'à 0,006 angström; il est d'ailleurs probable qu'on n'a pas encore ainsi atteint les rayons γ les plus pénétrants. Ces deux méthodes ont permis de classer les radiations γ émises par les divers éléments radioactifs en de véritables *spectres de raies* caractéristiques de ces éléments; il est à

noter que, dans le domaine où elles ont été employées concurremment, elles ont fourni des résultats parfaitement concordants, c'est-à-dire que *la relation d'Einstein* (§ 343) *est parfaitement vérifiée jusqu'aux longueurs d'onde de l'ordre du centième d'angström.*

Les rayons γ sont le plus souvent fournis par des transformations qui donnent en même temps des rayons β ; l'étude chimique de ces transformations (loi de Soddy, § 410) montre que le fait primordial y est l'expulsion d'un électron du noyau atomique (§ 352). Cet électron, émis avec une grande vitesse, constitue le *rayon β primaire*; il doit, en traversant les couches électroniques qui entourent le noyau, exciter leur spectre de rayons X. comme les électrons d'un faisceau de rayons cathodiques excitent le spectre de rayons X des atomes de l'anticathode, et les rayons γ ne sont sans doute autres que les rayons X caractéristiques de l'élément fourni par la désintégration de l'élément radioactif : c'est ainsi qu'on a trouvé, dans le spectre de rayons γ du radium, un certain nombre de raies identiques aux raies de Röntgen du plomb et du bismuth, isotopes des produits de transformation du radium (§ 411). Mais cette explication ne peut convenir qu'aux moins pénétrants des rayons γ ; il est probable que les plus pénétrants ont leur origine à l'intérieur même du noyau atomique ; ils y sont produits par un réarrangement des orbites des particules intranucléaires rendu possible par le départ de l'électron de désintégration : leur mécanisme d'émission serait en somme analogue à celui que nous avons envisagé aux paragraphes 368 et 394 pour les radiations lumineuses et les radiations X produites par le réarrangement des orbites électroniques extranucléaires (cf. § 417).

Les rayons γ nucléaires, traversant les couches électroniques de l'atome qui vient de se désintégrer, doivent y produire un effet photo-électrique intense, donnant naissance à un spectre corpusculaire (§ 394), ou spectre de *rayons β secondaires.* Il n'est pas douteux que c'est par ce mécanisme qu'est produite la presque totalité du spectre β naturel : le spectre β naturel d'un élément radioactif est en effet identique, jusqu'aux énergies de l'ordre de 2 millions d'électrons-volts correspondant aux longueurs d'onde de l'ordre du centième d'angström, au spectre corpusculaire excité dans un isotope inactif de cet élément (plomb ou bismuth) par ses rayons γ. Il n'est guère qu'un point qui reste encore douteux, c'est de savoir à quoi correspondent les rayons β primaires dont l'existence est nécessaire à l'interprétation de la transformation chimique : on admet généralement aujourd'hui que ces électrons de désintégration sont ceux qui forment le fond continu du spectre β naturel.

On a également observé des rayons γ dans certaines transformations où le rayonnement nucléaire est constitué par des rayons α, et on a trouvé dans ce cas que les énergies $h\nu$ des divers groupes de rayons γ étaient égales aux différences que présentent entre elles les énergies $mv^2/2$ des divers groupes de particules qui constituent le spectre des rayons α : les écarts, atteignant rarement 1 0/0, sont toujours inférieurs aux erreurs expérimentales. On interprète ces coïncidences remarquables en admettant que les particules intranucléaires peuvent, comme les électrons extra-nucléaires (§§ 368 et 417), se trouver sur divers **niveaux d'énergie**. Le départ d'une particule α laisse le noyau dans l'un de ces divers états possibles ; l'énergie emportée par la particule α est la différence entre l'énergie du noyau initial et celle du noyau transformé, de sorte que les différences d'énergie des divers rayons α représentent

les différences des divers niveaux d'énergie du noyau transformé, et ce sont ces différences d'énergie qu'emportent les rayons γ lorsque ce noyau revient à son état stable par le réarrangement des particules intra-nucléaires.

Dans le cas du thorium C par exemple, la mesure des vitesses des 6 groupes de rayons α a permis de calculer les énergies de 6 niveaux permettant de re trouver par leurs différences les énergies $h\nu$ de 15 groupes de rayons γ : le nombre de groupes de rayons γ étant supérieur au nombre de niveaux, il existe entre leurs fréquences des *relations de combinaison* analogues à celles que l'on a trouvées dans les spectres optiques et les spectres de rayons X. De telles relations de combinaison, vérifiées avec la même précision, de l'ordre du millième, ont aussi été trouvées dans les spectres des rayons γ nucléaires accompagnant les transformations β : elles justifient l'interprétation que nous avons donnée plus haut de l'émission de ces rayons par des réarrangements des constituants du noyau consécutifs à l'expulsion de l'électron de désintégration.

II. — *TRANSFORMATIONS RADIOACTIVES*

405. L'émanation du radium. — Prenons une certaine quantité d'un sel de radium préparé depuis quelque temps, et mesurons son activité; dissolvons-le dans l'eau, puis évaporons à sec la solution. Le sel de radium, ainsi récupéré, est beaucoup moins actif que le sel primitif : il émet quatre fois moins de rayons α, et n'émet plus de rayons β ni de rayons γ. L'opération effectuée — dissolution et évaporation — en sépare une substance à laquelle était due une bonne partie de la radioactivité. Si l'on mesure à plusieurs reprises l'activité du sel de radium fraîchement cristallisé, on trouve à chaque fois qu'elle augmente; au bout de quelques jours, elle a repris la valeur qui caractérisait le sel primitif : la substance qu'on avait enlevée s'est reformée, c'est un produit de transformation du radium.

Cette substance est un gaz, qu'on appelle l'**émanation** du radium. Elle est entraînée par la vapeur qui se dégage lorsqu'on fait bouillir la solution : si on condense cette vapeur dans un flacon, l'air de ce flacon devient radioactif. Si on enferme l'émanation dans un vase clos, elle y reste; mais si on fait communiquer ce vase avec un autre, elle diffuse à la façon d'un gaz : l'air du second récipient devient radioactif. Si on fait passer de l'air contenant de l'émanation dans un serpentin refroidi par l'air liquide, l'air qui sort du serpentin n'est plus radioactif; l'émanation a été condensée; sa température de liquéfaction à la pression atmosphérique est — 71°.

En opérant dans le vide, on peut isoler l'émanation produite par le radium : la quantité d'émanation qu'on peut extraire d'un gramme de radium est $0^{mm^3},6$. Elle n'est absorbée par aucun réactif : c'est un gaz monoatomique de la famille des gaz rares (hélium, néon, ...); son spectre est analogue à ceux des autres gaz rares. Sa densité a pu être mesurée par des pesées effectuées à l'aide d'une balance spéciale, sensible à quelques millioniėmes de milligramme; elle correspond à une masse atomique de 222.

En résumé, le radium pur produit uniquement un rayonnement α, et dégage en même temps de l'émanation. On admet que ces phénomènes sont dus à l'explosion d'un certain nombre d'atomes de radium, dont le noyau expulse

une particule α, et perd ainsi deux charges positives. La particule α et le reste de l'atome reviennent ensuite à l'état neutre; la particule α capte deux électrons, et fournit un atome d'hélium; le reste de l'atome de radium perd deux des électrons qui gravitent autour du noyau, et fournit un atome d'émanation. Finalement, *l'atome de radium s'est transformé en un atome d'hélium et un atome d'émanation;* en adoptant pour l'émanation, appelée aussi *radon*, le symbole Rn, on peut représenter la transformation par l'équation :

$$\text{Ra} \rightarrow \text{He} + \text{Rn}$$

qui exprime bien la relation qui existe entre les trois masses atomiques, Ra = 226, He = 4, et Rn = 222.

406. Loi de transformation d'une substance radioactive. — L'émission d'un rayonnement par l'émanation s'accompagne de la destruction d'une partie de ses atomes. Cette destruction est facile à mettre en évidence : on enferme l'émanation dans une chambre d'ionisation parfaitement close, et on mesure d'heure en heure le courant de saturation qu'elle y produit; si l'on a soin de ne commencer les mesures que quelques heures après avoir rempli la chambre d'ionisation, on trouve que le courant décroît très régulièrement avec le temps.

La quantité d'émanation est réduite de moitié au bout d'un temps T = 3,83 jours; au bout de 4 nouveaux jours, elle est encore réduite de moitié, et au bout d'un mois, il ne reste plus que $1 / 2^8 = 1 / 250$ environ de la quantité initiale : l'émanation a pratiquement disparu.

La loi de décroissance du courant, et par suite de la quantité d'émanation, est une loi exponentielle : si, à l'instant 0, le récipient contient un nombre n_0 d'atomes d'émanation, à l'instant t, il n'en contient plus qu'un nombre n donné par la formule :

$$n = n_0 e^{-\lambda t}.$$

Le temps T nécessaire pour que la moitié de l'émanation disparaisse s'appelle la **période** de l'émanation; il est lié à la **constante radioactive** λ par la relation :

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}, \qquad \lambda T = \text{Log}\, 2 = 0{,}693.$$

Les valeurs des constantes λ *et* T *sont indépendantes des conditions de l'expérience :* on a répété leur mesure dans des conditions extrêmement variées de température et de pression, ou bien encore en présence d'un champ électrique ou d'un champ magnétique, et on a toujours trouvé les mêmes valeurs.

Toutes les transformations radioactives sont soumises à une loi analogue. *Une substance radioactive quelconque se détruit suivant une loi exponentielle simple, avec une constante radioactive* λ, *et une période* $T = 0{,}693 / \lambda$, *dont les valeurs sont caractéristiques de l'atome radioactif.*

Prenons une certaine quantité de substance contenant un élément de constante radioactive λ, engagé dans une combinaison chimique quelconque, dans des conditions physiques quelconques : le nombre n d'atomes de cet élément radioactif contenu dans la substance à l'instant t est $n = n_0 e^{-\lambda t}$. Pendant un temps dt, il diminue d'une quantité :

$$dn = n_0 \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda n\, dt.$$

Le nombre d'atomes d'un élément radioactif donné qui se détruisent dans un temps donné est proportionnel au nombre total d'atomes de cet élément présent dans la substance étudiée.

Le plus souvent cette destruction donne naissance à des atomes d'un autre élément radioactif, qui se transforme à son tour avec une autre constante λ', et ainsi de suite; la radioactivité totale de la substance est la somme des radioactivités dues aux divers éléments; elle est représentée par la somme de plusieurs exponentielles d'exposants $-\lambda t$, $-\lambda' t$,...

407. Équilibre du radium et de l'émanation. — Prenons une certaine quantité d'un sel de radium contenant, à l'instant t, n atomes de radium, et n' atomes d'émanation. Le nombre d'atomes de radium qui se transforment pendant le temps dt est $dn = \lambda n\, dt$; il apparaît $dn'_1 = dn$ atomes d'émanation, et en même temps il s'en détruit : $dn'_2 = \lambda' n' dt$.

Si dn'_2 est égal à dn'_1, la quantité d'émanation reste constante : le radium est en équilibre avec son émanation. Les nombres d'atomes de radium et d'émanation en présence sont alors liés aux constantes radioactives λ et λ' de ces deux éléments, et à leurs périodes T et T' ($\lambda T = \lambda' T' = \text{Log } 2$), par les relations :

$$\frac{n'}{n} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{T'}{T}.$$

La valeur du rapport n' / n est donnée directement par l'expérience : on la calcule facilement, sachant qu'un atome-gramme de radium pèse 226 grammes, qu'un atome-gramme d'émanation occupe 22,30 litres et qu'un gramme de radium est en équilibre avec 0,62 millimètre cube d'émanation. La période T' de l'émanation est connue et égale à 3,83 jours. On en déduit la valeur de la **période du radium,** T = 1.590 ans; la proportion d'atomes de radium qui se transforment dans le temps $dt = 1$ an est

$$\frac{dn}{n} = \lambda dt = \frac{\text{Log } 2}{1.590} = \frac{1}{2.300} \text{ environ.}$$

Si l'on sépare le sel de radium de son émanation, il en produit une nouvelle quantité, de façon à rétablir l'équilibre : le nombre d'atomes d'émanation s'accroît pendant le temps dt d'une quantité :

$$dn' = dn'_1 - dn'_2 = (\lambda n - \lambda' n')\, dt.$$

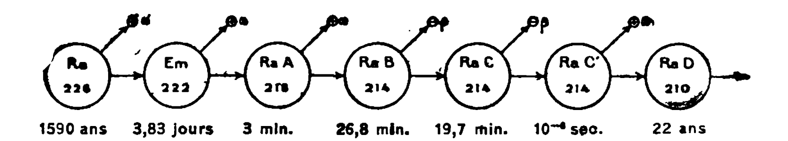
Le nombre n d'atomes de radium présents à l'instant t est $n = n_0 e^{-\lambda t}$: le nombre n' est donné par l'équation différentielle :

$$\frac{dn'}{dt} + \lambda' n' = n_0 e^{-\lambda t}.$$

Il est égal à la somme de deux exponentielles, d'exposants $-\lambda t$ et $-\lambda' t$. Comme la période du radium est très longue, l'exponentielle $e^{-\lambda t}$ peut être considérée comme constante. Le temps nécessaire à l'établissement de l'équilibre est le temps nécessaire à l'amortissement de l'exponentielle $e^{-\lambda' t}$: il est le même que le temps nécessaire à la disparition d'une quantité donnée d'émanation, et est de l'ordre d'un mois.

408. Radioactivité induite. — Lorsqu'on laisse pendant quelques jours un objet quelconque dans un vase contenant un sel de radium, il devient radioactif : cette *radioactivité induite* se détruit spontanément avec une période de l'ordre de 30 minutes. On doit la considérer comme un dépôt solide qui s'est formé à la surface de l'objet employé : il suffit de le frotter au papier de verre pour faire disparaître la radioactivité induite; elle est enlevée par le papier de verre, qui devient lui-même radioactif. Les substances qui la constituent ne sont autres que les produits de transformation de l'émanation, car il suffit, pour l'obtenir, de placer l'objet dans un vase contenant de l'émanation.

Les courbes de décroissance des rayonnements α et β émis par les dépôts de radioactivité induite peuvent être représentées par des sommes d'exponentielles d'exposants différents. On les interprète par l'existence de plusieurs éléments — radium A, radium B..., — de périodes différentes; chacun d'eux se détruit, suivant une loi exponentielle simple, en donnant le suivant. Ces éléments ont des propriétés chimiques différentes: la plupart d'entre eux ont pu être séparés à l'état pur par les procédés de l'analyse chimique. La succession des transformations subies par l'atome de radium jusqu'à l'obtention d'un élément un peu stable, le radium D, de période 22 ans, est représentée par le schéma suivant :



On y a inscrit la masse atomique des différents éléments, la nature de leur rayonnement, et la valeur de leur période : chacune des transformations s'accompagne de l'émission d'une seule particule, α ou β, par atome transformé. L'expulsion d'une particule α, identique au noyau de l'atome d'hélium, diminue la masse atomique de 4 unités; l'expulsion d'une particule β, c'est-à-dire d'un électron de masse négligeable, ne modifie pas la masse atomique.

Lorsqu'un sel de radium est préparé depuis un certain temps, un mois par exemple, il se trouve en équilibre avec tous ses produits à évolution rapide, de l'émanation au radium C'; à la transformation de chaque atome de radium correspond la transformation d'un atome d'émanation, ..., d'un atome de radium C', c'est-à-dire l'émission de 4 particules α et de deux particules β. Notre schéma représente le fait expérimental signalé au début du paragraphe 405 : le rayonnement d'un sel de radium en équilibre avec ses produits contient 4 fois plus de rayons α que le rayonnement du même sel fraîchement purifié, et contient en outre des rayons β.

409. Origine du radium. — Comme la vie moyenne du radium n'est que de 1.590 ans, il aurait dû disparaître depuis longtemps de tous les minéraux de l'écorce terrestre, s'ils ne contenaient pas un élément radioactif, à évolution très lente, dont la transformation l'a régénéré au fur et à mesure de sa destruction. Cet élément est l'uranium. *Soddy a prouvé, par une expérience*

*directe, **que le radium était un des produits de transformation de l'uranium.*** Il a préparé du nitrate d'urane soigneusement purifié et ne contenant aucune trace de radium, et, après quelques années, il a pu caractériser, par l'existence de l'émanation, la présence d'une faible quantité de radium dans l'ampoule contenant le sel d'urane.

On peut répéter, sur l'équilibre entre l'uranium et le radium, le raisonnement que nous avons fait sur l'équilibre entre le radium et son émanation. L'équilibre est certainement établi dans les minéraux, dont l'âge est grand par rapport à la période du radium; ils doivent contenir des nombres n et n' d'atomes d'uranium et de radium dont le rapport est égal au rapport des périodes de ces éléments :

$$\frac{n}{n'} = \frac{T}{T'}.$$

L'expérience montre en effet que le radium et l'uranium coexistent toujours dans leurs minerais, et que le rapport des teneurs en radium et en uranium est le même pour tous; il est d'ailleurs extrêmement faible : une *pechblende* très riche, contenant près de 50 o/o d'uranium, ne contient pas deux décigrammes de radium par tonne. *La mesure du rapport des teneurs permet de calculer la période de l'uranium à partir de celle du radium :* elle est d'environ 4,6 milliards d'années. Ce chiffre a été confirmé par la mesure de la quantité d'hélium dégagée par la transformation de l'uranium, mesure qui a pu être réalisée par un dosage spectroscopique.

Les minerais d'uranium contiennent, outre l'uranium et le radium, tous les produits de leurs transformations. En particulier, ils contiennent l'hélium qu'elles ont dégagé, et le plomb qui en est le produit final (§ 411). On peut calculer approximativement l'âge d'un minerai à partir de sa teneur en uranium, en radium, en hélium et en plomb : on a trouvé, pour les minerais les plus anciens, un âge de l'ordre de 1.600 millions d'années.

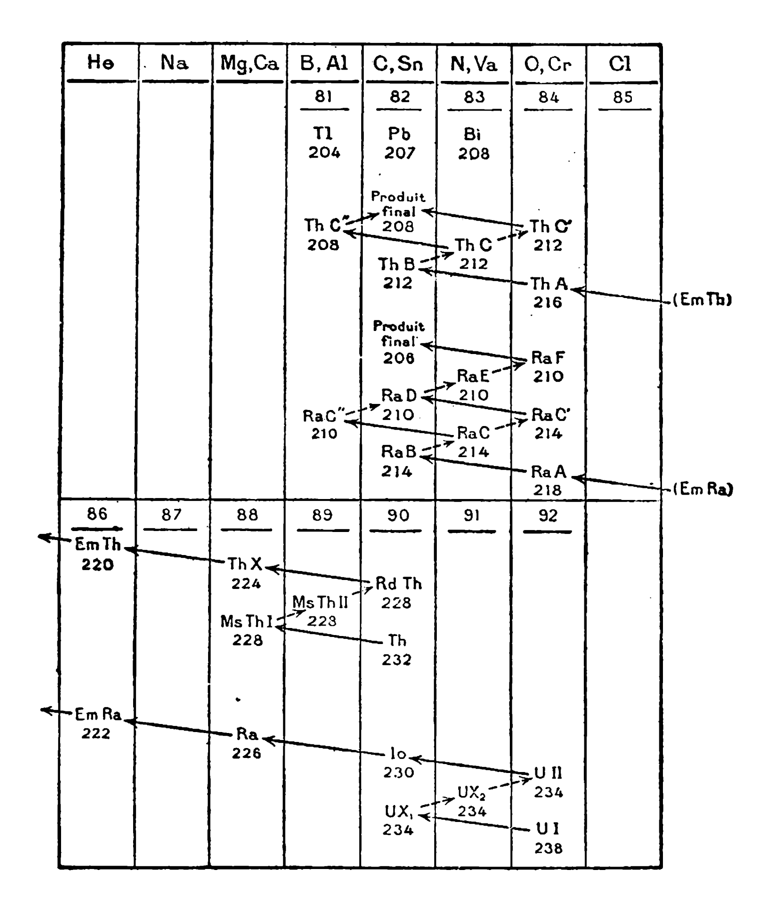
410. Loi de Soddy. — L'émission d'une particule α ou β par un atome radioactif s'accompagne d'un changement de sa nature chimique; d'après la théorie actuellement admise de la constitution de la matière (§ 351 et 352), ce changement correspond à une modification du noyau de l'atome : les particules α et β proviennent donc de ce noyau. Si l'atome radioactif émet une particule α, la charge positive de son noyau diminue d'une quantité égale à deux charges élémentaires; lorsqu'il revient à l'état neutre, il perd de plus deux des électrons qui gravitent autour du noyau. S'il émet une particule β, la charge positive du noyau augmente d'une quantité égale à une charge élémentaire; lorsque l'atome revient à l'état neutre, il fixe un nouvel électron, qui s'ajoute à ceux qui gravitaient autour du noyau.

Le nombre atomique d'un élément (cf. § 352) est égal au nombre de charges élémentaires positives que porte le noyau, et au nombre d'électrons qui gravitent autour de lui dans l'atome neutre. Il est aussi égal au numéro de la case qu'occupe l'élément dans le tableau périodique de Mendeleeff. On peut donc exprimer la nature des transformations radioactives par la **loi de Soddy :**

Une transformation radioactive accompagnée de l'émission d'un rayonnement α abaisse de deux unités le nombre atomique de l'élément qui la subit, et le fait reculer de deux cases dans le tableau périodique.

Une transformation radioactive accompagnée de l'émission d'un rayonnement β augmente d'une unité le nombre atomique de l'élément qui la subit, et le fait avancer d'une case dans le tableau périodique.

Le tableau ci-dessous reproduit les 12 dernières cases du tableau de Mendeleeff. On a inscrit en haut de chaque case le nombre atomique qui lui correspond. On a reproduit, en tête de chaque colonne, les symboles de quelques-uns des éléments contenus dans les premières lignes du tableau, pour rappeler les caractères chimiques qui caractérisent la colonne : la première colonne est



celle des gaz rares, analogues à l'hélium; la troisième contient les métaux alcalino-terreux, analogues au magnésium et au calcium, etc.

On a placé les éléments anciennement connus — thallium (Tl), plomb (Pb), bismuth (Bi), thorium (Th) et uranium (UI) — dans les colonnes que leur assignent leurs propriétés chimiques, et on a disposé les produits de transformation du thorium et de l'uranium d'après la loi de Soddy : les flèches pleines représentent les transformations à rayons α, les flèches pointillées les transformations à rayons β. On a inscrit les masses atomiques des éléments en re-

marquant que *l'émission d'une particule α diminue la masse atomique de 4 unités et que l'émission d'une particule β ne la modifie pas* (§ 408).

Le tableau contient tous les dérivés du thorium dont l'existence est actuellement admise : mésothorium I et II [1], radiothorium, thorium X, émanation du thorium, thorium A, B, C, C′ et C″. On remarquera l'existence d'une bifurcation après le thorium C : 35 o/o des atomes de thorium C qui se détruisent émettent des particules α et donnent des atomes de thorium C′, qui émettent ensuite des particules β pour donner un produit final non radioactif; 65 o/o des atomes de thorium C émettent au contraire des particules β, pour donner du thorium C″, qui redonne, par émission de particules α, le même produit final non radioactif que le thorium D. Il existe d'ailleurs, comme l'indique le tableau, une bifurcation analogue dans la famille du radium, entre le radium C et le radium D; mais il n'y a que 4 atomes de radium C sur 10.000 qui émettent des particules β pour donner du radium C″.

On connaît une autre famille radioactive, comprenant une dizaine d'éléments, dont le plus important est l'**actinium** (Ac = 227, N = 89). Son produit final, comme ceux des autres séries, est un isotope du plomb (N = 82), mais sa masse atomique doit être 207. On a cru longtemps qu'elle dérivait de l'uranium II par une bifurcation analogue à celles que nous venons de signaler; on admet plutôt aujourd'hui qu'elle est indépendante de la famille du radium, et qu'elle dérive d'un isotope de l'uranium (N = 92) de masse atomique 235, différent de l'uranium I et de l'uranium II. Ajoutons d'ailleurs que les transformations des éléments — uranium X_1 et X_2, uranium II — compris entre l'uranium (UI) et l'ionium (Io) sont encore assez mal connues, et que les hypothèses actuelles sont sujettes à révision.

Par contre, *la plupart des autres éléments inscrits dans notre tableau ont été séparés par les procédés de l'analyse chimique ou par des fractionnements physiques, et leurs propriétés chimiques coïncident d'une façon satisfaisante avec celles que leur assignent les colonnes du tableau où ils sont placés.* Citons comme exemple le radium et l'émanation qu'il donne par expulsion d'une particule α (§ 405) : le radium est placé, conformément à ses caractères chimiques, dans la colonne des métaux alcalino-terreux; la loi de Soddy conduit à placer l'émanation dans la colonne des gaz rares, dont elle a bien les propriétés chimiques.

411. Isotopie dans les séries radioactives. — La plupart des cases 82 à 92 du tableau périodique contiennent plusieurs éléments radioactifs : les éléments inscrits dans une même case, ayant le même nombre atomique, sont des **isotopes** (§ 352). La charge du noyau de l'atome et le nombre d'électrons qui gravitent autour de lui sont les mêmes pour tous les éléments isotopes; mais la constitution du noyau est différente. Considérons par exemple le radium A et le radium F, inscrits tous deux dans la case 84; quand un atome de radium A se transforme en un atome de radium F, il expulse successivement 2 particules α, portant 4 charges élémentaires positives, et 4 particules β, portant 4 charges élémentaires négatives : la charge totale expulsée est nulle. Le noyau Ra F porte la même charge que le noyau Ra A, mais il contient en moins 2 particules α et 4 électrons; la masse atomique du radium F est inférieure de 8 unités à celle du radium A.

[1] Le mésothorium I, qui s'extrait facilement des résidus de la préparation du thorium, et dont la période est 6,7 ans, peut remplacer le radium dans certaines applications.

Les propriétés chimiques ne dépendent que du nombre atomique : ***deux éléments isotopes ont des propriétés chimiques identiques.*** Mais les propriétés radioactives dépendent essentiellement de la constitution du noyau : ***deux éléments isotopes ont des propriétés radioactives différentes.*** Les rayons qu'ils émettent sont différents : le radium émet des rayons α, le mésothorium I émet des rayons β; les rayons α du radium A ont un parcours de $4^{cm},50$, ceux du radium F ont un parcours de $3^{cm},72$. Leurs périodes sont différentes : la période du radium A est 3 minutes, celle du radium C′ est 10^{-6} seconde, celle du radium F est 140 jours.

Il est impossible de séparer deux isotopes par les procédés habituels de l'analyse chimique; mais tandis que la séparation des isotopes non radioactifs est extrêmement difficile (§ 382), celle des isotopes radioactifs est rendue extrêmement facile par l'existence des transformations radioactives. Le fait seul que le radium A a une vie environ 60.000 fois plus courte que le radium F entraîne la conséquence que les minerais de radium contiennent 60.000 fois moins de radium A que de radium F (cf. § 407) : le traitement chimique de ces minerais donne du radium F — ou **polonium** — pratiquement pur, tandis que le dépôt radioactif fourni par l'émanation contient du radium A parfaitement exempt de radium F. De même, s'il est impossible de séparer par des procédés chimiques le radiothorium du thorium, on peut facilement extraire le mésothorium des minerais de thorium; au bout d'un an ou deux, le mésothorium aura produit suffisamment de radiothorium pour qu'on puisse l'isoler facilement par les procédés de l'analyse chimique.

D'après le tableau que nous avons dressé, les éléments non radioactifs que fournit finalement la transformation de l'uranium et du thorium sont des isotopes du plomb, dont les masses atomiques sont respectivement 206 et 208. On a constaté depuis longtemps l'existence de grandes quantités de plomb dans les minerais radioactifs et on a toujours supposé qu'elles provenaient de l'accumulation, au cours des époques géologiques, des produits ultimes des transformations radioactives. En réalité, les transformations de l'uranium et du thorium fournissent des éléments qui ne sont pas identiques entre eux, et dont les atomes n'ont pas la même masse; le plomb des minerais radioactifs est constitué par un mélange de ces éléments et de plomb ordinaire. La preuve expérimentale en est fournie par les déterminations de la masse atomique, qui ont donné les résultats suivants :

Plomb des minerais non radioactifs.....	207,15 à 207,20
— d'uranium..........	206,05 à 207,004
— de thorium.........	207,7 à 207,9

Les densités des différents plombs et celles de leurs nitrates présentent également de petites différences, de l'ordre de 1 0/0. Rappelons enfin que les raies de leurs spectres lumineux présentent entre elles de petites différences de longueur d'onde (§ 382).

CHAPITRE XXXVIII

LA CONSTITUTION DE LA MATIÈRE

I. — *LES CONSTITUANTS DE L'ATOME*

412. Le noyau et les électrons. — Rappelons d'abord comment on a été conduit aux hypothèses fondamentales que nous avons résumées au début de notre étude (§ 351).

La possibilité d'ioniser un atome, c'est-à-dire de le diviser en une partie chargée positivement et une partie chargée négativement, conduit à admettre qu'il est constitué par un assemblage de particules positives et de particules négatives.

Les particules négatives, observées dans le vide, sont toujours des électrons; dans un gaz, on observe des ions négatifs de masse plus grande, mais leur formation est un phénomène secondaire, dû à la fixation des électrons sur des atomes ou des molécules neutres (cf. § 366). Dans tous les cas, au moment où la particule négative se sépare de l'atome, elle est constituée par un électron : on doit admettre que dans tous les atomes, quelle que soit leur nature chimique, les particules négatives sont identiques entre elles, et sont constituées par des électrons. La possibilité d'observer des ions positifs portant plusieurs charges — on a obtenu dans les rayons positifs des atomes de mercure portant 8 charges élémentaires — conduit d'ailleurs à admettre que l'atome peut contenir un nombre assez grand d'électrons.

Les ions positifs ont toujours une masse pratiquement égale à celle de l'atome qui les a fournis (§ 381). L'atome contient donc une seule particule positive, indivisible, dont la masse représente la plus grande partie de la masse de l'atome, et dont la masse et la charge caractérisent la nature chimique de l'élément.

Le noyau positif et les électrons qui constituent un atome exercent les uns sur les autres des forces d'attraction et de répulsion électrostatiques. Leur disposition doit être telle que la configuration de l'atome soit une configuration d'équilibre, ou du moins une configuration stable. C'est la nécessité de satisfaire à cette condition de stabilité qui a conduit à supposer que les électrons gravitent autour du noyau; les orbites qu'ils décrivent, sous l'ac-

tion des forces électrostatiques, sont analogues aux orbites que décrivent les planètes autour du soleil, sous l'action des forces de gravitation universelle.

413. Nombre d'électrons contenus dans l'atome. — Dans les transformations radioactives, le noyau positif de l'atome expulse des particules chargées : la charge de ce noyau est modifiée, ainsi que le nombre d'électrons qui gravitent autour de lui dans l'atome neutre; en même temps, la nature chimique de l'élément radioactif est modifiée. L'étude expérimentale des transformations radioactives a conduit à la loi de Soddy : lorsqu'on passe d'un élément au suivant, dans la partie du tableau périodique de Mendeleeff qui contient les corps radioactifs, le nombre de charges élémentaires portées par le noyau atomique augmente d'une unité. La généralisation de cette loi expérimentale à l'ensemble du tableau des éléments constitue l'hypothèse que nous avons indiquée au paragraphe 352 : l'atome d'hydrogène se compose d'un noyau portant une charge + **e** autour duquel gravite un électron portant la charge — **e**; l'atome qui occupe la case de rang N dans le tableau de Mendeleeff se compose d'un noyau portant la charge + N**e** autour duquel gravitent N électrons portant chacun la charge — **e**.

L'ordre de grandeur de la charge nucléaire a pu, dans certains cas, être évalué par une expérience directe, basée sur la mesure de la déviation que subit une particule α lorsqu'elle traverse un atome. La particule α, qui porte une charge positive, est soumise à des forces électrostatiques lorsqu'elle passe au voisinage du noyau ou des électrons; comme sa vitesse est très grande, ces forces ne peuvent produire de déviation appréciable que si elle passe très près d'une autre particule très fortement chargée : les électrons ne produisent pas de déviation; seuls les noyaux des atomes lourds, portant une charge égale à un grand nombre de fois la charge élémentaire, peuvent produire une déviation appréciable.

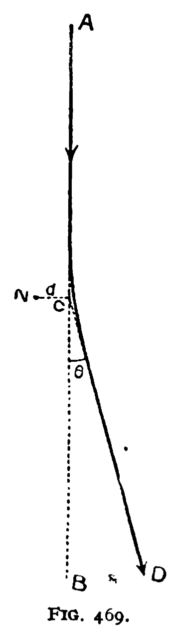


Fig. 469.

Supposons la particule α, de masse m et de charge e, lancée avec une vitesse v, suivant une droite AB (*fig.* 469), qui passe à une distance d d'un noyau N portant une charge E; il est facile de calculer la trajectoire qu'elle décrit sous l'influence de la force électrostatique Ee / r^2, et en particulier de calculer l'angle θ que fait avec sa direction initiale la direction CD suivant laquelle elle s'écarte du noyau N. On trouve que la déviation θ est donnée par la formule :

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{dv^2m}{eE}.$$

L'expérience a pu être réalisée grâce à la possibilité d'observer le point d'impact de chaque particule α sur un écran fluorescent, par la scintillation qu'elle y produit (§ 399). Les particules α traversent une lame métallique très mince, dont l'épaisseur est assez faible pour qu'elles ne rencontrent qu'un seul

atome; comme on connaît la masse de l'atome du métal, on peut calculer la distance moyenne qui sépare dans la lame les différents noyaux atomiques et calculer la probabilité pour qu'une particule α passe à une distance *d* de l'un de ces noyaux. En faisant une hypothèse sur la valeur de E, on peut en déduire la probabilité pour qu'une particule α subisse une déviation θ : cette dernière probabilité peut être déterminée expérimentalement, en observant les points d'impact d'un grand nombre de particules, et l'expérience permet par suite de vérifier l'hypothèse faite sur la valeur de E. Dans d'autres expériences, on a photographié, par la méthode de C. T. R. Wilson (§ 401), les trajectoires des particules α dans l'argon, et mesuré les déviations θ, qui sont données directement par les coudes observés dans ces trajectoires.

Ces expériences ont toujours fourni des valeurs de la charge dont l'ordre de grandeur correspond bien à l'hypothèse rappelée au début de ce paragraphe : c'est ainsi que pour le cuivre, l'argent et le platine, qui occupent dans le tableau périodique les cases 29, 47 et 78, les expériences de dispersion des particules α ont donné pour la charge du noyau des valeurs égales à 29,3, 46,3 et 77,4 fois la charge élémentaire; pour l'argon, qui occupe la case 18, la répartition des déviations correspond à une charge du noyau égale à 19 fois la charge élémentaire.

Dans les expériences faites avec la chambre de Wilson, on observe non seulement la trace du rayon α incident et celle du rayon α dévié, mais encore la trace de la trajectoire décrite par le noyau déviant : la réaction qu'exerce sur lui la particule α lorsqu'elle passe à son voisinage suffit en effet à le lancer avec une vitesse telle qu'il constitue un véritable rayon ionisant. On peut considérer le phénomène comme un choc de la particule α sur ce noyau : les trajectoires après le choc de la particule α et de l'atome projeté forment une *fourche*, et l'on peut déterminer d'après les photographies les angles que font avec la vitesse initiale de la particule α les deux bras de cette fourche. Les photographies donnent également les parcours, ce qui permet (§ 398) d'évaluer les vitesses : on vérifie que les angles, les vitesses et les masses satisfont bien aux formules des chocs élastiques que l'on déduit en Mécanique des deux principes de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie cinétique.

414. Dimensions du noyau atomique. — Rayons H. — Les expériences que nous venons de décrire sur la déviation des particules α par les atomes lourds ont fourni des répartitions des déviations en parfait accord avec les formules que donnent les calculs dont nous avons indiqué le principe : elles montrent que la loi de Coulomb, prise comme point de départ de ces calculs, reste applicable tant que la distance entre la particule α et le noyau ne devient pas inférieure à 10^{-12} centimètre. Mais, si on les répète avec des atomes légers — hydrogène, hélium, aluminium, — on obtient une répartition des déviations différente de celle que donnent les formules, et on arrive à cette conclusion que la loi de Coulomb cesse d'être applicable pour des distances de l'ordre de 10^{-13} centimètre. C'est là la distance à laquelle se font sentir des forces créées par les noyaux atomiques et différentes des forces de Coulomb : on peut dire qu'elle mesure la somme des rayons de l'atome et de la particule α; ces rayons sont donc du même ordre de grandeur que le rayon de l'électron, qui est d'environ 2.10^{-13} centimètre (§ 350).

Quant aux dimensions de l'atome, elles peuvent être obtenues par diverses méthodes : on peut les calculer en supposant que les atomes se touchent dans les sels cristallisés, ou dans les gaz réduits à n'occuper plus que leur covolume; on peut encore, par l'application des lois de la viscosité, déduire le rayon des ions électrolytiques de leur mobilité ou de leur coefficient de diffusion. Tous ces calculs fournissent des valeurs du diamètre atomique de l'ordre de 10^{-8} centimètre : on peut admettre que c'est là le diamètre des orbites décrites par les électrons les plus éloignés du noyau.

On voit qu'il n'y a rien d'exagéré dans la comparaison que l'on fait fréquemment entre un atome et le système solaire, le système des électrons qui gravitent autour du noyau positif correspondant au système des planètes qui gravitent autour du soleil. La structure de l'atome est d'ailleurs plus compliquée que celle du système solaire, puisqu'il peut contenir plusieurs dizaines d'électrons au lieu de huit planètes; ses dimensions relatives sont plus grandes, puisque le diamètre des orbites des électrons extérieurs est de l'ordre de 100.000 fois le diamètre du noyau, tandis que le diamètre de l'orbite de Neptune ne vaut que 7.000 diamètres solaires.

Revenons aux noyaux atomiques projetés par le choc des particules α, et considérons le cas particulier d'un noyau d'hydrogène; comme ce noyau est quatre fois plus léger que la particule α, il peut être lancé avec une vitesse plus grande et avoir un parcours plus long que le rayon α générateur. Dans le cas d'un choc direct, l'application des lois du choc élastique indique que le noyau H^+ a une vitesse 1,6 fois plus grande et un parcours quatre fois plus grand que la particule α qui l'a projeté : c'est ainsi que les rayons α du radium C', qui ont un parcours dans l'air de 7 centimètres, peuvent projeter des noyaux d'hydrogène à 28 centimètres. Les noyaux H^+ ainsi projetés forment de véritables rayons corpusculaires : on les appelle des **rayons H naturels.** Bien entendu, les rayons H de parcours supérieur à celui des rayons α générateurs ne sont obtenus que dans les chocs où la particule α subit une très grande déviation, c'est-à-dire dans ceux où elle passe très près du noyau H^+; conformément aux lois du choc élastique, les rayons H ne sont émis que vers l'avant, et leur vitesse décroît à mesure que croît l'angle θ que fait leur direction avec celle des rayons α qui les ont produits : pour $\theta = 30^o$, elle est encore 1,38 fois, tandis que pour $\theta \doteq 45^o$, elle n'est plus que 1,13 fois celle de ces rayons α. Comme nous l'avons indiqué au début de ce paragraphe, la répartition des déviations ne peut pas être calculée à partir de la loi de Coulomb : l'expérience montre que, dans un cône de demi-angle $\theta = 30^o$, on obtient un nombre de rayons H qui est de l'ordre de un pour 25.000 rayons α.

Les rayons H peuvent être obtenus en bombardant par les rayons α non seulement l'hydrogène gazeux mais encore une combinaison hydrogénée quelconque, par exemple de la paraffine : l'énergie de quelques électrons-volts (§ 416) qui correspond à la rupture d'une liaison chimique est tout à fait négligeable par rapport aux énergies cinétiques, de l'ordre du million d'électrons-volts (§ 398), qui sont échangées dans le choc.

Les rayons H peuvent être observés par les divers procédés qui permettent l'étude des rayons α. Ils ont été découverts (Marsden et Rutherford) par la méthode des scintillations : un écran au sulfure de zinc, placé dans l'hydrogène à 90 centimètres d'une source de radium C', reçoit encore des scintillations, bien que le parcours dans l'hydrogène des rayons α du radium C' ne soit que

de 20 centimètres. Ils produisent l'ionisation des gaz, le nombre d'ions produits étant du même ordre que pour des rayons α de même vitesse, et peuvent être dénombrés par un compteur à ionisation (§ 399). On a pu mesurer leurs déviations par un champ magnétique et par un champ électrique : *le rapport e/m est bien celui qui correspond au noyau positif* H^+ *de l'atome d'hydrogène.* Ce noyau H^+, qui joue, comme nous le verrons, un rôle très important dans les études et les théories de la structure nucléaire, a reçu le nom de **proton.**

415. Le tableau périodique des éléments. — Si l'on range les éléments par ordre de masse atomique croissante, et si l'on suit les variations d'une même propriété dans toute la série des éléments, on constate qu'il existe deux modes de variation nettement différents. Certaines propriétés varient d'une façon régulière de l'élément le plus léger à l'élément le plus lourd : citons comme exemple les longueurs d'onde des rayons X caractéristiques, qui diminuent suivant la loi de Moseley (§ 395). Les propriétés chimiques, au contraire, semblent subir une variation périodique. Si l'on part de l'hélium, on rencontre d'abord des éléments de plus en plus différents au point de vue chimique, puis on retrouve avec le néon des propriétés chimiques analogues à celles de l'hélium; de même les éléments qui suivent le néon se rapprochent de ceux qui suivent l'hélium.

Cette périodicité a été signalée en 1869 par Mendeleeff, et l'a conduit à dresser le tableau qui porte son nom et dont nous reproduisons ci-dessous les premières lignes :

2 Hélium He = 4	3 Lithium Li = 7	4 Beryllium Be = 9	5 Bore B = 11	6 Carbone C = 12	7 Azote N = 14	8 Oxygène O = 16	9 Fluor F = 19
10 Néon Ne = 20	11 Sodium Na = 23	12 Magnésium Mg = 24	13 Aluminium Al = 27	14 Silicium Si = 28	15 Phosphore P = 31	16 Soufre S = 32	17 Chlore Cl = 35,5
18 Argon A = 40	19 Potassium K = 39	20 Calcium Ca = 40	21 Scandium Sc = 45	22 Titane Ti = 48	23 Vanadium V = 51	24 Chrome Cr = 52	25 Manganèse Mn = 55

Le tableau périodique contient tous les éléments dans l'ordre des poids atomiques croissants, sauf deux ou trois interversions, auxquelles on a été conduit par la nécessité de placer les éléments correspondants dans la colonne que leur assignent leurs propriétés chimiques : c'est ainsi qu'on a placé l'argon (A = 39,88) avant le potassium (K = 39,10). On sait maintenant que l'ordre des éléments, dans le tableau de Mendeleeff, correspond en réalité à la charge nucléaire des atomes et au nombre d'électrons qu'ils contiennent; la découverte des isotopes, trouvés d'abord par l'étude des familles radioactives (§ 411), puis par l'étude des rayons positifs (§ 382), a montré qu'un élément,

considéré comme pur et bien défini au point de vue chimique, pouvait être un mélange de plusieurs éléments de propriétés radioactives différentes et de masses atomiques différentes.

En résumé, l'existence des isotopes et l'existence de deux modes possibles de variation d'une propriété le long de la série des éléments montrent qu'*on peut ranger les propriétés des éléments en deux catégories, dont l'origine doit être cherchée dans deux régions bien distinctes de l'atome; les propriétés radioactives, ainsi que la masse atomique, dépendent de la constitution du noyau; au contraire, les propriétés chimiques, les spectres de raies* — raies lumineuses et radiations de Rœntgen —, *ne dépendent que de la charge totale du noyau, ou, ce qui revient au même, du nombre des électrons qui gravitent autour de lui dans l'atome neutre.*

416. Les électrons de valence. — La répartition des électrons, qui doit rendre compte des propriétés chimiques, doit présenter un caractère périodique, correspondant à la périodicité des propriétés chimiques. Les atomes reprennent le même caractère chimique lorsque le nombre d'électrons qu'ils contiennent augmente de 8. On l'explique en supposant que les électrons sont répartis en couches successives, et que la couche extérieure (1) contient, lorsqu'elle est complète, 8 électrons dont les orbites sont situées sur une même sphère; mais elle n'est en général pas complète : ce sont les électrons, en nombre inférieur à 8, qu'elle contient, qui déterminent les propriétés chimiques de l'élément.

Parmi les propriétés les plus importantes des atomes figure leur aptitude à former des combinaisons salines, c'est-à-dire des ions ayant une valence caractéristique de l'atome. Lorsqu'on met en présence un nombre égal d'atomes de sodium Na et d'atomes de chlore Cl, il se forme du chlorure de sodium : cela veut dire, dans les conceptions actuelles, que chaque atome de sodium perd un électron pour donner un ion Na^+, et ces électrons sont fixés par les atomes de chlore pour donner des ions Cl^-; les forces de cohésion chimique ne sont autres que les forces électrostatiques qui s'exercent entre ces ions (§ 391); de même une molécule telle que H^2O est formée par deux ions H^+ maintenus par l'attraction électrostatique autour d'un ion O^{--}.

Les électrons ainsi échangés entre les atomes sont les **électrons de valence.** Les énergies nécessaires pour les détacher de l'atome sont relativement faibles : tandis que l'excitation d'un spectre de rayons X nécessite des énergies de quelques dizaines de milliers d'électrons-volts (§ 343), les réactions chimiques les plus vives mettent en jeu des énergies de l'ordre de 70.000 calories, ou 300 000 joules, par molécule-gramme; une telle énergie correspond à une chute de potentiel de 3 volts pour une charge de 96.500 coulombs, et à une énergie de 3 électrons-volts pour une molécule élémentaire. Ce sont ces mêmes énergies, correspondant à des potentiels de quelques volts, que libèrent les réactions qui se produisent dans les piles, ou qui sont nécessaires à l'excitation des spectres optiques (§§ 367 et 368). Ce sont donc les mêmes électrons qui interviennent dans l'émission des raies lumineuses et dans les réactions chimiques : on comprend ainsi pourquoi les spectres optiques présentent le même caractère de périodicité que les propriétés chimiques.

(1) Sauf si l'atome ne contient qu'une seule couche qui est complète avec 2 électrons (He).

Les électrons de valence, n'étant maintenus dans l'atome que par des forces relativement faibles, doivent être les électrons de la couche extérieure, qui sont les plus éloignés du noyau positif, et sur lesquels l'attraction de ce noyau est en partie compensée par la répulsion des électrons intérieurs. La périodicité des propriétés chimiques conduit à admettre que les couches de 8 électrons sont les plus stables, et que les atomes possédant une couche extérieure de 8 électrons ne peuvent ni en gagner ni en perdre : ce sont les éléments de valence 0, ne donnant pas de combinaisons chimiques, qui forment la famille des gaz rares, He, A, etc.

Partons par exemple du néon, et suivons le tableau périodique (§ 415). Le néon, élément de valence 0, contient 10 électrons, dont deux forment une couche intérieure, et 8 une couche extérieure complète. Pour passer du néon au sodium, il faut ajouter à l'atome un 11e électron, qui forme à lui seul une troisième couche, extérieure aux deux premières : c'est cet électron qui se détache facilement pour former l'ion positif monovalent Na^+ observé dans NaCl. Dans l'atome de magnésium, la couche extérieure contient deux électrons : on peut avoir l'ion positif divalent Mg^{++}, observé dans $MgCl^2$ ou MgO. De même dans l'atome d'aluminium, on a trois électrons de valence, expliquant la formation de l'ion positif trivalent Al^{+++}, observé dans $AlCl^3$.

Passons maintenant au silicium; la couche extérieure contient 4 électrons : c'est la perte de ces 4 électrons qui forme l'ion Si^{++++}, susceptible d'attirer électrostatiquement 4 ions Cl pour former la molécule $SiCl^4$, ou deux ions divalents O^{--} pour former la molécule SiO^2. Mais l'atome de silicium peut aussi fixer 4 nouveaux électrons, pour former une couche extérieure stable de 8 électrons : il forme ainsi l'ion Si^{----}, noyau de la molécule SiH^4. De même l'atome de phosphore peut perdre ses 5 électrons extérieurs, pour former l'ion P^{+++++} dans PCl^5, ou compléter ses électrons de valence à 8 par fixation de 3 nouveaux électrons, pour former l'ion P^{---} dans PH^3. De même l'atome de soufre, à 6 électrons extérieurs, peut donner l'ion S^{++++++} dans SO^3, ou l'ion S^{--} dans H^2S; l'atome de chlore, à 7 électrons extérieurs, peut les perdre pour donner l'ion $Cl^{+++++++}$ dans Cl^2O^7; il peut, plus facilement encore, fixer un électron supplémentaire pour donner l'ion Cl^- dans HCl ou NaCl.

Si on ajoute encore un électron, on retrouve, avec l'argon, un élément de valence nulle : l'atome d'argon contient une couche intérieure de deux électrons, et deux couches complètes de 8 électrons. Si on ajoute un 19e électron, il se dispose de façon à former à lui seul une quatrième couche extérieure aux précédentes; l'aspect extérieur de l'atome de potassium est le même que celui de l'atome de sodium, et les propriétés chimiques sont les mêmes.

En résumé, l'assimilation des liaisons de valence à des liaisons électrostatiques permet de rendre compte de la plupart des phénomènes de la Chimie minérale, et en particulier de la formation des composés métalliques complexes; elle permet en même temps de déterminer le nombre d'électrons qui forment la couche extérieure de l'atome; ce nombre est 8 pour les éléments de la colonne des gaz rares, 1 pour la colonne des métaux alcalins, ... 7 pour la colonne des halogènes.

La théorie de la valence que nous venons d'esquisser suppose que la couche extérieure ne peut pas contenir plus de 8 électrons, mais il faut remarquer qu'elle ne nous dit rien sur le nombre d'électrons des couches intérieures :

l'étude des spectres de rayons X montre que certaines de ces dernières peuvent contenir 18 et 32 électrons. Il peut donc arriver, lorsqu'on passe d'un élément au suivant, que l'électron nouveau se dispose sur une orbite intérieure ; les deux éléments consécutifs ont alors même configuration extérieure et possèdent des propriétés chimiques analogues. C'est ce qui se produit en particulier dans le groupe du fer, et c'est ce qui explique qu'il y ait 18 éléments entre les deux gaz rares consécutifs, l'argon et le krypton : l'addition du 19ᵉ et du 20ᵉ électron a formé, dans le potassium monovalent et le calcium divalent, une quatrième couche au delà de la troisième couche de 8 électrons ; mais ce n'est que l'addition du 31ᵉ électron qui fournit, avec le gallium, un élément trivalent, contenant une quatrième couche de 3 électrons au delà de la 3ᵉ couche, qui est maintenant de 18 électrons. Les éléments du groupe du fer contiennent donc une couche intérieure encore incomplètement garnie, mais contenant plus de 8 électrons : on peut chercher dans ce fait la cause de l'insuffisance de symétrie des orbites électroniques par laquelle on explique l'existence du paramagnétisme (§ 353).

417. L'émission des raies spectrales et les niveaux d'énergie de l'atome. — Rappelons d'abord l'hypothèse fondamentale que l'on doit appliquer chaque fois qu'on étudie les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement (§ 343) : *l'énergie est toujours échangée d'une façon discontinue,* et, *si la fréquence des radiations est* ν, *l'énergie échangée est un multiple entier du* **quantum d'énergie** $h\nu$.

L'hypothèse des quanta a été introduite par Planck pour expliquer la loi fondamentale du rayonnement du corps noir (Voir *Cours de Thermodynamique*) ; Poincaré a montré qu'elle était nécessaire, et qu'il était impossible de retrouver cette loi expérimentale en partant des hypothèses de la Mécanique classique. C'est à partir de cette loi expérimentale que l'on a calculé la valeur de la cons tante universelle $h = 6{,}61 \cdot 10^{-27}$ C. G. S. La théorie des quanta a permis depuis de grouper un grand nombre de phénomènes très différents les uns des autres : nous avons vu son application aux phénomènes photo-électriques (§ 356), à l'émission des radiations d'ionisation et de résonance (§§ 367 et 368), à la production des rayons X et à l'émission par ces rayons d'électrons secondaires (chap. XXXVI), à l'émission des rayons γ et à leur conversion en rayons β (§ 404). Citons encore l'interprétation qu'elle a permis d'obtenir des variations avec la température des chaleurs spécifiques des solides et des gaz *(Cours de Thermodynamique,* §§ 190 et 232 *bis).*

L'émission par un atome d'une radiation monochromatique de fréquence ν, appartenant au spectre optique ou au spectre de rayons X, doit donc être considérée comme l'émission par cet atome d'une quantité d'énergie $h\nu$. L'atome, qui avait été excité par exemple par un choc électronique, se trouvait dans un état où son énergie avait une valeur W_2 supérieure à sa valeur normale : il est revenu à un état où son énergie a une valeur moindre W_1, et la diminution de son énergie est donnée par la relation:

$$W_2 - W_1 = h\nu.$$

Le fait que les radiations émises forment un spectre de raies, et non pas un spectre continu, montre que les énergies W_1 et W_2 ne peuvent pas varier de

façon continue. L'étude expérimentale des spectres optiques et des spectres de rayons X montre d'ailleurs que, dans l'un et l'autre cas, les fréquences des raies émises satisfont au **principe de combinaison,** énoncé par Ritz dès 1908 : *un atome peut être caractérisé par une série* W_1, W_2,..., W_n,..., W_m,... *de valeurs de l'énergie, et les fréquences des différentes raies qui constituent son spectre sont données par les différences :*

$$h\nu = W_m - W_n.$$

C'est ainsi que les différents **niveaux d'énergie** de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule $W_n = -Rh/n^2$, en désignant par R une constante qu'on appelle la *constante de Rydberg* (cf. § 396) ; on connaît des raies qui correspondent à $n = 1$, $m = 2, 3,...$, d'autres qui correspondent à $n = 2$, $m = 3, 4,...$, d'autres encore qui correspondent à $n = 3$, $m = 4, 5,...$: pour toutes ces raies, les longueurs d'onde mesurées sont égales, avec une précision de l'ordre du cent-millième, aux longueurs d'onde théoriques. L'étude expérimentale des spectres permet donc de déterminer avec une très grande précision les divers niveaux d'énergie possibles d'un atome.

Les divers niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène correspondent aux diverses orbites que l'unique électron de cet atome peut décrire autour du noyau ; de même, les divers niveaux d'énergie que détermine l'étude des spectres optiques correspondent aux orbites que peuvent décrire les électrons de valence. Les spectres de rayons X, correspondant à des fréquences ν et des énergies $h\nu$ beaucoup plus élevées, sont produits par les déplacements d'électrons beaucoup plus fortement liés au noyau, c'est-à-dire par les déplacements des électrons des couches internes : leur étude permet la détermination des niveaux d'énergie sur lesquels se trouve l'atome lorsqu'il a perdu un des électrons de ces couches. La structure simple des spectres de rayons X permet de suivre une même raie à travers toute la série des éléments (§ 395), et de voir comment s'édifient successivement les divers niveaux d'énergie à mesure que l'on passe des éléments les plus simples aux éléments les plus lourds. Nous renverrons au *Cours d'Optique* pour l'indication des résultats obtenus : on peut les résumer en disant qu'*à l'heure actuelle la répartition des électrons entre les divers niveaux d'énergie des atomes est à peu près complètement connue.*

On trouvera également dans le *Cours d'Optique* quelques indications sur l'interprétation théorique de ces résultats expérimentaux. Cette interprétation est évidemment impossible dans le cadre de la Mécanique classique : nous avons dit (§ 412) que la nécessité de choisir pour l'atome une configuration stable a conduit à admettre que les électrons y gravitent autour du noyau central ; d'après la théorie électromagnétique classique, un tel mouvement doit produire un champ électromagnétique variable, et, par conséquent, rayonner de l'énergie ; l'énergie du mouvement de l'électron doit diminuer et il doit finir par tomber sur le noyau. Il existe donc, dans la théorie classique, une contradiction entre les deux hypothèses nécessaires de la stabilité de l'atome et du mouvement des électrons. C'est pour échapper à cette contradiction que Bohr a imaginé en 1913 d'appliquer la théorie des quanta au mouvement des électrons à l'intérieur de l'atome : conservant pour le calcul des orbites la loi de Coulomb et les lois de la Mécanique classique, il fit l'hypothèse que, *parmi la suite continue d'orbites que l'on peut ainsi calculer, il n'y a que la série*

discontinue des orbites qui satisfont à certaines conditions de quanta qui correspondent à des configurations stables de l'atome. Le long de ces orbites particulières, l'électron ne rayonne pas d'énergie; l'émission d'une radiation correspond au saut d'un électron d'une de ces orbites à une autre.

Le modèle d'atome proposé par Bohr — *l'atome de Bohr* — a rendu de très grands services, et continue à en rendre, pour la classification et l'interprétation des séries spectrales; il permet même, dans les cas les plus simples, de calculer théoriquement les longueurs d'onde des raies qui les composent : la valeur théorique qu'il fournit de la constante de Rydberg, $R = 2\pi^2 e^4 m/h^3$ est en parfait accord avec la valeur expérimentale. Mais l'expérience montre dans certains cas la nécessité de faire subir quelques corrections aux résultats prévus par la théorie de Bohr; on doit surtout remarquer que la contradiction des théories classiques que nous avons signalée n'est pas levée par le fait qu'on a posé comme principe que, lorsque certaines conditions de quanta sont satisfaites, le rayonnement prévu par la théorie classique n'existe pas. Nous verrons plus loin (§ 420) comment les difficultés semblent définitivement levées par la substitution de la Mécanique ondulatoire à la Mécanique classique; mais il ne faut pas se dissimuler que cette nouvelle Mécanique n'a permis jusqu'ici le calcul théorique des niveaux d'énergie que dans les cas les plus simples, et qu'il en sera sans doute encore ainsi pendant longtemps : ***l'existence des niveaux d'énergie de l'atome est un fait expérimental, et c'est l'expérience, et non la théorie qui nous fournit la valeur des énergies correspondantes.***

II. — *LA THÉORIE DES QUANTA ET LA THÉORIE DES ONDULATIONS*

418. Les quanta de lumière et l'effet Compton. — Un grand nombre de phénomènes, que nous avons étudiés dans ce chapitre et dans les chapitres précédents, ont fourni des vérifications quantitatives extrêmement précises de la relation d'Einstein, et nous pouvons considérer comme définitivement établi par l'expérience que les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement se font par quanta d'énergie $h\nu$, qu'il s'agisse d'émission ou d'absorption. Il paraît difficile de concevoir comment l'absorption peut se faire par quanta $h\nu$, de grandeur indépendante de la nature de l'atome absorbant, sans admettre que l'énergie se trouve distribuée en paquets de valeur $h\nu$ dans le rayonnement incident. On se trouve ainsi conduit à la théorie des **quanta de lumière** : *l'énergie rayonnante a elle-même, indépendamment de toute relation avec la matière, une structure discontinue; la lumière ou le rayonnement* X *ou* γ *de fréquence* ν *sont constitués par des grains d'énergie, ou* **photons**, *transportant chacun, avec une vitesse* c, *une énergie finie et égale à* $h\nu$. D'après la théorie de la relativité, un tel corpuscule possède une masse égale à $\frac{h\nu}{c^2}$ et une quantité de mouvement égale à $\frac{h\nu}{c}$.

Lorsqu'un photon rencontre un atome, dont la masse est très grande par rapport à la sienne, il se trouve arrêté par l'atome, et la disparition de son énergie s'accompagne du phénomène photoélectrique que nous avons étudié

aux paragraphes 356 et 394, c'est-à-dire de l'émission d'un rayon corpusculaire. Mais si le photon rencontre un électron libre ou faiblement lié, les phénomènes devront être différents, du fait que la masse de l'électron n'est pas très grande par rapport à celle du photon : pour des rayons X de longueur d'onde $\lambda = 0{,}1$ A., la masse du photon est le dixième de celle de l'électron. Considérons alors la rencontre d'un photon et d'un électron libre primitivement au repos comme le choc de deux corps élastiques : après le choc, l'électron aura une certaine quantité de mouvement mv dans une direction faisant un angle φ avec la direction initiale du photon, et ce dernier aura été dévié d'un angle θ, sa quantité de mouvement étant passée de la valeur $\frac{h\nu_0}{c}$ à la valeur plus petite $\frac{h\nu_\theta}{c}$ (*fig.* 470 *a*). Mais, d'après l'hypothèse fondamentale des quanta de lumière, la diminution de la quantité de mouvement du photon ne peut que traduire une diminution de la fréquence du rayonnement, donc une augmentation de sa longueur d'onde : *lorsqu'une radiation monochromatique est soumise à la diffusion par la matière, la partie de cette radiation qui est diffusée par les électrons libres doit avoir une longueur d'onde supérieure à celle de la radiation incidente.*

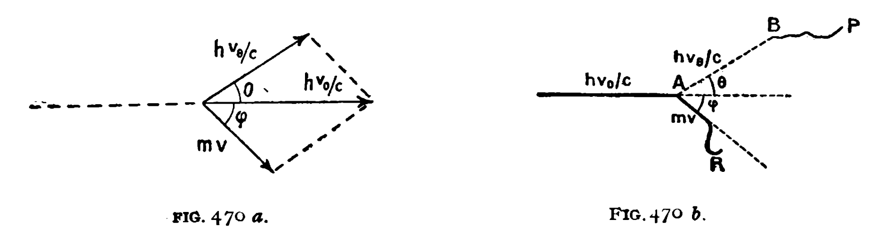


FIG. 470 *a*. FIG. 470 *b*.

Ce phénomène, que l'on désigne sous le nom d'**effet Compton**, a effective ment été observé en 1923 par Compton dans la diffusion des rayons X du molybdène sur du graphite. L'application des lois classiques des chocs élastiques — conservation de l'énergie et conservation de la quantité de mouvement — permet de calculer la variation de longueur d'onde $\Delta\lambda$ en fonction de l'angle de diffusion θ, et fournit la relation :

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2} = 0^{A}0484\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

La mesure de $\Delta\lambda$ pour différentes valeurs de θ a effectivement pu être réalisée avec une précision dépassant largement le centième, par l'emploi des spectrographes à rayons X, et les déplacements observés ont toujours été en excellent accord avec ceux que fait prévoir la formule. Des mesures faites avec des diffuseurs variés (graphite, aluminium, soufre, cuivre, argent, plomb, etc.) et des radiations de longueurs d'onde très différentes (de 0,2 à 1,54 angström) ont montré que la variation $\Delta\lambda$ est bien indépendante de la nature du diffuseur et de la longueur d'onde de la radiation incidente.

L'effet Compton a même pu être observé dans les gaz à l'aide de l'appareil à détentes de C. T. R. Wilson (§ 401) : l'expérience met en évidence la mise en mouvement de l'électron diffuseur en donnant une photographie de sa

trajectoire AR (*fig.* 470 *b*). Comme on connaît la direction du rayonnement incident, on peut, sur cette photographie, mesurer l'angle φ, tandis que la vitesse v peut être déduite de la longueur de la trajectoire, ou, si l'on a fait l'expérience dans un champ magnétique, de sa courbure : l'expérience a toujours vérifié la relation entre v et φ prévue par la théorie du choc élastique. On peut également repérer sur la photographie la direction AB du photon diffusé, par l'origine B de la trajectoire BP du photo-électron qu'il donne lorsqu'il est absorbé par un atome : on peut alors mesurer simultanément les angles φ et θ, et constater encore qu'ils satisfont bien aux lois du choc élastique. Ainsi *la théorie du choc élastique s'applique, non seulement au phénomène statistique de la diffusion d'un faisceau de rayons X par la matière, mais au phénomène individuel de la rencontre d'un photon et d'un électron.*

L'absorption des rayons X par la matière ne dépend d'ailleurs pas uniquement des deux phénomènes quantiques — émission de photo-électrons et effet Compton — que nous venons d'envisager. Une partie des radiations est aussi diffusée, sans changement de longueur d'onde, conformément à la théorie électromagnétique classique, par la mise en vibrations forcées des électrons des atomes diffuseurs; mais ce phénomène devient de moins en moins important, par rapport à l'effet Compton, à mesure que l'énergie de fixation des électrons dans l'atome devient plus petite par rapport au quantum $h\nu$, c'est-à-dire à mesure qu'on étudie des éléments diffuseurs plus légers ou des rayons X ou γ plus durs. Pour les rayons γ durs, l'absorption est due presque entièrement à l'effet Compton, et la valeur du coefficient d'absorption peut être assez correctement prévue par des formules que donne la Mécanique ondulatoire : il faut pourtant signaler que, pour les rayons γ très pénétrants, de quantum $h\nu$ supérieur à un million d'électrons-volts, et pour les éléments lourds tels que le plomb, l'absorption est nettement supérieure — de 20 à 40 o/o — à celle que prévoient ces formules; on attribue cet accroissement de l'absorption à un nouveau phénomème, encore mal connu, *d'absorption nucléaire* (cf. § 422).

419. Théorie corpusculaire et théorie ondulatoire de la lumière. — Ainsi l'étude des phénomènes d'émission et d'absorption a ramené la Physique moderne à la théorie de l'émission de Newton : une source de lumière ou de rayons X émet des corpuscules qui se propagent en ligne droite, et l'action de la lumière sur la matière résulte surtout des chocs de ces corpuscules sur les atomes ou électrons. Cette *théorie corpusculaire* avait été abandonnée au début du XIXe siècle, à cause de son incapacité à expliquer les phénomènes d'interférence et de diffraction, dont l'étude systématique permit à Fresnel de faire triompher la *théorie ondulatoire* d'Huyghens. Dans cette dernière théorie, l'énergie rayonnante est représentée par des vibrations qui se propagent dans l'espace et qui y sont réparties d'une façon continue : rien dans les théories classiques de Fresnel et de Maxwell ne permet d'introduire une structure discontinue de l'énergie; la constante expérimentale h de Planck leur reste essentiellement étrangère, et il leur est par exemple à peu près impossible de rendre compte de l'effet Compton, que représente au contraire de la façon la plus simple la théorie corpusculaire.

Ainsi les phénomènes de l'Optique — et bien entendu il faut comprendre sous ce nom l'étude des rayons X et γ aussi bien que celle des radiations lumineuses — se trouvent partagés en deux classes : d'une part, les phénomènes tels que les interférences de la lumière, la diffraction des rayons X par un cristal ou par un réseau tangent, etc., s'expliquent par la théorie ondulatoire et ne s'expliquent pas dans la théorie corpusculaire; d'autre part les phénomènes d'émission et d'absorption s'expliquent par la théorie corpusculaire et ne peuvent pas s'interpréter dans la théorie ondulatoire. L'Optique semblait, il y a quelques années, divisée en deux grands chapitres entièrement distincts, les phénomènes ne pouvant être groupés dans chacun d'eux que par l'emploi de deux hypothèses contradictoires : L. de Broglie a eu, en 1924, l'idée de les concilier dans une représentation unique, en admettant que chaque quantum de radiation transporte avec lui, comme l'électron transporte son champ, un phénomène périodique répandu dans tout l'espace environnant, et dont la fréquence est liée à l'énergie du photon par la relation d'Einstein, $W = h\nu$; ou encore, sous une autre forme, il admet qu'une radiation est formée par une onde présentant des singularités ponctuelles où se trouve concentrée la totalité ou la presque totalité de son énergie, chaque singularité étant pourvue d'un quantum $h\nu$.

La propagation de l'onde dans le vide est définie par une certaine équation de propagation de la forme $\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, et la vibration à l'instant t en un point de coordonnées x, y, z est donnée par une relation de la forme :

$$u\,(x, y, z, t) = A\,(x, y, z) \cos 2\pi\nu\,[t - \varphi\,(x, y, z)],$$

les surfaces $\varphi\,(x, y, z) = C^{te}$ étant ce qu'on appelle les surfaces équiphases. Dans la théorie de L. de Broglie, les mouvements des corpuscules de lumière, des photons, ne sont pas donnés par les lois ordinaires de la Mécanique newtonienne, mais bien par les lois de la propagation de l'onde, et un faisceau lumineux se compose d'un nuage de photons dont les trajectoires sont les courbes orthogonales aux surfaces $\varphi\,(x, y, z) = C^{te}$; il en résulte en particulier que la densité des photons dans une région quelconque de l'espace est proportionnelle à l'amplitude A (x, y, z) que définit l'équation de l'onde. La liaison ainsi établie entre la Mécanique du photon et la théorie de propagation de l'onde fait qu'*il revient au même de décrire les phénomènes optiques dans le langage corpusculaire ou dans le langage ondulatoire.* Dans une expérience d'interférences, par exemple, la théorie ondulatoire prédit l'existence de franges noires aux points où l'amplitude A est nulle, la théorie corpusculaire fournit le même résultat en prédisant qu'il ne passe en ces points aucun photon; de même, à cause de son identité mathématique avec la théorie ondulatoire, la nouvelle théorie corpusculaire échappe complètement aux difficultés relatives à la valeur de l'indice de réfraction qui avaient fait abandonner, après les expériences de Foucault, l'ancienne théorie de l'émission de Newton.

En résumé, *la théorie de L. de Broglie, qui prend pour point de départ la structure discontinue de la lumière telle que nous la révèlent les recherches modernes, conserve intégralement la théorie classique de Fresnel pour l'étude des effets statistiques dans le mouvement d'une multitude de particules*; *mais elle la complète*

en rendant compte des effets individuels, dus à un seul photon, que mettent en évidence les phénomènes photo-électriques ou la diffusion par les électrons libres.

419 *bis*. La Mécanique ondulatoire et la diffraction des particules matérielles. — La Mécanique des photons dont nous venons d'indiquer le principe a reçu le nom de Mécanique ondulatoire ; elle représente le mouvement des corpuscules de lumière aussi bien dans les cas complexes où se produisent les phénomènes d'interférences et de diffraction que dans les cas simples où les phénomènes lumineux obéissent aux lois de l'Optique géométrique : on montre que, dans ces derniers cas, la Mécanique ondulatoire se réduit à la Mécanique newtonienne. Ainsi *la Mécanique ondulatoire est d'une application plus générale que la Mécanique newtonienne, qui nous apparaît comme une première approximation, au même titre que l'Optique géométrique est une première approximation de l'Optique ondulatoire.*

L'importance de cette remarque vient de ce qu'on admet aujourd'hui que *la Mécanique ondulatoire s'applique, non seulement au mouvement des photons, mais au mouvement des corpuscules de nature quelconque, par exemple des électrons :* de même qu'on a fait correspondre à la radiation lumineuse de longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ un photon de quantité de mouvement $h\nu/c = h/\lambda$, on fait correspondre à l'électron de vitesse v et de quantité de mouvement mv une onde de longueur d'onde $\lambda = h/mv$. Dans les cas usuels, où l'Optique géométrique est valable, la Mécanique de l'électron est la Mécanique newtonienne classique, telle que nous l'avons appliquée jusqu'ici; mais il peut se présenter des phénomènes où l'approximation de l'Optique géométrique n'est plus suffisante, et où il faut recourir à la Mécanique ondulatoire, c'est-à-dire chercher les solutions de l'équation de propagation des ondes pour en déduire les trajectoires des électrons. Il faut d'ailleurs remarquer qu'on obtient ainsi l'ensemble des trajectoires d'un faisceau d'électrons : comme dans le cas des interférences lumineuses, la prévision est d'ordre statistique. La considération des ondes associées à un faisceau d'électrons indique par exemple quels sont les points d'une plaque photographique où s'accumulent les impacts électroniques et quels sont ceux qui ne reçoivent aucun électron; mais elle ne donne pas d'indications sur la trajectoire d'un électron isolé.

La propagation d'un faisceau de particules matérielles, étant représentée par les mêmes équations que la propagation d'un faisceau lumineux, doit donner lieu aux mêmes phénomènes de diffraction : c'est ce qui a été effectivement observé. Les premières expériences sur la diffraction des électrons sont celles de Davisson et Germer (1927); elles ont été répétées depuis avec des dispositifs très variés et des faisceaux électroniques de vitesses très différentes. Dans toutes ces expériences, on produit un faisceau électronique homogène à l'aide d'un *canon à électrons*, dans lequel les électrons émis par un filament incandescent sont accélérés par une différence de potentiel convenable, et on opère dans un vide aussi parfait que possible, pour soustraire les électrons à toute cause de ralentissement; on a employé aussi bien des différences de potentiel faibles, de 10 volts à 500 volts, pour lesquelles la vitesse des électrons, $v = \sqrt{2eV/m}$, va de $2 \cdot 10^8$ à $1{,}4 \cdot 10^9$ cm/sec et la longueur d'onde de

Broglie, $\lambda = h/mv$, de 3,87 à 0,547 angströms, que des différences de potentiel élevées, atteignant 200.000 volts, pour lesquelles la longueur d'onde de de Broglie n'est plus que de 0,023 angström (1).

Ces longueurs d'onde sont de l'ordre de grandeur de celles des rayons X, et les phénomènes de diffraction sont du même type que ceux que l'on observe avec les rayons X : c'est ainsi qu'on a pu montrer la réflexion sélective des électrons sur les plans réticulaires d'un cristal de fer ou de nickel en employant un dispositif semblable à celui que nous avons décrit au paragraphe 389, la

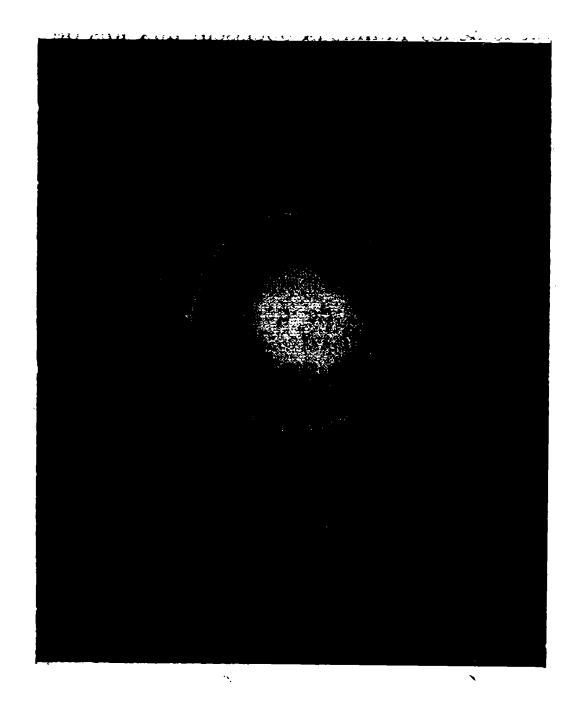


FIG. 471.

chambre d'ionisation étant remplacée par un cylindre de Faraday qui reçoit les électrons. Si le faisceau d'électrons traverse une poudre cristalline, ou une pellicule métallique qui contient toujours une grande quantité de petits cristaux orientés dans toutes les directions, il donne sur une plaque photographique des anneaux de diffraction analogues à ceux que donnent les rayons X dans la méthode des poudres (§ 390): la figure 471 représente un diagramme ainsi obtenu. On a également pu observer la diffraction sous l'incidence rasante par un réseau optique (§ 387). Dans tous les cas, *la longueur d'onde que l'on peut déduire des mesures est bien celle que fournit la relation de de Broglie,*

(1) Pour calculer la longueur d'onde des ondes associées aux électrons rapides, il est nécessaire de tenir compte, suivant la Mécanique de la Relativité, de la variation de la masse de l'électron avec sa vitesse (§ 350).

avec toute la précision des expériences, qui atteint dans certains cas 3/1000 : *l'expérience montre de la façon la plus certaine que les électrons se diffractent comme des trains d'ondes, suivant la théorie de de Broglie.* Ajoutons que les faisceaux d'électrons diffractés sont extraordinaireme[illegible] intenses, au point qu'on peut dans certains cas voir les figures de diffracti[illegible] ur un écran fluorescent au sulfure de zinc, et que cette grande intensité rend quelquefois leur emploi plus commode que celui des rayons X pour les études de structure cristalline (§ 390).

Des phénomènes de diffraction ont également été observés en recevant sur la face de clivage d'un cristal de sel gemm[illegible] des jets d'atomes d'hélium, de néon, d'argon, obtenus simplement en laissant sortir dans le vide par un mince orifice les atomes du gaz que contient un récipient chauffé dans un four : la vitesse est ici la vitesse d'agitation thermique, et, à 600°C., va de $2{,}3.10^5$ cm/sec pour l'hélium à $0{,}73.10^5$ cm/sec pour l'argon ; les longueurs d'onde correspondantes, $\lambda = h/mv$, vont de 0,43 angström pour l'hélium à 0,13 angström pour l'argon ; les expériences de diffraction, d'ailleurs peu précises, fournissent bien des longueurs d'onde de cet ordre On a aussi observé les anneaux de diffraction produits lorsqu'une mince feuille d'or est traversée par un faisceau de protons rapides (ions H^+), lancés par une différence de potentiel de 200.000 volts : la longueur d'onde de de Broglie est ici de 0,00064 angström, et coïncide à 1 ou 2 pour 100 près avec la valeur expérimentale que fournit la mesure des diamètres des anneaux.

Il n'est donc pas douteux que, toutes les fois que des corpuscules matériels quelconques sont déviés par leurs chocs contre les atomes d'une substance diffringente, les lois de leur mouvement sont celles de la Mécanique ondulatoire. De même, il est certain que la *Mécanique ondulatoire doit être appliquée à l'étude des mouvements des électrons à l'intérieur de l'atome.* Les postulats de la théorie de Bohr, tels que nous les avons indiqués au paragraphe 417, sont contradictoires entre eux, puisqu'ils supposent à la fois l'application de la Mécanique newtonienne au calcul des orbites, et le choix de ces orbites par des conditions de quanta : rien ne nous permet de comprendre la signification mécanique de telles conditions. Leur interprétation physique devient au contraire évidente si nous assimilons le mouvement de l'électron sur son orbite à la propagation d'une onde le long de cette orbite. Nous connaissons depuis longtemps des sytèmes à l'intérieur desquels existe un régime permanent de propagation d'ondes ; ce sont par exemple les tuyaux sonores ou les oscillateurs électriques (§ 333) : ils sont le siège d'ondes stationnaires dont la fréquence peut prendre une série discontinue de valeurs. *L'atome constitue un système analogue dans lequel s'établissent des ondes stationnaires, et les orbites des électrons sont les trajectoires associées à ces ondes* : on comprend ainsi pourquoi les caractéristiques de ces orbites ne peuvent prendre qu'une suite discontinue de valeurs, correspondant chacune à une valeur entière d'un cer[illegible] paramètre.

Le calcul montre que les conditions auxquelles doit satisfaire une orbite pour correspondre à des ondes stationnaires sont précisément les conditions de quanta qu'avait introduites Bohr : *la Mécanique ondulatoire fournit toutes les conditions de quanta que l'on avait été conduit à écrire, dans le cas le plus général, pour interpréter l'émission des raies spectrales et le phénomène de Zeeman.* La Mécanique ondulatoire réalise même un progrès important sur les théories

qui l'avaient précédée, en montrant que la forme des conditions de quanta qu'elles avaient proposées n'était qu'une première approximation, valable en même temps que les lois de l'Optique géométrique ; elle a permis, dans certains des cas où cette approximation n'est plus valable, d'écrire plus complètement les conditions de stabilité des orbites (Schrödinger), et de retrouver théoriquement des corrections aux anciennes formules, telles que l'introduction de demi-quanta, que l'on avait été obligé de faire empiriquement pour représenter par ces formules les faits expérimentaux.

III. — *LA STRUCTURE DE LA MOLÉCULE*

420. Les théories de la liaison chimique. — Nous avons indiqué au paragraphe 416 comment une molécule de NaCl était formée par l'association d'un ion Na^+ et d'un ion Cl^-, liés l'un à l'autre par les forces de Coulomb habituelles d'attraction électrostatique, et comment cette théorie de la liaison chimique (théorie de Kossel, 1916) pouvait être étendue à un certain nombre de molécules. Mais on ne peut interpréter ainsi la liaison chimique que dans une molécule dont les atomes portent des charges de signes contraires, c'est-à-dire dans le cas de la *liaison hétéropolaire*. La théorie de Kossel ne nous donne pas l'interprétation des *liaisons homopolaires*, c'est-à-dire des liaisons entre atomes neutres, telles que celles qui unissent les atomes d'une molécule organique ou celle qui unit entre eux les deux atomes identiques d'une molécule d'hydrogène H^2.

La première tentative d'interprétation dans les théories modernes de la liaison homopolaire est due à Lewis (1923). Il admet que la liaison s'effectue par un groupe de deux électrons — une *paire d'électrons* — qui appartient à la fois aux deux atomes : deux atomes d'hydrogène mettent en commun leurs deux électrons pour constituer une molécule où ils sont liés par cette paire d'électrons. Un atome de carbone possède quatre électrons de valence, un atome de chlore en possède sept ; un atome de carbone et quatre atomes de chlore peuvent former quatre paires d'électrons de liaison, provenant chacune de la mise en commun d'un électron de l'atome de carbone et d'un électron d'un atome de chlore, et donner ainsi la molécule CCl^4 : comme dans la théorie de Kossel, chaque atome est alors entouré d'une couche complète de 8 électrons. C'est ce que représentent, pour la molécule CCl^4 et la molécule d'éthane C^2H^6, les schémas suivants, où les points représentent les électrons de valence

```
      ..
    : Cl :                 H   H
      ..  ..               ..  ..
 Cl : C : Cl :         H : C : C : H
      ..  ..               ..  ..
    : Cl :                 H   H
      ..
```

La théorie de l'*octet de Lewis* représente bien la plupart des faits de la Chimie organique, surtout si on la complète par l'hypothèse que les quatre paires d'électrons de liaison de l'atome de carbone se disposent aux sommets d'un tétraèdre régulier. Mais elle ne donne aucune explication sur le mécanisme même des forces de liaison.

Ce mécanisme ne peut être interprété que si l'on décrit les mouvements des

électrons par les équations de la Mécanique ondulatoire : l'explication de la liaison homopolaire a été donnée pour la première fois par Heitler et London en 1927 pour la molécule d'hydrogène. Le fait essentiel est que, dans le calcul de l'énergie mutuelle des deux atomes d'hydrogène, on voit apparaître, en plus de l'énergie de Coulomb qui correspond aux forces électrostatiques classiques, une autre énergie, dite *énergie d'échange*, liée aux mouvements des électrons. D'après les principes des théories quantiques (*Cours d'Optique*, §§ 398 et 399), les spins des deux électrons doivent être parallèles ou opposés : s'ils sont parallèles, l'énergie d'échange correspond toujours à des forces répulsives, il ne peut pas y avoir formation d'une molécule ; mais s'ils sont opposés, l'énergie mutuelle présente un minimum pour une distance des noyaux égale à 0,72 angström, la configuration correspondant à cette distance est une configuration stable, c'est celle de la molécule d'hydrogène : le calcul indique que, pour séparer les deux atomes qui se trouvent dans cette configuration, il faudrait dépenser un travail de 4,37 électrons-volts. L'étude du spectre de la molécule d'hydrogène donne pour la distance de ses atomes 0,76 A, et pour son potentiel de dissociation 4,4 volts : on voit que la théorie rend parfaitement compte des résultats expérimentaux.

Pour des molécules plus compliquées que celle d'hydrogène, la théorie est beaucoup moins avancée ; elle n'en a pas moins déjà fourni des résultats intéressants. Pour un atome d'oxygène par exemple, les électrons qui interviennent dans les liaisons sont des électrons *p* (*Cours d'Optique*, § 423) et l'on doit tenir compte de leur moment orbital : on trouve que la liaison avec les électrons *s* de deux atomes d'hydrogène n'est possible que si les trois noyaux H, O et H ne sont pas en ligne droite. On a pu montrer de même que la liaison d'un atome C avec quatre atomes H n'est possible que si ces quatre atomes ne sont pas dans un même plan, que les quatre atomes H de l'éthylène C^2H^4 sont dans un même plan, que les six atomes C du noyau benzénique sont dans un même plan : tous ces résultats sont d'accord avec ceux que fournissent les méthodes expérimentales d'étude dont nous allons parler maintenant.

420 *bis*. — **La disposition des noyaux dans la molécule.** — Nous avons dit (§ 390) que, lorsqu'on fait tomber un faisceau de rayons X sur une poudre cristalline, on obtient des phénomènes de diffraction qui permettent de mesurer les distances qui séparent les atomes dans le réseau cristallin. Si l'on fait diffracter le faisceau de rayons X par un gaz, il ne peut plus y avoir interférence entre les vibrations diffractées par les différentes molécules, parce que les distances intermoléculaires ne présentent aucune régularité, mais on peut observer des interférences entre les vibrations diffractées par les différents atomes d'une même molécule, et on peut en déduire les valeurs des distances de ces atomes. Les calculs sont d'ailleurs assez compliqués : dans la pratique, on calcule, pour les différents modèles de structure de la molécule qui paraissent possibles, la façon dont l'intensité diffractée doit varier avec l'angle de diffraction 2θ (§ 390), et la comparaison avec l'expérience permet de choisir le modèle qui correspond à la réalité.

La diffraction des rayons X a d'ailleurs lieu surtout sur les électrons, et il est préférable de remplacer le faisceau de rayons X par un faisceau d'électrons. Nous avons vu (§ 419 *bis*) qu'un tel faisceau donne lieu aux mêmes phénomènes

de diffraction qu'un faisceau de rayons X ; mais la diffraction a lieu surtout sur les noyaux atomiques, et la diffraction des électrons est par suite mieux appropriée que celle des rayons X à la détermination des positions de ces noyaux. Un certain nombre de résultats ont déjà été obtenus par cette méthode : nous n'en citerons que quelques-uns.

La molécule CO^2 du gaz carbonique est linéaire : les trois noyaux y sont disposés en ligne droite, la distance de l'atome central C à chacun des deux atomes O étant 1,13 angström. La molécule CS^2 a la même forme avec une distance C-S de 1,5 angström.

La molécule PCl^3 a la forme d'une pyramide, les distances P-Cl étant égales à 2,04 A et les distances Cl-Cl à 3,18 A. Dans la molécule PCl^5 (*fig.* 472), les cinq atomes Cl sont aux sommets de deux pyramides triangulaires accolées par leur base, qui est un triangle équilatéral ; l'atome P est au centre de ce triangle, sa distance aux atomes Cl qui en occupent les sommets est 2,05 A, sa distance aux deux autres atomes Cl est de 10 à 20 % plus grande.

Dans la molécule CCl^4, on trouve que la distance de deux atomes de chlore

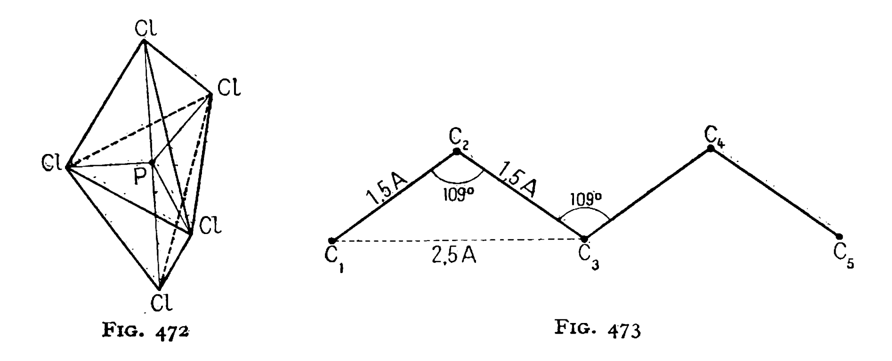


FIG. 472 FIG. 473

est 2,98 ansgtröms ; dans la molécule CH^2Cl^2, elle devient 3,16 A. Pour CCl^4, les anneaux d'interférences sont très nets, parce que toutes les distances Cl-Cl sont égales : les quatre atomes de chlore sont aux sommets d'un tétraèdre régulier, dont l'atome de carbone occupe le centre, et l'angle de deux valences du carbone est de 109° ; dans CH^2Cl^2, les forces de répulsion qui s'exercent entre les deux noyaux Cl produisent une déformation de l'angle de valence, qui s'ouvre d'environ 10°.

Les molécules de propane, de pentane, d'hexane, donnent des anneaux de diffraction correspondant à des distances de 1,5 et 2,5 A : ce sont (*fig.* 473) les distances C_1 C_2 de deux atomes de carbone voisins et C_1C_3 de deux atomes liés à un même atome C_2 avec un angle de valence de 109°. On n'observe pas d'interférences correspondant à des atomes tels que C_1,C_4, parce que, suivant le ***principe de la liaison mobile***, la partie C_3C_4 de la molécule peut tourner librement autour de la direction de la liaison C_2C_3 de sorte que la distance C_1C_4 est constamment variable.

De même, une molécule telle que CH^2Cl-CH^2-CH^2-CH^2-CH^2Cl ne donne aucun phénomène d'interférences correspondant aux deux atomes de chlore, parce que leur distance varie constamment à cause de la mobilité de la chaîne.

Dans la molécule de dichloréthane $CH^2CL\text{-}CH^2CL$, où les deux atomes de chlore sont beaucoup plus rapprochés, les forces de répulsion qui s'exercent entre eux empêchent au contraire la libre rotation : la molécule n'est pas rigide, mais les rotations des deux tétraèdres autour de la valence qui les lie correspondent seulement à des oscillations autour de la position trans, qui est la plus stable.

On voit, par ces quelques exemples, l'intérêt que présentent les déterminations de structure des molécules par la diffraction électronique : on peut dire que, dans l'ensemble, elles viennent confirmer et préciser, notamment en ce qui concerne la mobilité interne de la molécule, les hypothèses stéréochimiques généralement admises.

420 *ter*. — Les moments électriques et les polarisabilités des molécules. — Une molécule est constituée par un assemblage de charges positives et de charges négatives. Pour un certain nombre de molécules, dites ***molécules non polaires***, le centre de gravité des charges positives coïncide avec celui des charges négatives, et la molécule n'acquiert un moment électrique μ_1 — ***moment induit*** — que lorsqu'elle est soumise à un champ électrique extérieur E : c'est par l'existence de ce moment induit $\mu_1 = \alpha E$ que nous avons interprété (§ 208) la polarisation des diélectriques ; le coefficient de proportionnalité α représente la ***polarisabilité*** de la molécule. Le phénomène ne dépend pas de la température, et il en résulte que, lorsque la température varie, les variations de la constante diélectrique ε sont liées à celles de la densité ρ par la formule de Clausius-Mosotti (cf. *Cours d'Optique*, § 235).

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{\rho} = C^{te}.$$

Mais il existe d'autres molécules, dites ***molécules polaires***, dans lesquelles les centres de gravité des charges positives et négatives ne coïncident pas : en l'absence de tout champ extérieur, elles possèdent déjà un moment électrique μ_0 — ***moment permanent***. L'action d'un champ électrique extérieur tend alors à orienter les molécules, par un mécanisme analogue à celui dont nous avons parlé à propos du paramagnétisme (§ 353) ; à cause de l'agitation thermique, l'orientation produite est d'autant plus petite que la température est plus élevée, et la formule de Clausius-Mosotti doit être remplacée par la ***formule de Debye***, qui s'écrit, en appelant M la masse moléculaire, N le nombre d'Avogadro et k la constante de Boltzmann (*Cours de Thermodynamique*, §§ 171 et 173).

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi N}{3} \left(\alpha + \frac{\mu_0^2}{3kT}\right).$$

La mesure de la constante diélectrique à différentes températures permet de calculer par cette formule le moment permanent μ_0. Les moments trouvés sont le plus souvent de l'ordre de 1 à 5.10^{-18} u. é. s. : c'est le moment qu'auraient l'ensemble de deux charges élémentaires $\pm$ 4,8. 10^{-10} u. é. s. séparées par une distance de 0,2 à 1 angström (0,2 à 1.10^{-8} cm).

L'existence d'un moment permanent est liée à l'existence d'une dissymétrie dans la molécule : c'est ainsi que les molécules diatomiques à deux atomes identiques, telles que O^2, Cl^2, ou des molécules à symétrie tétraédrique telles que CCl^4 n'ont pas de moment permanent, tandis que des molécules certaine-

ment dissymétriques comme CO, HCl, C^2H^5OH, sont des molécules polaires.

Réciproquement, le fait que la molécule CO^2 n'a pas de moment permanent indique qu'elle a la structure rectiligne et symétrique O-C-O, tandis que l'existence d'un moment permanent pour la molécule d'eau indique qu'elle a certainement une structure coudée ; de même le fait que le benzène n'est pas polaire confirme la structure symétrique plane de sa molécule, le fait que la molécule NH^3 est polaire indique qu'elle n'est pas plane, mais a la forme d'une pyramide triangulaire dont l'atome N occupe le sommet.

Pour les molécules plus compliquées de la Chimie organique, l'intérêt de la mesure du moment permanent vient de ce que l'on peut attacher à chaque liaison telle que C-H, C-OH, C-Cl, etc., un moment partiel caractéristique de cette liaison. Ces moments partiels sont des vecteurs : la vérification de l'égalité du moment mesuré pour la molécule et de la somme géométrique des moments partiels vérifie les hypothèses faites sur la disposition stéréochimique des diverses liaisons. Elle permet également de décider s'il y a libre rotation d'une partie de la molécule par rapport à une autre ; décomposons en effet le moment de la partie mobile en une composante parallèle à l'axe de rotation et une composante perpendiculaire à cet axe : si toutes les orientations sont également possibles, cette dernière composante donnera une contribution nulle au moment moyen de la molécule.

420 *quater*. — L'étude optique de la structure de la molécule. — Une molécule présente toujours une certaine dissymétrie, et la polarisabilité α que nous avons définie au paragraphe précédent dépend en réalité de l'orientation du champ E par rapport à la molécule. En général, le moment $\vec{\mu}_1$ induit par le champ $\vec{E}$ n'est pas parallèle au champ, et le lieu des extrémités des vecteurs $\vec{\mu}_1$ correspondant à des champs d'intensité $E = 1$ ayant toutes les orientations possibles est un ellipsoïde à trois axes inégaux, *l'ellipsoïde des polarisabilités*. La symétrie de cet ellipsoïde est naturellement liée à celle de la molécule : pour une molécule à symétrie tétraédrique comme CH^4 ou CCl^4, il se réduit à une sphère ; pour une molécule linéaire comme CO^2 ou C^2H^2, il est de révolution.

On conçoit donc que la détermination de l'ellipsoïde des polarisabilités est susceptible de fournir des renseignements sur l'anisotropie de la molécule. Or l'anisotropie de cet ellipsoïde est mise en évidence, et peut être mesurée, par deux phénomènes pour la description desquels nous renverrons aux Cours d'optique : la dépolarisation de la lumière diffusée par les molécules de la substance à étudier (*Cours d'Optique*, § 169) et la biréfringence électrique, ou phénomène de Kerr, due aux actions d'orientation du champ électrique $\vec{E}$ sur le moment $\vec{\mu}_1$ (*Cours d'Optique*, § 329).

Nous renverrons également aux cours d'optique pour l'étude spectroscopique des structures moléculaires. L'étude des spectres de bandes (*Cours d'Optique*, §§ 407 à 412 *bis*) fournit avec beaucoup de précision les valeurs des moments d'inertie principaux des molécules, et par conséquent les distances qui y séparent les atomes, puisque leurs masses sont bien connues. L'étude des spectres infra-rouges et des spectres Raman (*Cours d'Optique*, §§ 476 et 477) permet de dénombrer les vibrations propres des molécules, et, grâce aux règles de sélection qui régissent la production des raies, de reconnaître si les déformations

qui leur correspondent s'accompagnent de variations du moment électrique ou de l'ellipsoïde des polarisabilités. On obtient ainsi de nouveaux renseignements sur les structures et les caractères de symétrie des molécules, et on obtient de plus les valeurs des fréquences des vibrations propres. Ces fréquences seraient calculables si l'on connaissait les forces mises en jeu par les déformations de la molécule : les données précises qu'elles constituent seront par suite extrêmement précieuses pour le développement des théories des forces intramoléculaires dont nous avons dit quelques mots au paragraphe 420.

IV. — *LES TRANSMUTATIONS ATOMIQUES ET LA STRUCTURE DU NOYAU*

421. Transmutations par les rayons α avec émission de protons. — Nous avons vu au paragraphe 414 que des rayons α traversant une atmosphère d'hydrogène ou une pellicule de paraffine sont susceptibles de projeter avec une grande vitesse des noyaux atomiques d'hydrogène; ces particules H^+, ou *protons* (§ 414), forment les rayons H : ils sont tous dirigés vers l'avant du faisceau de rayons α, et leur parcours maximum dans l'air, avec les rayons α du radium C′, est de 28 centimètres.

Rutherford a découvert en 1919 que des rayons H peuvent également être produits par le choc des particules α du radium C′ sur des atomes d'azote ou d'aluminium. Il s'agit bien de rayons H, constitués par des protons, comme le montre la mesure des déviations électrique et magnétique; il ne s'agit pas de rayons H naturels, dus à la présence d'atomes d'hydrogène existant dans l'azote ou l'aluminium à l'état d'impuretés, car les scintillations peuvent s'observer à des distances supérieures à celles que peuvent atteindre les rayons H naturels : on obtient des parcours dans l'air de 40 centimètres avec l'azote, de 90 centimètres avec l'aluminium; dans ce dernier cas, l'énergie du rayon H est supérieure de 40 pour 100 à celle du rayon α qui l'a produit. D'autre part, les rayons H naturels sont tous dirigés vers l'avant, tandis que ceux de l'azote ou de l'aluminium sont émis dans toutes les directions, le parcours de ceux qui sont dirigés vers l'arrière étant d'ailleurs inférieur au parcours de ceux qui sont dirigés vers l'avant (67 cm au lieu de 90 pour Al, 18 au lieu de 40 pour N).

Ces expériences ne peuvent être interprétées qu'en admettant que *le choc de la particule α provoque l'explosion du noyau de l'atome N ou Al, avec expulsion d'un proton dont l'énergie cinétique peut être supérieure à celle de la particule α incidente, c'est-à-dire avec dégagement d'énergie.* Le phénomène observé par Rutherford est une transformation du noyau atomique, avec mise en liberté d'énergie intranucléaire, et production d'un nouvel élément chimique, l'hydrogène. Le rendement de la désintégration est d'ailleurs très faible : on observe 10 à 20 rayons H pour 10^6 rayons α. Il faudrait faire agir pendant un an sur une lame d'aluminium les rayons α produits par 1 gramme de radium pour obtenir 1/1000 de millimètre cube d'hydrogène; mais la faiblesse de ce rendement ne diminue en rien l'intérêt théorique de la transmutation, d'autant

que cette transmutation paraît un phénomène assez général, puisqu'elle a été observée avec tous les éléments du tableau périodique, du bore (N = 5), jusqu'au potassium (N = 19).

On a pu, dans le cas de l'azote, photographier le phénomène par la méthode de C. T. R. Wilson (§ 401) : en faisant un nombre suffisant de clichés, on finit par en obtenir sur lesquels une trajectoire d'une particule α se termine par une *fourche anormale* ne satisfaisant pas aux lois du choc élastique, telle que celle que l'on voit sur la gauche du faisceau de la figure 474. Le rayon fin est le proton rapide expulsé du noyau d'azote, l'autre branche de la fourche indique



Fig. 474.

le trajet de ce dernier noyau après le choc. On remarquera qu'il n'y a pas de trace d'une trajectoire de la particule α après le choc : on est ainsi conduit à supposer qu'elle est restée logée dans le noyau d'où elle a expulsé un proton. L'examen des parcours des rayons H dans les différentes directions semble d'ailleurs indiquer qu'il y a d'abord mise en mouvement du noyau sous le choc de la particule α qui s'y incorpore, puis explosion du système ainsi formé et projection du proton dans une direction quelconque, sans rapport avec celle du mouvement.

L'azote a une masse atomique égale à 14 et son noyau a une charge égale à 7 fois celle du proton (§ 415) ; le noyau qui a fixé une particule α, de masse 4 et de charge 2, et perdu un proton, de masse et de charge unités, a une masse 17 et une charge 8 : c'est le noyau de l'isotope O_{17} de l'oxygène. Rappelant les nombres atomiques et les masses atomiques par des indices placés à gauche des symboles chimiques, on peut représenter la transformation par l'*équation de réaction nucléaire :*

$$^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He = ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H,$$

où les sommes des indices inférieurs, ainsi que celles des indices supérieurs sont les mêmes dans les deux membres. De même les transformations de l'aluminium et du bore se représenteront par les équations :

$$^{27}_{13}\text{Al} + ^{4}_{2}\text{He} = ^{30}_{14}\text{Si} + ^{1}_{1}\text{H}, \qquad ^{10}_{5}\text{B} + ^{4}_{2}\text{He} = ^{13}_{6}\text{C} + ^{1}_{1}\text{H}.$$

On connaît la vitesse des particules α incidentes, et l'on peut déduire celle des protons projetés de la mesure de leur parcours. L'application du principe de la conservation des quantités de mouvement permet d'en déduire la vitesse de recul du noyau ; on peut alors calculer les énergies cinétiques prises par le proton et le noyau, et, en les retranchant de celle de la particule α, avoir la valeur de l'*énergie absorbée par la réaction*. Les résultats sont d'ailleurs encore assez douteux, à cause de la rareté des chocs photographiés et de l'incertitude où l'on se trouve dans les autres cas sur la perte de vitesse qu'a subie la particule α entre la source et le choc ; il semble que la transmutation de l'azote absorbe une énergie de $1{,}3 \cdot 10^6$ électrons-volts (§ 398), tandis que celle de l'aluminium peut dans certains cas produire un dégagement d'énergie de 2,3 millions d'électrons-volts.

421 *bis*. **Le neutron.** — En 1930, Bothe et Becker montrèrent qu'un certain nombre d'éléments légers, et en particulier le lithium, le béryllium et le bore, émettent un rayonnement lorsqu'on les bombarde par les rayons α du polonium : ce rayonnement, capable de traverser plusieurs centimètres de plomb, est plus pénétrant que tous les rayonnements précédemment connus. Bothe et Becker supposèrent qu'il était constitué par des rayons γ de fréquence très élevée, et, d'après les formules relatives à l'absorption des rayons γ (§ 418), lui attribuèrent un quantum $h\nu$ de $14 \cdot 10^6$ électrons-volts pour les radiations du béryllium et 10^6 pour celles du bore.

Reprenant les expériences et employant la chambre de Wilson, Irène Curie et Joliot constatèrent que les nouveaux rayons n'ont pas une trajectoire ionisante, mais qu'ils sont susceptibles de projeter avec de grandes vitesses, lorsqu'ils les rencontrent, des noyaux d'hydrogène, ainsi que des noyaux, plus lourds, d'hélium, d'azote, ou même d'argon. De telles projections n'ont jamais été observées avec des rayons γ : on pourrait les interpréter comme un phénomène analogue à l'effet Compton, produit par le choc d'un photon (§ 418) sur le noyau projeté : mais pour rendre compte ainsi des parcours observés pour ces noyaux — 28 centimètres pour les protons projetés par le rayonnement du béryllium, ce qui correspond à une énergie de $4{,}6 \cdot 10^6$ électrons-volts — il faudrait admettre pour le quantum $h\nu$ une valeur de $50 \cdot 10^6$ électrons-volts tout à fait incompatible avec la valeur déduite des expériences d'absorption.

Les difficultés disparaissent si l'on admet, comme l'a proposé Chadwick, que *le rayonnement nouveau est un rayonnement corpusculaire, constitué par des* **neutrons,** *corpuscules de masse approximativement égale à celle de l'atome d'hydrogène et ne portant aucune charge.* Dans le choc direct d'un neutron sur un proton, les deux corpuscules échangent leurs vitesses : la vitesse des neutrons est celle des protons projetés les plus rapides, elle est de l'ordre de $3 \cdot 10^9$ cm/sec pour les neutrons du béryllium, ce qui correspond à une énergie de $4{,}5 \cdot 10^6$

électrons-volts. L'absence d'ionisation le long des trajectoires des neutrons et leur faible absorption par la matière s'interprètent aisément : des rayons corpusculaires ionisent les atomes dont ils traversent le système d'orbites électroniques, et en même temps sont ralentis, par l'action des forces électrostatiques qui s'exercent entre les corpuscules qui les constituent et les électrons liés des atomes ; pour les neutrons, non chargés, ces forces n'existent pas, et *l'absorption ne peut résulter que des chocs, tout à fait exceptionnels, des corpuscules sur les noyaux.* Ces chocs sont d'autant plus nombreux que la substance traversée contient plus d'atomes : on explique ainsi le fait que, à égalité de masse traversée, un écran de paraffine absorbe trois fois plus les neutrons qu'un écran de cuivre et qu'un écran de plomb les absorbe encore moins qu'un écran de cuivre.

Les réactions de désintégration qui accompagnent l'émission de neutrons sous l'action des rayons α du polonium peuvent se traduire par des équations semblables à celles que nous avons écrites à la fin du paragraphe précédent. En désignant le neutron par n, on écrira par exemple :

$$ {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} = {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}n, \qquad {}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} = {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}n. $$

L'évaluation de l'énergie mise en jeu dans ces réactions paraît difficile, car les rayonnements observés sont en réalité complexes. Le béryllium bombardé par les rayons α émet certainement des neutrons de vitesses différentes, correspondant peut-être à des transmutations de types différents ; il émet en même temps des rayons γ, beaucoup moins pénétrants que les neutrons, puisqu'ils sont à peu près complètement absorbés par une épaisseur de 25 millimètres de plomb. Ces rayons γ se manifestent, lorsqu'on admet dans la chambre de Wilson le rayonnement du béryllium sans l'avoir filtré par une épaisseur suffisante de plomb, par l'existence de trajectoires d'électrons projetés par effet Compton ; si l'on opère dans un champ magnétique, ces trajectoires sont courbes, et la mesure de leur courbure permet de calculer la vitesse des électrons et par suite le quantum d'énergie $h\nu$ des rayons γ qui les ont projetés : on trouve ainsi une valeur de $4{,}8 \cdot 10^6$ électrons-volts.

On admet généralement aujourd'hui que l'émission d'un neutron rapide est associée à la formation de l'atome, produit de la transmutation, dans son état normal ; au contraire l'émission d'un neutron lent fournit cet atome dans un état excité, et c'est lors de son retour à l'état normal que sont émis les rayons γ (§ 404). Une telle hypothèse permet de calculer la somme des énergies (énergie cinétique du neutron, énergie cinétique de recul de l'atome, énergie $h\nu$ du rayon γ) disponibles après le choc, et, en en retranchant l'énergie cinétique de la particule α incidente, de calculer l'énergie libérée dans la réaction.

Dans la transmutation du béryllium, on trouve que cette énergie est de $6{,}1 \cdot 10^6$ électrons-volts. Dans les idées modernes (§ 418), une énergie W possède une masse W/c^2 ; si l'on considère l'ensemble des électrons transportant une charge égale à la charge 96.500 coulombs d'un atome-gramme et ayant une vitesse correspondant à une chute de potentiel de 10^6 volts, leur énergie cinétique totale est $96.500 \cdot 10^6 = 9{,}65 \cdot 10^{10}$ joules $= 9{,}65 \cdot 10^{17}$ ergs, et la masse de cette énergie est $9{,}65 \cdot 10^{17}/9 \cdot 10^{20} = 0{,}00107$ gramme. Dans la transformation du béryllium, la mise en liberté de l'énergie $6{,}1 \cdot 10^6$ électrons-volts doit s'accom-

pagner, par atome-gramme, d'une perte de masse 6,1 × 0,00107 = 0,0065 gramme; les mesures au spectrographe de masse donnant ^{9}Be = 9,0150, ^{4}He = 4,0039, ^{12}C = 12,0039, on en déduit que la **masse du neutron** doit être :

$$n = 9{,}0150 + 4{,}0039 - 12{,}0039 - 0{,}0065 = 1{,}0085.$$

En admettant cette valeur, et en prenant ^{11}B = 11,0129 et ^{14}N = 14,0075, on trouve pour la perte de masse dans la réaction de transmutation du bore 11,0129 + 4,0039 — 14,0075 — 1,0085 = 0,0008, correspondant à environ 750.000 électrons-volts : il semble bien en effet que l'énergie des neutrons projetés soit du même ordre de grandeur que celle des particules α incidentes. On voit que la considération des pertes de masse est extrêmement précieuse pour vérifier les hypothèses faites sur la nature des transmutations.

Nous avons déjà dit que l'on avait observé dans la chambre de Wilson la projection de noyaux d'azote par le choc des neutrons : l'étude de ce phénomène a montré que l'on observait assez souvent des *fourches anormales* (§ 421); par exemple, dans une série d'expériences de Feather, sur 1.460 clichés, 105 montrent des trajectoires de noyaux projetés, et 32 des fourches que l'on doit interpréter comme mettant en évidence une ***désintégration de l'atome d'azote par le choc d'un neutron avec expulsion d'une particule α***. Il semble que le phénomène puisse être représenté par la réaction :

$$^{14}_{7}N + ^{1}_{0}n = ^{11}_{5}B + ^{4}_{2}He,$$

exactement inverse de la réaction de production des neutrons par le choc des particules α sur le bore.

Les transmutations de ce type, donnant naissance à des noyaux stables, sont peu nombreuses; mais nous verrons plus loin (§ 422 *bis*) que les neutrons sont susceptibles de produire de très nombreuses transmutations donnant naissance à des noyaux instables.

421 *ter*. Transmutations produites par des rayons positifs artificiels. — Les transmutations que nous venons d'étudier sont produites par les rayons α des substances radioactives; nous avons déjà fait remarquer quel était le faible rendement de ces transmutations : avec l'azote (§ 421), le rendement est de 10 à 20 rayons H pour 10^6 rayons α; avec le béryllium, on a une trentaine de neutrons pour 10^6 rayons α du polonium. Ces deux cas sont parmi les plus favorables; on en connaît d'autres pour lesquels les rendements sont par exemple 50 fois plus petits, et il est certain que les progrès de leur étude et la découverte de nouvelles transmutations sont liés à la production de faisceaux de rayons corpusculaires plus intenses que ceux que fournissent les substances radioactives. Les sources radioactives les plus intenses qu'on ait préparées jusqu'ici émettent un nombre de particules α de l'ordre de 10^9 par seconde, transportant un courant (§ 400) de l'ordre de $3 . 10^{-10}$ ampère; il n'y a par contre aucune difficulté à obtenir des faisceaux de rayons positifs d'ions He^+ (§ 380) transportant plusieurs microampères : on a réalisé des faisceaux transportant 30 microampères, et on est arrivé à les accélérer par des différences de potentiel dépassant un million de volts. Ces rayons sont identiques aux rayons α des substances radioactives, et on a observé la production de neutrons par leur action sur le béryllium. Bien que la chute de potentiel d'un million de

volts soit encore insuffisante, et que le rendement de transmutation soit plus faible pour ces rayons que pour ceux du polonium, leur intensité est tellement supérieure que la source de neutrons ainsi obtenue est beaucoup plus intense que les sources réalisées à partir de substances radioactives.

Les premières transmutations produites par des rayons positifs artificiels n'ont d'ailleurs pas été obtenues avec des ions He^+, mais avec des protons H^+. C'est en 1932 que Cockroft et Walton, *ayant produit des rayons positifs d'hydrogène sous une différence de potentiel allant jusqu'à 700 kilovolts, ont pu obtenir la désintégration d'une quinzaine d'éléments, avec production de particules* α. C'est ainsi qu'avec le lithium et le bore ils obtiennent des désintégrations qu'ils représentent par les équations :

$$^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}H = ^{4}_{2}He + ^{4}_{2}He, \qquad ^{11}_{5}B + ^{1}_{1}H = 3\,^{4}_{2}He.$$

Les particules α éjectées sont observées, à 90° du faisceau de protons incidents, par les scintillations qu'elles produisent sur un écran au sulfure de zinc; on peut aussi les recevoir dans une chambre d'ionisation. Dans le cas du lithium, on a pu enregistrer la transmutation dans la chambre de Wilson, et constater qu'il y avait effectivement émission de deux particules α, ces deux particules étant projetées dans des directions à peu près opposées : c'est bien ce qu'indique le principe de la conservation de la quantité de mouvement, la vitesse du proton incident étant petite par rapport à celle des particules α. Ces particules ont en effet un parcours dans l'air de $8^{cm},4$, correspondant (§ 398) à une vitesse de 20.500 km/sec et une énergie de $8,6 \,.\, 10^6$ électrons-volts : l'énergie mise en liberté dans la réaction est donc d'environ 17,2 millions d'électrons-volts, correspondant à une perte de masse égale à $0^g,018$ par atome-gramme; avec $^7Li = 7,018$, $^1H = 1,008$, $^4He = 4,004$, l'équation de transmutation donne une perte de masse de 0,018 : on voit que l'accord est excellent.

Mais le fait le plus remarquable de ces expériences est qu'*on observe encore des désintégrations par le choc de protons relativement lents, lancés par des différences de potentiel inférieures à 100 kilovolts :* on en a observé jusqu'à 20 kilovolts, c'est-à-dire qu'on a observé des chocs dans lesquels une énergie incidente de 20 000 électrons-volts peut libérer une énergie de 17 millions d'électrons-volts, plus de 800 fois plus grande. Mais il faut remarquer que cela ne signifie pas que nous soyons capables de puiser utilement de l'énergie à la source extrêmement puissante que constitue l'énergie intra-atomique : le rendement de la transmutation est beaucoup trop faible. Ce rendement croît d'ailleurs constamment lorsque le voltage accélérateur des protons croît de 20 à 1200 kilovolts, passant par exemple de 1 à 10 lorsque l'on passe de 250 à 500 kilovolts; pour 500 kilovolts, il est de l'ordre d'une désintégration pour 10^7 protons incidents, de sorte que bien que l'énergie mise en liberté dans une désintégration soit alors 35 fois celle du choc qui l'a provoquée, *elle n'est encore que* 1/300.000 *de celle qu'il a fallu dépenser pour produire le faisceau de protons.*

Avec le lithium, l'émission de particules α s'accompagne d'une faible émission de neutrons, qu'on peut caractériser par le fait que le courant produit dans une chambre d'ionisation est augmenté par l'interposition d'un écran de paraffine : l'ionisation de l'air de la chambre n'est en effet pas produite directement par les neutrons, mais par les noyaux atomiques que projettent leurs chocs, et ce phénomène est plus important pour les atomes d'hydrogène

de la paraffine que pour les atomes plus lourds de l'air. On peut rendre compte de cette émission de neutrons en admettant qu'une sur 5.000 des particules α de 8,6 . 10^6 électrons-volts produites par l'action directe des protons sur le lithium produit la désintégration d'un autre atome de lithium avec émission d'un neutron : c'est le phénomène déjà observé par Bothe et Becker, comme nous l'avons indiqué au début du paragraphe précédent, et représenté par l'équation :

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{4}_{2}\mathrm{He} = ^{10}_{5}\mathrm{B} + ^{1}_{0}n.$$

Des expériences analogues ont été faites en 1933 en produisant les rayons positifs à partir d'hydrogène contenant une proportion notable de son isotope lourd; les noyaux H de masse 2, qu'on appelle des **deutons**, ont pu, dans des tubes de construction tout à fait spéciale, être soumis à des différences de potentiel accélératrices atteignant 3 millions de volts, tandis que dans d'autres tubes on a pu obtenir sous 800.000 volts des rayons positifs transportant 10 microampères. On a observé dans un certain nombre de cas la production de particules α et de neutrons, quelquefois aussi de protons. Nous nous contenterons d'écrire, en désignant le deuton par le symbole D, les équations représentant quelques-unes des transmutations observées :

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{2}_{1}\mathrm{D} = ^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{4}_{2}\mathrm{He}, \qquad ^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{2}_{1}\mathrm{D} = ^{10}_{5}\mathrm{B} + ^{1}_{0}n;$$

$$^{12}_{6}\mathrm{C} + ^{2}_{1}\mathrm{D} = ^{13}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{1}\mathrm{H}, \qquad ^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{2}_{1}\mathrm{D} = 2\,^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}n.$$

L'exemple du béryllium montre que le même élément peut donner lieu à plusieurs réactions différentes de transmutation.

La production de neutrons par l'action sur les éléments légers (Be où Li) des deutons accélérés par des potentiels de l'ordre du million de volts présente un intérêt considérable; c'est le procédé que l'on adopte généralement aujourd'hui lorsqu'on veut produire des neutrons avec une intensité notable.

Nous avons vu successivement, dans ce paragraphe et dans les précédents, des exemples de transmutations produites par le choc sur un noyau atomique des différents corpuscules matériels positifs que nous connaissons : particules α, naturelles (§ 421) ou artificielles (§ 421 *ter*), avec émission de protons (§ 421) ou de neutrons (§ 421 *bis*); protons (§ 421 *ter*), avec émission de particules α; deutons (§ 421 *ter*), avec émission de particules α, de protons et de neutrons. Dans tous les cas, on admet généralement que la particule incidente, heurtant directement le noyau atomique, y pénètre, et que sa capture provoque une explosion nucléaire, expulsant une autre particule; dans le cas du deuton pourtant, qui est composé d'un proton et d'un neutron faiblement liés, on admet quelquefois que le deuton est dissocié par le choc, un seul de ses éléments étant capturé par le noyau, de sorte que le proton ou le neutron expulsé provient en réalité du deuton.

Nous avons également donné un exemple de transmutation produite par le bombardement par des neutrons (§ 421) et nous reviendrons plus loin (§ 422 *bis*) sur les phénomènes le plus souvent observés dans ce bombardement. Signalons ici qu'on a pu, en dehors de ces transmutations produites par le choc de particules, observer dans quelques cas des réactions nucléaires provoquées par des rayons γ. La plus intéressante est la scission du deuton, irradié par des rayons γ du thorium ou du radium, en un proton et un neutron : les protons expulsés

peuvent être mis en évidence par l'ionisation intense qu'ils produisent, les neutrons par la radioactivité artificielle qu'ils peuvent provoquer (§ 422 *bis*). La désintégration ne s'observe que si les rayons γ ont un quantum d'énergie $h\nu$ au moins égal à 2,20 . 10^6 électrons-volts : c'est le travail qu'il faut dépenser pour produire la rupture du deuton, c'est l'énergie qui doit être mise en liberté dans la réaction ${}^1_1H + {}^1_0n = {}^2_1D$. La diminution de masse qui accompagne cette combinaison est donc 2,20 × 0,00107 = 0,00235 gramme par atome-gramme; les mesures au spectrographe de masse donnant H = 1,00813 et D = 2,01473, on en déduit :

$$n = 2{,}01473 + 0{,}00235 - 1{,}00813 = 1{,}00895.$$

C'est là la détermination de la masse du neutron que l'on considère aujourd'hui comme la meilleure. Les masses de H et de D étant déterminées à 1/500.000 près (§ 382) et l'énergie de liaison à 1/50 près, la cinquième décimale est tout à fait incertaine; mais il est certain que la masse du neutron, n = 1,0089, est supérieure à celle du proton, H = 1,0081.

422. L'électron positif et la matérialisation du rayonnement. — Nous avons dit (§ 370) que l'air atmosphérique est toujours, quelques précautions que l'on prenne, légèrement ionisé. On sait aujourd'hui que l'ionisation résiduelle que l'on ne peut pas faire disparaître est due à un rayonnement très pénétrant, provenant de régions de l'espace très éloignées de la Terre, qui constitue ce qu'on appelle les **rayons cosmiques.** La tendance actuelle est de considérer qu'ils sont formés, à leur entrée dans la haute atmosphère, par des corpuscules chargés extrêmement rapides, ayant une énergie qui peut atteindre et dépasser 10^{13} électrons-volts, et qu'ils produisent, dans leur passage à travers la matière, de très abondants effets secondaires, sous forme de photons et d'électrons d'énergie élevée. Il y aurait également formation, dans la haute atmosphère, de corpuscules ayant une masse de l'ordre de 200 fois celle de l'électron et portant une charge, tantôt positive et tantôt négative, vraisemblablement égale à celle de l'électron ; ces corpuscules, auxquels on a donné le nom de *mésons*, ne sont pas stables, et se désintègrent spontanément, avec une vie moyenne voisine de 1,5 . 10^{-6} seconde.

Lorsqu'on produit la détente dans une chambre de Wilson aussitôt après qu'un rayon cosmique l'a traversée, on observe généralement des trajectoires de particules ionisantes partant du métal de la chambre. Anderson, puis Blackett et Occhialini, répétant cette expérience dans un champ magnétique, ont observé en 1932 que certaines de ces trajectoires — une sur 100 clichés — qui avaient l'aspect ponctué caractéristique des trajectoires électroniques (§ 403), étaient courbées par le champ en sens inverse de celui que l'on doit attendre : il fallut admettre que *ces trajectoires étaient dues à des corpuscules ayant approximativement même masse que l'électron, mais ayant une charge positive, à des* **électrons positifs.**

Peu de temps après, en 1933, des électrons positifs furent aussi observés à la chambre de Wilson dans l'action sur le plomb du rayonnement complexe — rayons γ et neutrons — émis par le béryllium irradié par le polonium (§ 421 *bis*) et Irène Curie et Joliot montrèrent, en filtrant ce rayonnement par une lame de plomb de 2 centimètres, que *l'émission d'électrons positifs est produite par les rayons* γ ; l'émission d'électrons positifs fut d'ailleurs observée ensuite dans

l'action sur le plomb des rayons γ du radium C et du thorium C". Les électrons positifs partent du plomb irradié; ils sont accompagnés d'électrons négatifs toujours plus nombreux, produits par effet photoélectrique. Par action d'un champ magnétique convenable, on peut former un spectre magnétique de ces électrons et y sélectionner par une fente ceux qui ont une vitesse déterminée; il suffit de changer le sens du champ magnétique pour remplacer, dans le faisceau corpusculaire qui traverse la fente, les électrons positifs par des électrons négatifs. En faisant agir sur les faisceaux ainsi séparés un champ électrique, Thibaud put constater que la déviation électrostatique était la même en valeur absolue pour les électrons positifs et pour les électrons négatifs : *les valeurs du rapport* e/m *caractérisant les deux sortes d'électrons sont égales en valeur absolue et de signes contraires.*

On observe le plus souvent dans la chambre de Wilson deux trajectoires, l'une d'un électron positif et l'autre d'un électron négatif, qui semblent partir d'un même point; c'est ce que montre la figure 475, reproduction d'un cliché obtenu par I. Curie et Joliot : la trajectoire épaisse y est celle d'un proton projeté par un neutron, et l'on y distingue les deux trajectoires ponctuées courbées en sens inverses des deux électrons. On interprète aujourd'hui le phénomène en admettant que, dans le choc contre le noyau de l'atome de plomb, le photon $h\nu$ qui constitue le rayon γ a disparu, et que *le rayonnement s'est matérialisé en deux électrons,* de charge totale nulle. La quantité de mouvement $h\nu/c$ (§ 418) du photon s'est partagée entre le noyau lourd et les deux électrons; quant à l'énergie $h\nu$, une partie $2mc^2$ a formé la masse des deux électrons, le reste a fourni leur énergie cinétique, l'énergie de recul du noyau lourd étant négligeable. Le calcul, analogue à celui du paragraphe 421 *bis,* montre que l'énergie $2mc^2$ vaut à peu près un million d'électrons-volts : l'énergie cinétique des électrons, qu'il est facile d'évaluer puisque l'expérience, faite dans le champ magnétique, donne la courbure de leurs trajectoires, doit être inférieure d'un million d'électrons-volts au quantum d'énergie des rayons γ incidents. C'est bien ce que donne l'expérience : avec les rayons γ du thorium C"($h\nu = 2{,}66 . 10^6$ électrons-volts), les électrons ont chacun une énergie cinétique de 800.000 électrons-volts; avec les rayons du béryllium ($h\nu = 5 . 10^6$ élecctrons-volts), l'énergie cinétique de chaque électron est $2{,}2 . 10^6$ électrons-volts. Il ne semble donc pas douteux que l'émission de la paire d'électrons soit due à la destruction du photon; ajoutons que cette destruction ne se produit que pour les rayons γ de quantum supérieur à un million d'électrons-volts et au contact d'atomes lourds, et qu'elle semble devoir expliquer le phénomène d'absorption nucléaire signalé à la fin du paragraphe 418.

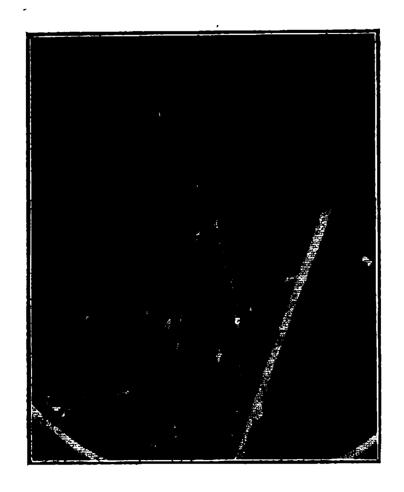


FIG. 475

Lorsqu'on reçoit un faisceau d'électrons négatifs sur un écran métallique de faible épaisseur, et qu'on place derrière cet écran une plaque photographique,

cette plaque est impressionnée par les électrons non absorbés et par les rayons X produits dans l'écran; si l'écran a une masse de l'ordre d'un gramme par centimètre carré, la plaque ne reçoit plus que ces derniers, et l'impression photographique est environ 7.500 fois plus faible que sans écran. Si l'on répète l'opération avec un faisceau d'électrons positifs donnant la même impression sans écran, on trouve qu'avec écran l'impression est 40 fois plus forte que pour les électrons négatifs : on en déduit que les électrons positifs donnent naissance, lors de leur absorption dans la matière, à un rayonnement pénétrant intense. En mesurant l'absorption de ce rayonnement dans des écrans supplémentaires qu'on interpose entre l'écran où il est produit et la plaque photographique, on peut montrer qu'il est constitué par des photons de quantum voisin de 500.000 électrons-volts : on peut alors expliquer sa production en admettant que les électrons positifs se recombinent avec les électrons négatifs de la matière traversée, l'annihilation simultanée d'un électron positif et d'un électron négatif, avec disparition de la masse $2m$, produisant deux photons d'énergie $h\nu = mc^2$. D'autres expériences, faites en enregistrant les photons de dématérialisation dans un compteur d'ionisation, conduisent aux mêmes conclusions. On comprend ainsi pourquoi on ne peut observer les électrons positifs qu'au moment même de leur production : *ils se dématérialisent, avec émission de rayonnement, dès qu'ils rencontrent en traversant la matière un électron négatif faiblement lié*, et l'on a pu estimer que, dans l'air, leur durée de vie est de 10^{-8} à 10^{-9} seconde.

422 *bis*. La radioactivité provoquée. — Les dernières expériences que nous venons de citer ont été faites en employant une source d'électrons positifs dont nous n'avons pas encore parlé, et qui est simplement formée par une feuille d'aluminium, de bore, ou de magnésium bombardée par les rayons α du polonium. On sait depuis 1919 (§ 421) que ces éléments sont désintégrés avec émission de protons; en répétant l'expérience à la chambre de Wilson dans un champ magnétique, Irène Curie et Joliot ont montré, en 1933, qu'il y avait aussi production d'électrons positifs. Tandis qu'on a 10 ou 20 protons pour 10^6 particules α, on n'a qu'un électron positif pour 2.10^6 particules α; *la réaction de transmutation serait la même, mais on aurait éjection d'un neutron et d'un électron positif*, de sorte qu'on écrirait, en désignant par ε_+ cet électron :

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\mathrm{He} = ^{30}_{14}\mathrm{Si} + ^{1}_{0}n + \varepsilon_+, \qquad ^{10}_{5}\mathrm{B} + ^{4}_{2}\mathrm{He} = ^{13}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{0}n + \varepsilon_+$$

au lieu de :

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\mathrm{He} = ^{30}_{14}\mathrm{Si} + ^{1}_{1}\mathrm{H}, \qquad ^{10}_{5}\mathrm{B} + ^{4}_{2}\mathrm{He} = ^{13}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

Lorsqu'on supprime la source de rayons α, l'émission d'électrons positifs ne cesse pas immédiatement : elle persiste un certain temps, pendant lequel elle décroît exponentiellement. *Les lames irradiées sont devenues de véritables substances radioactives*, qui émettent un rayonnement d'électrons positifs, et se détruisent avec une période (§ 406) mesurable, qui est 2^m55^s pour l'aluminium, 10^m pour le bore, 2^m30^s pour le magnésium. La transmutation se fait donc en deux réactions successives. Dans la première, la particule α est captée avec

émission d'un neutron et formation d'un atome radioctif ; on aurait :

$$ {}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} = {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}n, \qquad {}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} = {}^{13}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}n. $$

Les isotopes ^{30}P et ^{13}N du phosphore et de l'azote ne sont pas connus : c est précisément parce qu'ils sont radioactifs, et que leur durée de vie est trop courte pour qu'ils puissent exister dans la nature; ils se détruisent, avec les périodes que nous avons indiquées, suivant les réactions :

$$ {}^{30}_{15}\mathrm{P} = {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \varepsilon_{+}, \qquad {}^{13}_{7}\mathrm{N} = {}^{13}_{6}\mathrm{C} + \varepsilon_{+}. $$

La nature radioactive des produits de la première transmutation a permis à Irène Curie et à Joliot de les isoler chimiquement, en opérant assez rapidement pour que la radioactivité n'ait pas encore disparu à la fin du traitement. En activant le bore pris sous forme de nitrure de bore BN — les transmutations artificielles, comme les transformations radioactives, sont des réactions atomiques qui ne dépendent pas de la molécule chimique où est engagé l'atome — et traitant par la soude à chaud, l'azote se dégage à l'état d'ammoniac, qu'on peut ensuite condenser : l'ammoniac condensé est radioactif avec la période de 10 minutes, tandis que le résidu est inactif. De même, si l'on dissout l'aluminium activé dans l'acide chlorhydrique, le phosphore forme avec l'hydrogène naissant le gaz PH^3 qui se dégage : le résidu est inactif, tandis que le gaz dégagé recueilli dans un tube est actif. Il n'est donc pas douteux que les produits actifs sont des isotopes de l'azote et du phosphore : ce sont là des expériences tout à fait remarquables, parce qu'*elles apportent pour la première fois la preuve chimique de la réalité des transmutations,* et qu'en même temps *elles apportent la preuve définitive de la capture de la particule α,* puisqu'on isole un élément dont le nombre atomique est supérieur de deux unités à celui de l'élément irradié.

Des éléments radioactifs artificiels, se détruisant avec émission d'électrons positifs, peuvent également être produits par le bombardement des éléments légers par les rayons positifs formés de protons ou de deutons accélérés par une chute de potentiel suffisante. C'est ainsi que, dans le bombardement du carbone par des protons, il y a capture du proton par le noyau de carbone et formation du même radioazote, de période 10 minutes, que dans l'action des rayons α sur le bore; on a successivement :

$$ {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} = {}^{13}_{7}\mathrm{N} \qquad \text{et} \qquad {}^{13}_{7}\mathrm{N} = {}^{13}_{6}\mathrm{C} + \varepsilon_{+}. $$

Comme exemple d'éléments radioactifs produits à l'aide de deutons, nous donnerons le radiocarbone, de période 21^m, obtenu à partir du bore et le radiosodium, de période 15 heures, obtenu à partir du sodium :

$$ {}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} = {}^{11}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}n, \qquad {}^{11}_{6}\mathrm{C} = {}^{11}_{5}\mathrm{B} + \varepsilon_{+}, $$

$$ {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} = {}^{24}_{11}\mathrm{Na} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}, \qquad {}^{24}_{11}\mathrm{Na} = {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \varepsilon_{-}. $$

Dans ce dernier cas, la particule qui est capturée par le noyau n'est plus le

proton chargé positivement, mais le neutron qui lui est associé dans le deuton : l'élément radioactif obtenu est isotope de l'élément stable dont on est parti, et sa radioactivité n'est plus caractérisée par l'émission d'électrons positifs, mais par celle d'électrons négatifs formant un rayonnement β identique à celui des substances radioactives naturelles.

Ce sont également des substances radioactives à rayonnement β *qu'on obtient par bombardement de la matière par des neutrons.* Ce mode d'activation paraît plus général que les précédents; dans le bombardement par des particules α ou des protons, on n'obtient de radioéléments qu'avec les atomes légers; *avec les neutrons au contraire, on a obtenu l'excitation de presque tous les éléments, y compris les plus lourds* (Pt, Au), à une demi-douzaine d'exceptions près. La réaction d'excitation se réduit le plus souvent à la capture du neutron : on obtient ainsi, comme l'a montré dans de nombreux cas l'identification chimique, un isotope radioactif de l'élément naturel bombardé ; cette capture est d'ailleurs généralement accompagnée de l'émission d'une radiation γ pénétrante. Nous écrirons comme exemple la réaction d'activation de l'argent, etl a réaction de désintégration, de période 2^m20^s, du radioargent:

$$^{107}_{47}Ag + ^{1}_{0}n = ^{108}_{47}Ag, \qquad ^{108}_{47}Ag = ^{108}_{48}Cd + \varepsilon_- .$$

Fermi a découvert en 1935 que, si l'on interpose, entre la source de neutrons et l'élément à activer, un bloc de paraffine ou une certaine épaisseur d'eau, on constate que l'activité est augmentée. En traversant l'eau ou la paraffine, les neutrons ont subi presque tous des chocs contre les noyaux des atomes d'hydrogène contenus dans ces corps; en vertu des lois des chocs élastiques (*Cours de Mécanique Physique*, § 182), le choc direct de deux particules (neutron et proton) de masses à peu près égales a pour effet l'échange des vitesses des deux particules. Les neutrons qui ont traversé la paraffine sont des *neutrons lents*, dont la vitesse est la vitesse d'agitation thermique que possédaient les atomes d'hydrogène : on a pu montrer, par des mesures directes de vitesse par des appareils à secteurs tournants (cf. § 365), qu'il en est bien ainsi, et que l'on peut modifier la vitesse des neutrons thermiques en modifiant la température de la paraffine.

Les particules chargées positivement (particules α, protons, deutons) ne peuvent pénétrer dans les noyaux des atomes bombardés que si elles ont une énergie suffisante pour atteindre, malgré les forces de répulsion électrostatiques, la région très voisine du noyau (10^{-13} cm) où les forces autres que les forces de Coulomb (§ 414) deviennent plus importantes qu'elles. Les neutrons rapides émis par les sources de neutrons ne peuvent aussi agir sur les noyaux que s'ils arrivent dans cette même région, autrement dit si leur trajectoire heurte directement le noyau. Les neutrons lents, au contraire, restant plus longtemps à proximité d'un noyau dont ils se sont rapprochés et n'étant soumis à aucune force électrostatique, subissent facilement l'influence des forces non coulombiennes, même très faibles, et sont aisément captés par un noyau quelconque. On explique ainsi pourquoi *les neutrons lents sont les agents les plus actifs des transmutations atomiques.*

Nous n'avons indiqué dans ce paragraphe que les plus caractéristiques des faits aujourd'hui connus; en réalité, les phénomènes de transmutation déjà observés présentent une complexité et une diversité qui font que les classements

et les règles indiqués à l'heure actuelle ne peuvent avoir qu'un caractère provisoire. On jugera de l'importance des résultats acquis depuis la découverte de la radioactivité provoquée en 1933 par le seul fait qu'il a déjà été obtenu environ 300 éléments radioactifs artificiels, alors que les familles radioactives naturelles (§ 410) n'en contiennent qu'une quarantaine. Ajoutons que la possibilité de produire artificiellement des faisceaux intenses de rayons positifs (§ 421 *ter*), et par là même des sources de neutrons intenses, permet d'espérer que l'on saura bientôt produire certains radioéléments artificiels en quantité suffisante pour obtenir des activités supérieures à celles des quantités accessibles des radioéléments naturels.

422 *ter*. **La rupture des noyaux.** — Dès 1934, Fermi avait trouvé que le bombardement de l'uranium $^{238}_{92}U$ par des neutrons y produisait une radio-activité artificielle à rayons β : assimilant les phénomènes à ceux que nous venons de décrire, il pensa que la capture du neutron et l'éjection de la particule β avaient conduit, à partir de l'uranium, à un élément de nombre atomique 93. On trouva ensuite que l'on avait superposition, dans l'uranium irradié par les neutrons, de plusieurs radioactivités β à périodes différentes : on crut qu'il s'agissait d'émissions successives, conduisant, à partir de l'isotope $^{239}_{92}U$ formé par capture du neutron, à des *éléments transuraniens* de nombres atomiques 93, 94, 95, ...

Dans les tentatives de caractérisation chimique de ces éléments, on réussit à reconnaître que l'un d'eux avait les propriétés des terres rares, et un autre celles des alcalino-terreux. Dans l'impossibilité d'attribuer de telles propriétés aux éléments à inscrire dans les cases du tableau de Mendeleeff qui suivent celle de l'uranium, on supposa qu'il s'agissait des isotopes $^{231}_{88}Ra$ et $^{231}_{89}Ac$ du radium et de l'actinium : ils auraient été formés, à partir des éléments 92 et 93, par éjection de deux particules α. Mais, c'était là une forme de transmutation qui n'avait jamais été observée, et d'ailleurs on ne réussit jamais à constater l'existence d'une émission de rayons α.

Une autre difficulté fut signalée dès 1937 par Irène Curie et Savitch : en procédant à des cristallisations fractionnées d'oxalates à partir d'une solution contenant à la fois du lanthane (élément 57) et de l'actinium, ils constatèrent que l'élément radioactif considéré comme un isotope de l'actinium (élément 89) était en réalité plus proche du lanthane que de l'actinium. De même Hahn et Strassmann montrèrent en 1938 que l'élément considéré comme un isotope du radium (élément 88) était en réalité plus voisin du baryum (élément 56) que du radium : ils proposèrent en 1939 d'admettre que les éléments radioactifs obtenus à partir de l'uranium étaient réellement des isotopes du lanthane et du baryum, qu'il n'y avait pas d'éléments transuraniens, mais que *le noyau* $^{239}_{92}U$ *obtenu par capture d'un neutron se scindait en deux noyaux plus légers*, de masses respectivement égales à 140 et 99. Si l'on admet que la charge du noyau d'uranium se partage proportionnellement aux masses, on en déduit que les deux noyaux résultant directement de la scission sont $^{140}_{54}Xe$ et $^{99}_{38}Sr$; mais ces deux noyaux ne peuvent pas être stables, leur masse étant beaucoup trop grande par rapport à leur charge : on ne connaît pas de noyaux stables de masse 140 et 99 ayant des nombres atomiques moins élevés que le cérium $^{140}_{58}Ce$ et le ruthénium $^{99}_{44}Ru$. Il faut donc admettre que les noyaux Xe et Sr fournis par la scission se transforment, par une suite de désintégrations à émission β,

pour donner finalement des noyaux stables Ce et Ru, suivant les schémas :

$$^{140}_{54}\mathrm{Xe} \rightarrow {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} \rightarrow {}^{140}_{56}\mathrm{Ba} \rightarrow {}^{140}_{57}\mathrm{La} \rightarrow {}^{140}_{58}\mathrm{Ce},$$

$$^{99}_{38}\mathrm{Sr} \rightarrow {}^{99}_{39}\mathrm{Y} \rightarrow {}^{99}_{40}\mathrm{Zr} \rightarrow {}^{99}_{41}\mathrm{Nb} \rightarrow {}^{99}_{42}\mathrm{Mo} \rightarrow {}^{99}_{43}\mathrm{Ma} \rightarrow {}^{99}_{44}\mathrm{Ru}.$$

Cette interprétation leva toutes les difficultés, en expliquant le grand nombre de périodes observées, et en supprimant la nécessité de faire appel à des radioactivités α; elle fut confirmée depuis par l'identification, soit par leurs spectres de rayons X, soit par leurs propriétés chimiques, d'isotopes radioactifs d'une quinzaine d'éléments dont les nombres atomiques vont de 35 à 42 et de 51 à 57. Aussi est-elle aujourd'hui universellement admise. Il faut toutefois noter que les masses que nous avons données pour les noyaux résultant de la scission ne le sont qu'à titre d'indication : la somme des masses de ces deux noyaux est sans doute inférieure à celle du noyau primitif, car on a montré que la scission s'accompagnait de l'émission de neutrons rapides, ayant une énergie de 2 à 11.10^6 électrons-volts; le nombre de neutrons émis, encore mal connu, serait de 2 à 3 par atome détruit.

La scission de l'atome d'uranium irradié est une véritable explosion, libérant une énergie qui, d'après certains calculs théoriques, *serait de l'ordre de* 2.10^8 *électrons-volts.* Les noyaux résultant de la scission sont projetés dans deux directions opposées avec des vitesses considérables, et produisent une ionisation intense des gaz qu'ils traversent : Joliot a observé leurs trajectoires à la chambre de Wilson et montré qu'ils peuvent avoir dans l'air un parcours de 3 centimètres, considérable pour des particules aussi lourdes; d'autres auteurs ont déduit de leurs mesures qu'ils étaient projetés avec des énergies pouvant atteindre 10^8 électrons-volts pour le noyau de masse 99 et 72.10^6 e. v. pour l'autre.

C'est, de toutes les transformations nucléaires connues, celle qui libère le plus d'énergie. De plus, les neutrons émis dans la scission peuvent produire de nouvelles ruptures, de sorte qu'il n'est pas déraisonnable de supposer que, dans des conditions convenables, le bombardement de l'uranium par un faisceau de neutrons peut produire une chaîne de réactions nucléaires libérant finalement une quantité d'énergie supérieure à celle qui a été dépensée pour produire les neutrons.

Signalons encore que des phénomènes tout à fait analogues, avec formation des même isotopes radioactifs et libération d'une énergie du même ordre, ont été observés en soumettant au bombardement de neutrons du thorium au lieu d'uranium.

422 *quater*. **La structure du noyau.** — Nous avons vu que les propriétés chimiques d'un élément, ainsi que ses radiations caractéristiques, dépendent uniquement de l'arrangement des électrons qui gravitent autour du noyau dans l'atome neutre. Cet arrangement est déterminé par leur nombre total, qui est lui-même fixé par la valeur de la charge positive que porte le noyau. On peut dire que *l'atome est entièrement caractérisé, au point de vue spectral comme au point de vue chimique, par le nombre atomique, c'est-à-dire par le nombre de charges élémentaires que porte le noyau.*

La masse des électrons étant très faible, la masse de l'atome est sensiblement égale à celle de son noyau. *Les propriétés de l'atome qui dépendent de sa masse* — la densité gazeuse par exemple — *sont déterminées par la masse du noyau*. On sait d'ailleurs qu'une même charge peut être portée par des noyaux de masses différentes, correspondant à des éléments isotopes (§§ 382 et 411).

Enfin *il existe des propriétés qui dépendent de la constitution du noyau de l'atome : ce sont celles qui se traduisent par les transmutations des éléments*, transmutations radioactives et transmutations artificielles. L'étude des réactions chimiques a permis d'établir comment les atomes se réunissent pour constituer des molécules; l'étude de l'émission des raies spectrales a permis de déterminer comment les électrons se répartissent autour du noyau dans un atome : on peut espérer que l'étude des transmutations nous permettra de connaître un jour la structure des noyaux. Mais cette étude est à peine commencée : les transformations radioactives ne lui sont que de peu d'utilité, parce que nous n'avons aucune action sur elles et qu'elles ne portent que sur les noyaux les plus complexes, et ce n'est que depuis 1932 ou 1933 que l'on connaît un nombre suffisant de transmutations artificielles pour qu'il soit possible de songer à les grouper par des hypothèses de structure. L'ensemble des faits expérimentaux que nous avons rapportés dans les paragraphes précédents est aujourd'hui solidement établi; l'existence du neutron et de l'électron positif, la matérialisation du rayonnement et la dématérialisation des électrons ne sont plus douteuses. Mais il reste encore beaucoup d'incertitude dans l'interprétation des phénomènes, et un bon nombre des formules que nous avons écrites sont encore sujettes à révision.

On connaît en général assez bien la masse des divers noyaux atomiques qui peuvent porter une charge déterminée, c'est-à-dire la masse des divers isotopes d'un élément chimique donné. L'expérience montre (§ 382) que ces masses sont toujours très approximativement représentées par des nombres entiers : il est naturel d'en conclure qu'un noyau quelconque est formé par la réunion de masses toutes égales entre elles, et représentées dans le système des masses atomiques O = 16 par l'unité, ou par un nombre voisin de l'unité, car les petites différences peuvent toujours s'expliquer par des considérations d'énergie. Jusqu'en 1932, on ne connaissait comme particule de masse voisine de l'unité que le proton, noyau de l'atome d'hydrogène : on considérait donc les noyaux de tous les éléments comme formés par un assemblage de protons, en nombre égal à la masse atomique. Comme les protons portent tous une charge élémentaire, et que la charge du noyau, donnée par le nombre atomique, est toujours inférieure à sa masse atomique, on supposait que le noyau contenait en outre des électrons négatifs — les seuls connus alors — en nombre égal à la différence entre la masse et le nombre atomique; la masse de l'électron étant 2.000 fois plus petite que celle des protons, la masse totale de ces électrons restait toujours très inférieure à l'unité.

On considérait que les transmutations radioactives avec émission de rayons β apportaient la preuve de l'existence d'électrons négatifs dans les noyaux, tandis que les transmutations de Rutherford (§ 421) apportaient la preuve de l'existence de protons. Les transformations radioactives s'accompagnent souvent de la production de rayons α : on considérait que les particules α, ou **hélions**, existaient dans le noyau, mais que c'étaient des assemblages particulièrement stables, formés par 4 protons et 2 électrons négatifs, avec

un dégagement d'énergie correspondant à la différence entre la masse 4,032 de quatre protons et la masse 4,004 d'une particule α, c'est-à-dire environ 28. 10^6 électrons-volts.

Les découvertes faites depuis 1932 ont modifié profondément ces idées. Certaines d'entre elles (§ 421 *ter*) ont confirmé l'importance de la particule α dans la structure nucléaire, et l'on continue à penser qu'une bonne partie de la masse du noyau est constituée par des hélions. Mais on suppose que l'hélion est formé par l'assemblage de deux protons et de deux neutrons : la masse du neutron étant peu supérieure à celle du proton, l'énergie de liaison est peu différente de celle que nous venons de calculer.

La plus simple est sans doute de supposer que les atomes sont tous formés de neutrons et de protons, le nombre de protons étant égal au nombre atomique et le nombre de neutrons à l'excès de la masse atomique sur ce nombre ; un certain nombre de neutrons et de protons sont associés en hélions formés de deux neutrons et de deux protons ; comme la masse atomique est toujours au moins égale à deux fois le nombre atomique, on peut supposer que les éléments dont le nombre atomique est pair ne contiennent que des hélions et des neutrons, tandis que ceux dont le nombre atomique est impair contiennent des hélions, des neutrons et un proton non lié.

Les deux électrons, positif et négatif, constituent certainement des particules de nature différente ; mais il semble peu probable qu'il y ait en outre deux particules de masse unité spécifiquement différentes, le neutron et le proton. Lorsqu'on découvrit le neutron, on pensa qu'il était constitué par l'association d'un proton et d'un électron négatif ; après la découverte de l'électron positif, on put aussi supposer que le proton était constitué par l'association d'un neutron et d'un électron positif. C'est cette dernière hypothèse que l'on adopte le plus souvent, depuis qu'on a établi que la masse du neutron est un peu supérieure à celle du proton : la combinaison d'un neutron ($n = 1{,}0089$) et d'un électron positif ($m = 0{,}0005$) donnerait un proton ($^1H = 1{,}0081$) avec une perte de masse 0,0014, c'est-à-dire avec un dégagement d'énergie de 13,10^6 électrons-volts.

Les noyaux seraient alors constitués de neutrons et d'électrons positifs, les électrons positifs étant sans doute normalement associés en protons ou en hélions avec certains des neutrons. On explique bien ainsi pourquoi les transmutations artificielles mettent généralement en liberté des hélions, des neutrons ou des protons, et exceptionnellement, par rupture d'un proton, des électron-positifs. L'interprétation de la production de rayons β dans les transformations radioactives est plus délicate : il faut supposer que l'électron qui constitue la particule β est créé dans le noyau au moment de son émission, comme le photon émis par un atome qui produit un rayonnement lumineux est créé dans l'atome au moment de son émission. Dans le phénomène lumineux une certaine énergie devient disponible dans l'atome par suite d'un réarrangement des orbites électroniques, et elle se transforme en un photon d'énergie $h\nu$ qui est émis. Dans le phénomène radioactif, un réarrangement intranucléaire rend disponible une énergie $2\ mc^2$ de l'ordre de 10^6 électrons-volts, qui se matérialise en un électron positif et un électron négatif (§ 422) ; l'électron positif se combine à un des neutrons qui existent dans le noyau, avec un dégagement d'énergie de 1,3.10^6 électrons volts, et l'électron négatif est éjecté des noyaux, sa créa-

tion s'étant traduite, au total, par un dégagement d'énergie de $0{,}3.10^6$ électrons-volts.

Le classement et l'interprétation des phénomènes deviendront sans doute plus faciles lorsqu'on connaîtra mieux la nature des transmutations artificielles et la grandeur des énergies qu'elles mettent en jeu. Nous avons montré, au paragraphe 421 *bis*, comment ces énergies sont liées aux masses atomiques des éléments qui interviennent dans l'équation de la transmutation. Comme les masses du proton et du neutron sont légèrement supérieures à l'unité, tandis que celle d'un noyau quelconque est sensiblement égale à un nombre entier, la masse d'un noyau quelconque est inférieure d'une certaine quantité Δm à la somme des masses de ses constituants : pour décomposer un noyau en ses éléments, il faut lui fournir une énergie $W = c^2 \Delta m$ équivalente à ce *défaut de masse*. Si la masse du noyau est égale au nombre entier M, la masse des M protons et neutrons qui le constituent est environ 1,0085 M, et le défaut de masse est 0,0085 M ; l'énergie de liaison (§ 421 *bis*) est voisine de $9.\ 10^6$ M électrons-volts : cela correspondrait pour l'uranium (M = 238) à 2 milliards d'électrons-volts. On peut encore dire que l'énergie de liaison est en moyenne de $9.\ 10^6$ électrons-volts par neutron ou par proton, soit 36.10^6 électrons-volts pour un groupe de deux neutrons et deux protons : si ces quatre particules sont associées en un hélion, avec une énergie de liaison de 28.10^6 électrons-volts, les 8.10^6 électrons-volts restant représentent l'énergie de liaison de l'hélion aux autres éléments du noyau.

L'énergie de liaison n'est d'ailleurs certainement pas exactement proportionnelle à la masse du noyau ; cette masse n'est en effet pas exactement égale au nombre entier M, mais a une valeur légèrement différente $M + \varepsilon$ (§ 382). La partie fractionnaire ε est négative pour les éléments compris entre O = 16 et Hg = 200, atteint la valeur — 0,09 vers l'élément La = 139 et est au contraire égale à + 0,09 pour l'uranium (U = 238). C'est pour cette raison que la rupture du noyau d'uranium, s'accompagnant d'une perte de masse de l'ordre de 239,09 — 139,91 — 98,95 = 0,23 gramme, donne lieu à un dégagement d'énergie de l'ordre de 2.10^8 électrons-volts. Ce calcul n'a d'ailleurs qu'une valeur un peu hypothétique car, parmi les éléments de masse comprise entre 100 et 200, il en est peu pour lesquels la partie fractionnaire ε soit connue exactement. On ne connaît bien les lois de variation de ε que pour les éléments légers, pour lesquels les masses des isotopes ont pu être très bien mesurées au spectrographe de masse, et pour les éléments radioactifs naturels ($M > 208$), pour lesquels la mesure de l'énergie dégagée dans une transmutation fournit la différence entre les énergies de liaison de l'atome qui se désintègre et de l'atome qu'il fournit. On est arrivé ainsi à la conclusion que le noyau $^{208}_{82}Pb$, qui contient 82 protons et 126 neutrons, est particulièrement stable, et que les protons et les neutrons supplémentaires que contiennent les noyaux radioactifs ne sont que faiblement liés, avec une énergie de liaison de 4 à 7.10^6 électrons-volts par particule. C'est la faiblesse de cette énergie de liaison qui explique l'instabilité des atomes radioactifs ; imaginons en effet qu'on condense en une particule α quatre des particules faiblement liées (deux neutrons et deux protons) : l'énergie libérée, $E = 28.10^6$ électrons-volts, est supérieure à l'énergie de liaison E_l des quatre particules, et la particule α est expulsée avec une énergie cinétique $E - E_l$.

Les lois suivant lesquelles les constituants du noyau sont disposés à l'intérieur du noyau sont, bien entendu, encore moins connues que leur nature. Pour passer de l'étude des mouvements de nos machines à celle des mouvements des électrons intraatomiques, il a fallu remplacer la Mécanique newtonienne par la Mécanique ondulatoire ; pour passer de l'étude des mouvements des électrons extranucléaires à celle des particules intranucléaires, il faudra peut-être édifier une troisième Mécanique toute différente. L'étude des spectres α, β et γ des rayonnements radioactifs naturels dont nous avons parlé au paragraphe 404 et des mesures récentes sur les spectres des rayonnements γ et la répartition des énergies des particules émises dans les transmutations provoquées montrent qu'on y retrouvera la notion des *niveaux d'énergie* qui rend de si grands services dans l'étude de l'arrangement des électrons c'est là à peu près tout ce que l'on peut dire aujourd'hui sur cette question.

HUITIÈME PARTIE

NOTIONS SUR LES PRINCIPAUX APPAREILS INDUSTRIELS

CHAPITRE XXXIX

DYNAMOS A COURANT CONTINU

I. — *DYNAMO GÉNÉRATRICE*

423. Généralités. — La première machine utilisant les phénomènes d'induction pour produire des courants redressés a été construite dès 1832 sous la direction d'Ampère; mais la première machine qui ait contenu les éléments essentiels des dynamos actuelles est celle qui a été réalisée par Gramme en 1871.

Ces éléments essentiels sont (*fig.* 470) :

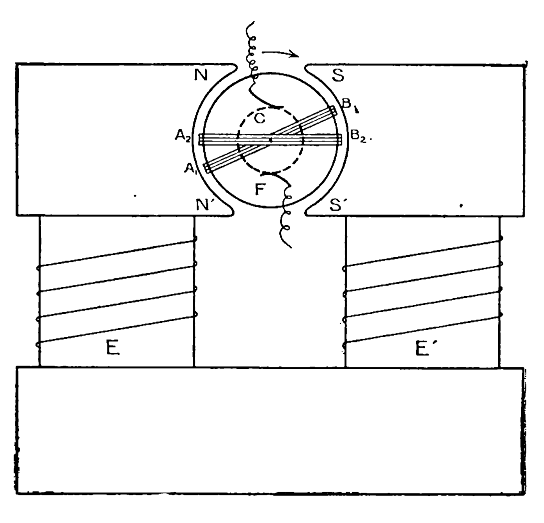


Fig. 470.

1° Un **inducteur fixe,** formé par un électro-aimant EE' dont les pièces polaires NN'SS' laissent entre elles une cavité cylindrique;

2° Un **induit,** mobile autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, constitué généralement par un cylindre ou **tambour** F de fer doux sur lequel sont enroulées des bobines A_1B_1, A_2B_2... ; pour simplifier le langage, nous supposerons que chacune de ces obines se compose d'une seule spire ;

3° Un **collecteur** C destiné à redresser les f. é. m. alternatives fournies par les bobines induites.

Les bobines de l'inducteur sont parcourues par un courant continu, et pro-

duisent, dans le circuit magnétique constitué par le fer de l'inducteur et du cylindre F, un flux d'induction Φ_0, dont les lignes d'induction ont la forme indiquée par la figure 471. Le flux d'induction Φ qui traverse une spire AB varie entre les valeurs extrêmes Φ_0 et $-\Phi_0$, qui correspondent aux deux positions A_0B_0, $A'_0B'_0$ que la spire peut occuper dans le plan PP' perpendiculaire à la direction du champ magnétique; la spire est, par suite, le siège d'une f. é. m. d'induction $-d\Phi / dt$, qui change de signe deux fois par tour, lorsqu'elle passe dans le plan PP'.

La f. é. m. est localisée dans les conducteurs qui coupent des lignes de force : les **conducteurs actifs** sont les deux fils de la spire disposés suivant les génératrices du cylindre. Les fils placés le long des bases du tambour ne sont que des fils de connexion, et peuvent être disposés d'une façon quelconque : *le plan de la spire est toujours le plan défini par les deux conducteurs actifs* A *et* B. Le sens de la f. é. m. se déduit de l'une des règles données au paragraphe 224; on vérifiera facilement sur la figure 471 que la f. é. m. est dirigée d'avant en arrière dans les conducteurs actifs situés à gauche du plan PP', et d'arrière en avant dans ceux qui se trouvent à droite de ce plan.

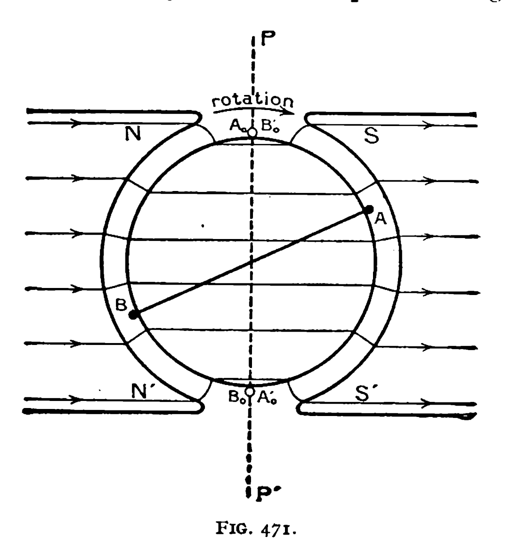


FIG. 471.

424. Enroulement de l'induit et collecteur. — Le schéma de l'enroulement de l'induit est représenté par la figure 472; les connexions de la face antérieure du tambour sont figurées en traits pleins, celles de la face postérieure en traits ponctués; lorsqu'on suit l'enroulement d'un bout à l'autre, on passe de la face antérieure à la face postérieure par les fils A_1A_2 ... représentés par des croix (flèches vues de l'arrière), et on revient de la face postérieure à la face antérieure par les fils B_1B_2 ... représentés par des points (flèches vues de l'avant).

Pour réaliser l'enroulement, on dispose d'abord une spire A_1B_1, puis une spire A_2B_2 dont le plan fait avec A_1B_1 l'angle α, une spire A_3B_3 faisant avec A_1B_1 l'angle 2α, etc... Quand on a disposé un nombre k de spires, tel que $k\alpha = \pi$, on est parvenu à une spire A_kB_k voisine de la spire initiale A_1B_1 ; mais, puisqu'on a tourné d'un angle seulement égal à π, il est évident qu'on n'a réalisé que la moitié de l'enroulement ; la spire suivante A_{k+1} B_{k+1} ne peut pas être confondue avec la première spire A_1B_1, puisque ses fils sont disposés en sens contraire. On terminera donc l'enroulement en disposant, au-dessus de la première, une seconde couche de k nouvelles spires A_{k+1} B_{k+1}..., A_{2k} B_{2k} : la $2k^e$ spire est voisine de la première, et enroulée dans le même sens; elle lui est réunie par le fil de connexion $B_{2k}A_1$. On obtient ainsi un enroulement fermé, comprenant $2k$ spires et $n = 4k$ conducteurs actifs.

On se représentera plus aisément la disposition des spires par le schéma de la figure 473, où elles sont nettement séparées; l'enroulement y est supposé fait sur un cylindre creux, les spires étant disposées sur cet anneau dans des positions parallèles à celles qu'elles occupent sur le tambour. La figure 473 fait immédiatement ressortir la continuité et la symétrie de l'enroulement : on peut prendre comme spire origine A_1B_1 une spire quelconque.

Pour chercher le sens des f. é. m. induites dans les différentes spires de l'induit à tambour de la figure 472, on peut supposer qu'il tourne dans un champ uniforme $\vec{H}$. Le flux qui traverse une spire dépend alors uniquement de l'orientation de son plan par rapport au champ, et n'est pas modifié lorsqu'on la déplace dans son plan : les f. é. m. sont les mêmes, dans le champ uniforme $\vec{H}$, pour l'induit à tambour de la figure 472 et pour l'induit à anneau de la figure 473. On voit immédiatement, sur l'une ou l'autre de ces figures, que, lorsqu'on fait tourner l'induit d'un petit angle à partir de la position qu'elles représentent, le flux d'induction qui traverse une spire varie dans le même sens pour toutes les spires comprises entre la spire 1 et la spire k, et dans le sens inverse pour toutes les spires comprises entre les spires $k + 1$ et $2k$. Les k premières spires sont le siège de f. é. m. qui sont toutes de même sens; sur la figure 472, les fils A_1... A_k sont tous à droite du plan PP', les fils B_1... B_k sont tous à gauche de ce plan : les f. é. m. sont dirigées dans tous ces fils dans le sens inverse de celui que nous avons pris comme sens de l'enroulement, c'est-à-dire dans le sens B_kA_k... $A_2B_1A_1$. Les k autres spires sont au contraire le siège de f. é. m. dirigées dans le sens de l'enroulement, c'est-à-dire dans le sens A_{k+1} B_{k+1} ... A_{2k} B_{2k}. Si l'on réunit par un conducteur extérieur les deux points C_1 et C_{k+1} des fils de connexion A_1B_{2k} et A_{k+1} B_k (*fig.* 472 et 473), les deux moitiés de l'induit se comportent comme deux générateurs en parallèle et concourent toutes deux à produire dans le circuit extérieur un courant d'intensité I allant, à travers ce circuit, de C_1 vers C_{k+1}; les deux moitiés de l'induit sont parcourues par des courants d'intensité $i = I / 2$ allant, à travers les spires, de C_{k+1} vers C_1.

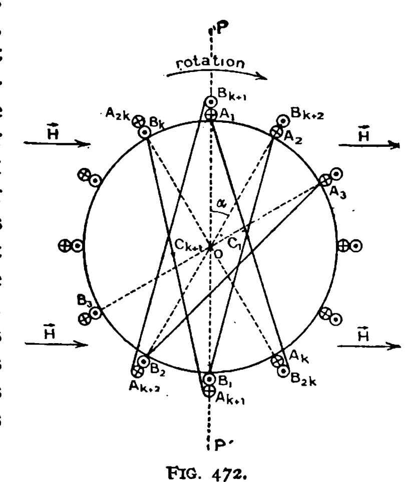


FIG. 472.

Les fils de connexion de l'induit réunis aux deux bornes de la dynamo doivent être, à chaque instant, ceux qui séparent les spires qui viennent de traverser le plan PP' de celles qui vont le traverser : ils doivent changer constamment. C'est cette **commutation** qui est assurée par le collecteur. Il se compose d'une série de lames de cuivre C_1 C_2... C_{k+1}... C_{2k} (*fig.* 474), disposées sur un cylindre solidaire de l'induit, isolées les unes des autres par des lamelles de mica, et communiquant respectivement avec les fils de connexion B_{2k} A_1, B_1A_2, ... Sur ces lames frottent deux balais MM', généralement en charbon,

qui constituent les pôles de la machine : chaque fois qu'une paire de spires est remplacée par la suivante dans le plan PP', la paire de lames du collecteur qui est en contact avec les balais est aussi remplacée par la suivante; les

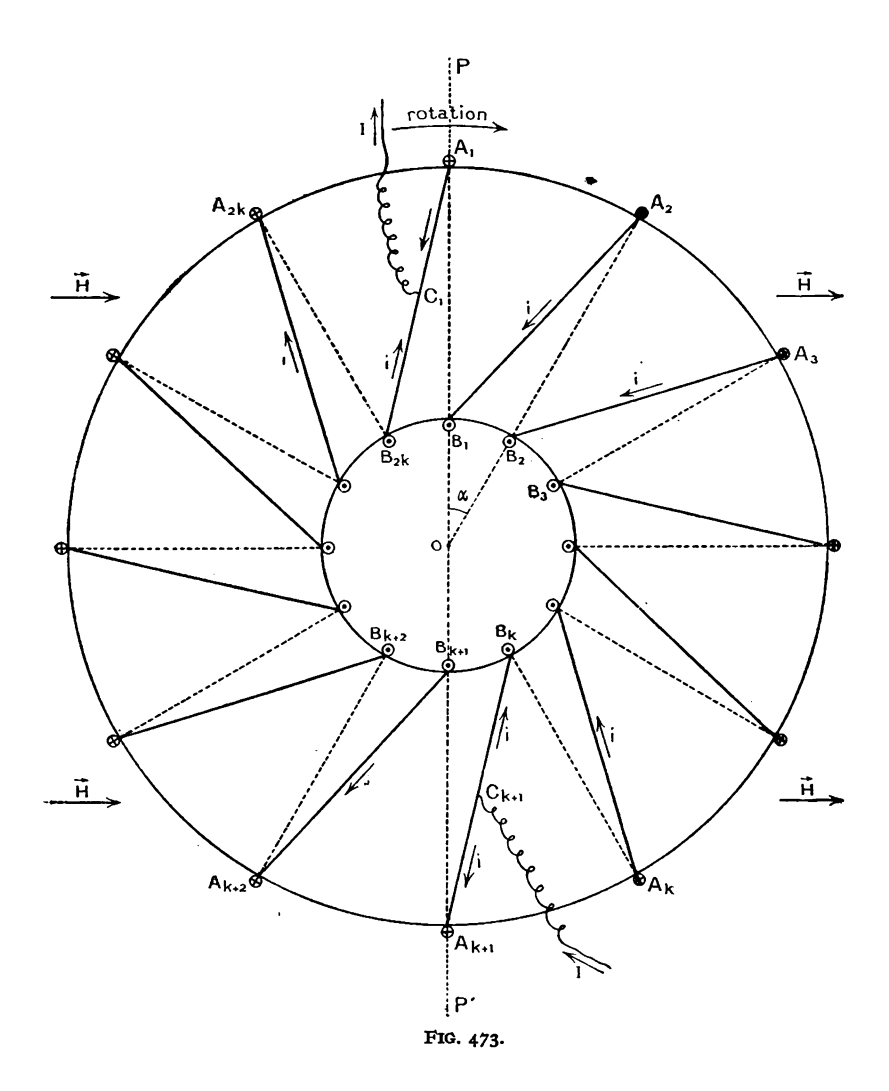


FIG. 473.

spires passent automatiquement d'une moitié du circuit de l'induit dans l'autre chaque fois que leur f. é. m. change de sens.

La figure 475 représente la disposition habituelle des connexions représentées schématiquement par la figure 474. On remarquera que la ligne C_1C_{k+1} des balais y est perpendiculaire au plan PP'; mais les spires commutées A_1B_1, A_{k+1} B_{k+1} sont toujours les spires qui passent dans le plan PP'.

En réalité, les spires de la seconde moitié de l'enroulement ne sont que

rarement disposées au-dessus de celles de la première, mais plutôt dans des intervalles ménagés entre elles; comme la seule chose qui importe est le

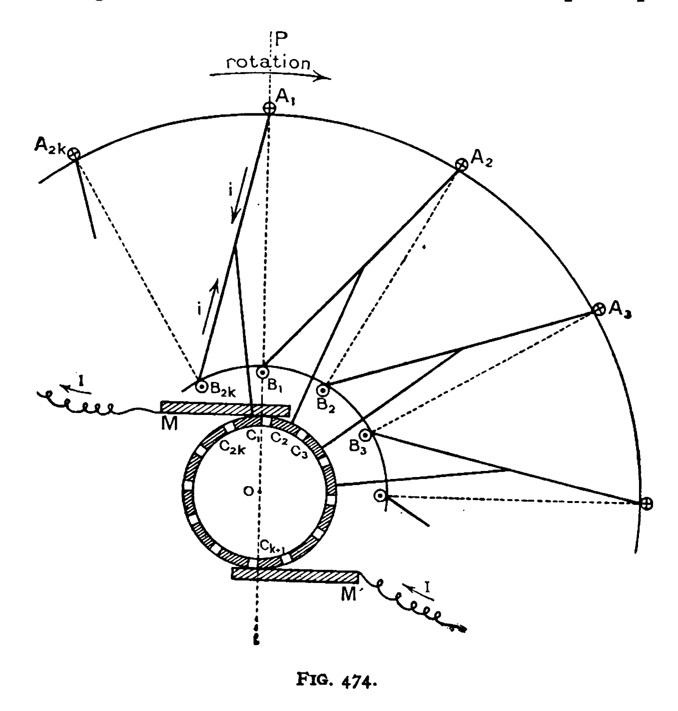


FIG. 474.

nombre et la position des conducteurs actifs, il existe plusieurs façons équi-

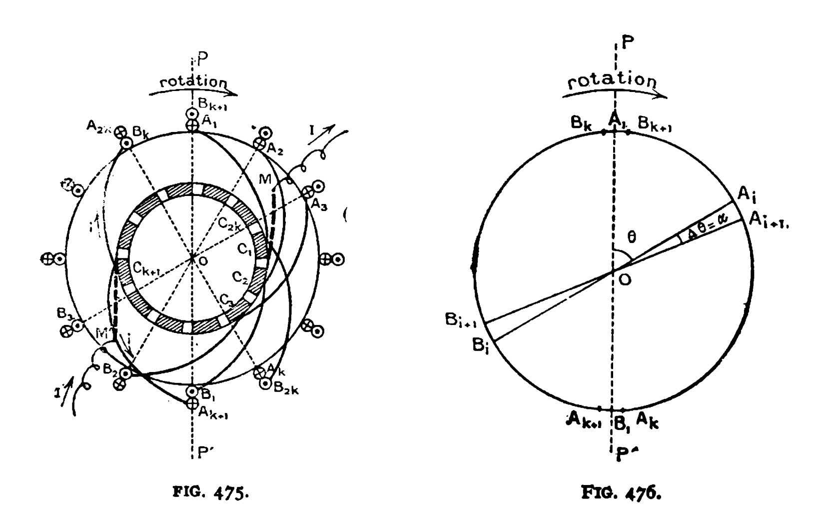


FIG. 475.

FIG. 476.

valentes de les réunir entre eux : on trouvera la description des différents types d'enroulement dans les traités spéciaux.

425. Calcul de la force électromotrice. — La force électromotrice de la dynamo à l'instant t est égale à la somme des f. é. m. qui existent à cet instant dans les k spires A_1B_1... A_kB_k qui constituent l'une des moitiés de l'induit.

Considérons une spire A_iB_i qui fait à l'instant t un angle θ avec le plan PP' (*fig.* 476), et soit Φ_i le flux qui la traverse à cet instant; après un temps Δt très petit, elle fait avec le plan PP' un angle $\theta + \Delta\theta$, et elle est traversée par un flux $\Phi_i + \Delta\Phi_i$. Désignons par ω la vitesse angulaire de rotation de l'induit; la f. é. m. e_i qui existe à l'instant t dans la spire A_iB_i est :

$$e_i = -\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t} = -\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\omega\cdot\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta\theta}.$$

Si l'angle α de deux spires consécutives est assez petit, c'est-à-dire s'il y a suffisamment de lames au collecteur, on peut choisir pour Δt le temps nécessaire pour que l'induit tourne précisément de l'angle α, c'est-à-dire prendre $\Delta\theta = \alpha$. Le flux $\Phi_i + \Delta\Phi_i$ qui traverse la spire A_iB_i à l'instant $t + \Delta t$ est alors le flux Φ_{i+1} qui traverse la spire $A_{i+1}B_{i+1}$ à l'instant t, et on peut écrire :

$$e_i = -\omega\,\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\alpha}.$$

La f. é. m. totale E de la dynamo est :

$$E = e_1 + e_2 \ldots + e_k = \frac{\omega}{\alpha}\,[(\Phi_1 - \Phi_2) + (\Phi_2 - \Phi_3) \ldots + (\Phi_k - \Phi_{k+1})] = \frac{\omega}{\alpha}\,(\Phi_1 - \Phi_{k+1}).$$

La spire A_1B_1 est celle qui se trouve dans le plan PP' à l'instant t : elle est traversée par le flux $\Phi_1 = \Phi_0$ (1); la spire $A_{k+1}B_{k+1}$ est celle qui se trouve dans le plan PP' : elle est traversée par le flux $\Phi_{k+1} = -\Phi_0$. On a :

$$E = 2\Phi_0\,\frac{\omega}{\alpha}.$$

A la seule condition que l'induit contienne un nombre suffisant de bobines, *la force électromotrice de la dynamo conserve une valeur constante.*

Remplaçons la vitesse angulaire de l'induit par son expression, $\omega = 2\pi N$, en fonction du nombre de tours par seconde N; remplaçons l'angle α par sa valeur $\alpha = \pi / k$, ou plutôt par sa valeur $\alpha = 4\pi / n$, en fonction du nombre total $n = 4k$ de conducteurs actifs. Enfin, pour obtenir la valeur de E en volts à partir de la valeur de Φ_0 en maxwells, introduisons le facteur 10^{-8} (§ 222). Nous obtenons la formule :

$$E = 10^{-8}\,.\,Nn\Phi_0.$$

La force électromotrice d'une dynamo est proportionnelle au flux magnétique créé par les inducteurs, au nombre de conducteurs actifs portés par l'induit, et à sa vitesse de rotation.

On a construit des dynamos donnant des forces électromotrices de 20.000 volts, mais on dépasse rarement 750 volts dans les dynamos industrielles, 1.500 volts dans les moteurs de traction (§ 431). Les f. é. m. élevées correspondent à de grandes différences de potentiel entre les lames du collecteur, et on doit

(1) Nous choisissons ici pour sens positif sur la spire le sens de la f. é. m., c'est-à-dire le sens inverse du sens d'enroulement défini au paragraphe 424.

munir les dynamos à haut voltage de collecteurs de grand diamètre, pour éviter qu'il ne s'établisse des arcs entre leurs lames.

426. Circuit magnétique d'une dynamo. — On peut calculer le flux magnétique Φ_0 qui traverse le noyau de l'induit en appliquant le théorème des circuits magnétiques (§ 199). Si les enroulements inducteurs comprennent m spires parcourues par un courant d'intensité i ampères, et si la réluctance du circuit magnétique formé par la carcasse des inducteurs et le noyau de l'induit est $\mathcal{R}$, le flux Φ_0 est donné par la relation :

$$\Phi_0 = \frac{4\pi mi}{10\mathcal{R}}.$$

Pour entretenir le champ magnétique en dépensant le moins de courant possible dans les inducteurs, il faut réduire autant que possible la réluctance $\mathcal{R}$. A ce point de vue, il est extrêmement important de diminuer l'épaisseur de l'**entrefer** qui sépare les pièces polaires du noyau de l'induit (cf. § 200) ; il doit néanmoins être assez large pour contenir les conducteurs actifs et laisser un jeu suffisant pour la rotation.

Le noyau de fer sur lequel est enroulé l'induit est presque toujours un cylindre denté, présentant des rainures dans lesquelles sont logés les conducteurs actifs. Les lignes d'induction passent presque toutes dans les dents, et les lignes de force du champ dans l'entrefer ont la forme qu'indique la figure 477 ; il n'y a d'ailleurs rien à changer au calcul du paragraphe précédent, car le flux qui traverse une spire varie toujours de $+\Phi_0$ à $-\Phi_0$ au cours d'une demi-révolution. Les induits dentés présentent sur les induits lisses de très nombreux avantages : les conducteurs sont fixés beaucoup plus solidement sur le noyau, et les forces électromagnétiques auxquelles ils sont soumis se reportent tout naturellement sur les dents; ils sont en même temps protégés contre les frottements. L'épaisseur de l'entrefer, c'est-à-dire la distance qui sépare les pièces polaires des sommets des dents, peut être réduite, même dans les grandes machines, à 6 ou 8 millimètres ; dans ces conditions, la réluctance de l'entrefer peut n'être que les deux tiers ou la moitié de la réluctance totale du circuit magnétique.

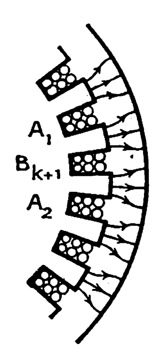


FIG. 477.

Rappelons que la formule des circuits magnétiques n'est qu'une formule approchée (§ 199). Son emploi est pourtant extrêmement important pour le calcul d'une dynamo : il permet, lorsqu'on s'est donné la valeur du flux Φ_0 à obtenir, de calculer le nombre mi d'ampères-tours nécessaires pour le produire. On peut en effet déduire, de la valeur de Φ_0 et de la section du circuit magnétique, la valeur de l'induction B en chacun de ses points, et on connaît, par conséquent, pour chaque partie du circuit, la valeur de la perméabilité μ qui convient au calcul de la réluctance. On s'arrange, en général, de façon que le fer soit saturé dans les dents, avec une induction B de l'ordre de 20.000. Dans le corps du noyau de l'induit comme dans la carcasse de l'inducteur, il est préférable de donner à l'induction une valeur moins grande, pour avoir une perméabilité plus élevée (§ 200) : on pourra choisir une induction de l'ordre de 12.000 à 15.000. Comme la surface cylindrique de l'entrefer

est plus grande que la section du noyau par le plan PP′, il correspond à cette valeur de l'induction dans le plan PP′ une valeur plus faible du champ magnétique moyen dans l'entrefer : ce champ est en général de l'ordre de 8.000 à 10.000 gauss.

Lorsqu'on fait varier le courant inducteur i, on fait varier dans le même sens le flux d'induction Φ_0 ; mais, comme la perméabilité du fer varie en même temps, il n'y a pas proportionnalité entre les valeurs de i et de Φ_0. La force électromotrice E de la dynamo, qui est proportionnelle au flux Φ_0, n'est pas proportionnelle au courant inducteur i. Il est facile d'étudier expérimentalement la loi de sa variation : on fait passer dans les inducteurs un courant fourni par une batterie d'accumulateurs, et on mesure son intensité i par un ampèremètre ; on fait tourner la dynamo avec une vitesse constante, en laissant le circuit de l'induit ouvert, et on mesure, par un voltmètre, la différence de potentiel, égale à la force électromotrice E, qui existe entre les balais. La courbe obtenue en portant i en abscisses et E en ordonnées s'appelle la **caractéristique à circuit ouvert** de la dynamo ; sa forme est celle de la courbe d'aimantation du fer (*fig.* 478).

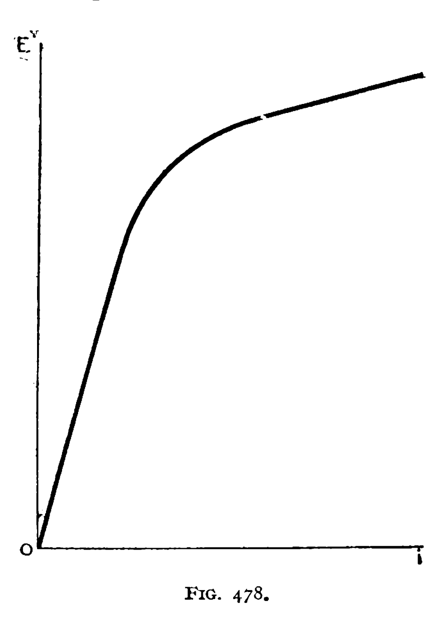


FIG. 478.

427. Réaction d'induit et commutation. — Le courant qui parcourt les bobines induites crée dans le noyau de l'induit un champ magnétique. Les deux moitiés de l'induit sont symétriques par rapport au plan PP′, dans lequel s'effectue la commutation (*fig.* 472 et 473) : si nous y prenons deux spires symétriques, $A_{i+1}B_{i+1}$ et $A_{2k-i}B_{2k-i}$ (*fig.* 479), elles créent, à l'intérieur du noyau de l'induit, des champs magnétiques $\vec{h}_{i+1}$ et $\vec{h}_{2k-i}$, dont la résultante est dirigée suivant $\vec{PP'}$. L'ensemble du circuit induit crée un champ magnétique $\vec{h}$ dirigé suivant $\vec{PP'}$, qui s'ajoute au champ inducteur $\vec{H}$ pour créer un champ résultant $\vec{H'}$ (*fig.* 480) déplacé par rapport à $\vec{H}$ d'un angle θ, dans le sens du mouvement de rotation de l'induit (cf. § 271, détermination de l'ohm par la méthode du cadre tournant). C'est là une conséquence immédiate de la loi de Lenz : les courants induits tendent à s'opposer aux variations du flux qui traverse les bobines, et, par conséquent, à entraîner le champ dans le sens du mouvement.

Cette rotation du champ s'accompagne d'une déformation des lignes d'induction, représentée par la figure 481 : le flux qui traverse une spire est maximum, non pas quand la spire passe dans le plan PP′ par rapport auquel les deux pièces polaires sont symétriques, mais quand elle passe dans le plan QQ′,

décalé par rapport à PP′ dans le sens du mouvement. C'est à ce moment que la f. é. m. induite dans cette spire est nulle, et c'est à ce moment que la commutation doit avoir lieu : *les balais doivent être décalés, à partir de la position*

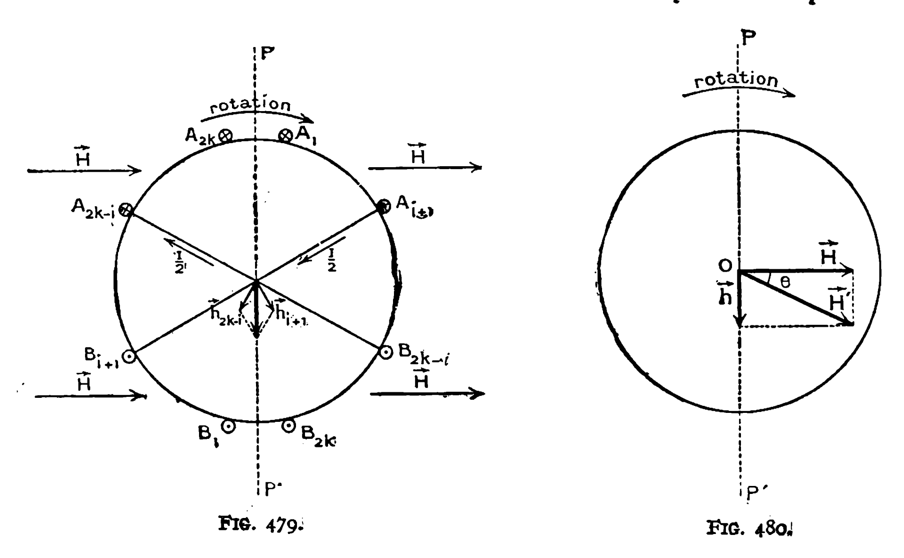


Fig. 479. Fig. 480.

qui convient lorsque le circuit de l'induit est ouvert, d'un angle θ *dans le sens du mouvement.*

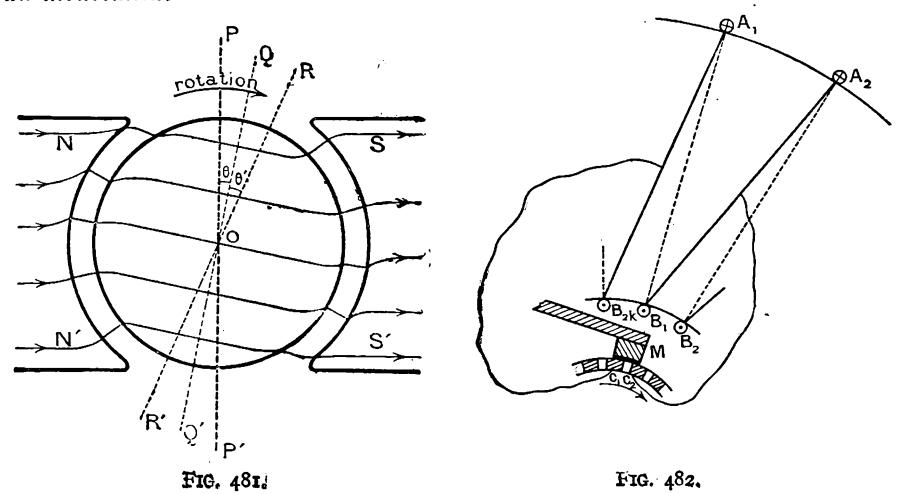


Fig. 481. Fig. 482.

Au moment de la commutation, le courant qui parcourt la spire commutée change de sens : il passe de + I / 2 à — I / 2. Si cette interversion s'effectuait brusquement, la f. é. m. de self-induction serait telle qu'il jaillirait une étincelle au collecteur entre le balai et la lame qu'il vient de quitter. En réalité, le balai ne quitte la lame C_2 du collecteur qu'après être venu en contact avec la lame suivante C_1 (*fig.* 482) : la spire A_1B_1 se trouve en court-circuit pen-

dant un certain temps. C'est pendant ce temps que le courant doit changer de sens : il faut pour cela qu'au moment de la commutation la spire se trouve déjà dans une région du champ magnétique capable de développer une force électromotrice de renversement qui, combinée à la force électromotrice de self-induction, provoque le passage du courant de la valeur $+ I / 2$ à $- I / 2$. *Il faut donc décaler encore les balais d'un nouvel angle* θ' *dans le sens du mouvement,* de façon que la commutation s'effectue quand la spire passe dans un plan RR' faisant l'angle $\theta + \theta'$ avec le plan PP' (*fig.* 481).

Il est extrêmement important d'arriver à régler la position des balais de façon à obtenir une bonne commutation, sans étincelles au collecteur, car ces étincelles détériorent les lames du collecteur, et mettraient rapidement la dynamo hors d'usage ; on y arrive d'autant plus facilement que le flux magnétique créé par l'induit est plus faible par rapport au flux inducteur, et que la self-induction de chacune des spires de l'induit est plus petite. Dans toutes les machines modernes de puissance supérieure à quelques kilowatts, on améliore d'ailleurs la commutation en munissant l'inducteur de *pôles auxiliaires,* excités par un enroulement en série avec l'induit, dont le champ compense le champ h de l'induit.

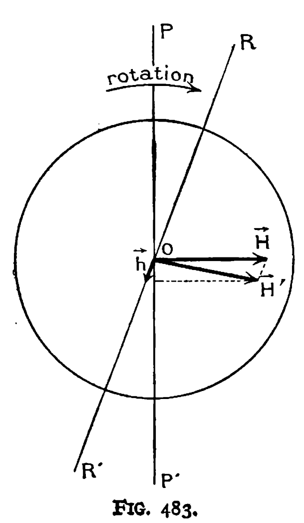


FIG. 483.

Lorsque la commutation s'effectue dans un plan RR' différent du plan PP', le champ $\vec{h}$ créé par l'induit est dirigé suivant $\overrightarrow{RR'}$ (*fig.* 483), puisque deux spires symétriques par rapport à ce plan sont parcourues par des courants de sens contraire. Le flux magnétique total Φ'_0 qui traverse une spire au moment de la commutation est le flux du champ $\vec{H'}$ à travers la spire du plan RR'; il est égal au flux du champ $\vec{H}$ à travers cette spire, et il est, par conséquent, inférieur au flux Φ_0 du champ $\vec{H}$ à travers la spire du plan PP'. La force électromotrice de la dynamo est, par suite, diminuée par le calage des balais : c'est cette diminution qu'on appelle la **réaction d'induit.**

Il est facile de la déterminer expérimentalement, en faisant passer dans l'inducteur un courant constant fourni par une source indépendante, et en faisant fournir à l'induit des courants d'intensité croissante, par un choix convenable de la résistance extérieure qui ferme son circuit. Pour chaque valeur I de l'intensité du courant induit, on règle la position des balais de façon à avoir le moins d'étincelles possible au collecteur, et on mesure la différence de potentiel V entre les balais : si la résistance de l'induit, mesurée préalablement, est r, la f. é. m. est $E = V + rI$. Si E_0 est la différence de potentiel aux balais en circuit ouvert pour le même courant inducteur et la même vitesse de rotation, la réaction d'induit est égale à $E_0 - E$. Elle est en général pour la dynamo à pleine charge, de l'ordre de 5 pour 100 de la f. é. m. à vide.

428. Excitation en série. — Nous avons supposé jusqu'ici que le flux magnétique était produit par le passage, dans les bobines inductrices, d'un courant indépendant, fourni par une source extérieure. C'est ce qu'on appelle l'**excitation indépendante :** elle n'est employée que dans des cas exceptionnels, et c'est en général la dynamo elle-même qui produit le courant d'excitation envoyé dans l'inducteur.

Dans l'**excitation en série,** l'induit et l'inducteur sont disposés en série (*fig.* 484), et tout le courant produit par la machine traverse les bobines inductrices EE'. Il faut évidemment que la puissance consommée par effet Joule dans ces bobines soit petite par rapport à la puissance disponible dans le circuit extérieur, c'est-à-dire que la chute de potentiel ohmique dans l'inducteur soit petite par rapport à la différence de potentiel aux bornes $V_A - V_B$; *la résistance des bobines inductrices doit être faible, et elles doivent se composer d'un petit nombre de spires de gros fil.*

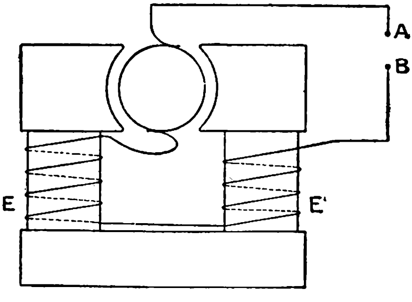


FIG. 484.

Lorsqu'on fait tourner la dynamo-série en laissant son circuit ouvert, l'inducteur n'est parcouru par aucun courant; il existe entre les bornes une différence de potentiel très faible, due au magnétisme rémanent du fer de l'inducteur. Si on réunit les bornes A et B par un conducteur extérieur, il s'y produit un courant, dont le sens dépend à la fois du sens de rotation et du sens de l'aimantation rémanente. Il peut arriver que le sens du flux magnétique créé par ce courant soit opposé à celui du flux rémanent : le fer des inducteurs se désaimante, la f. é. m. et l'intensité du courant tombent à zéro. Mais, si on change le sens de rotation, le courant induit produit dans l'inducteur un flux magnétique de même sens que le flux rémanent : le flux augmente, la f. é. m. augmente, et la machine s'amorce. Si l'on renverse le sens de l'aimantation rémanente, il faut fournir aux inducteurs un courant de sens opposé ; mais, pour changer le sens du courant induit en même temps que celui du flux inducteur, il faut conserver le même sens de rotation.

La dynamo-série ne peut fonctionner comme génératrice que pour un sens de rotation bien déterminé, qu'on appelle le **sens générateur ;** *le sens de la f. é. m. qu'elle fournit dépend uniquement du sens de l'aimantation initiale du fer des inducteurs.* Pour changer le sens de la f. é. m., on changera le sens de l'aimantation rémanente, en faisant passer dans l'inducteur un courant produit par une source extérieure ; pour changer le sens de rotation générateur, on intervertira les connexions de l'inducteur et de l'induit.

Si on diminue la résistance extérieure placée entre les bornes A et B, la vitesse de rotation restant la même, le courant qui traverse le circuit augmente, et il augmente très rapidement, à cause de l'augmentation du flux inducteur Φ_0. On représente graphiquement ces variations en portant en abscisses l'intensité I du courant, et en ordonnées la différence de potentiel aux bornes $V_A - V_B$: la courbe Γ ainsi obtenue s'appelle la **caractéristique extérieure** de la dynamo-série (*fig.* 485). Comparons-la à la caractéristique à circuit ouvert Γ_0 de la même dynamo étudiée avec une excitation indépen-

dante : pour un même courant inducteur $I = Om$, la différence MM_0 des ordonnées des deux courbes représente la réaction d'induit $E_0 - E$, augmentée de la chute de potentiel ohmique, $E - (V_A - V_B) = (r + r')I$, dans le circuit intérieur (induit et inducteur) de la dynamo. La différence MM_0 augmente avec l'intensité I du courant : à la branche rapidement ascendante de la caractéristique à circuit ouvert correspond une branche un peu moins rapidement ascendante de la caractéristique extérieure ; à la branche lentement ascendante de Γ_0 correspond une branche descendante de la caractéristique Γ.

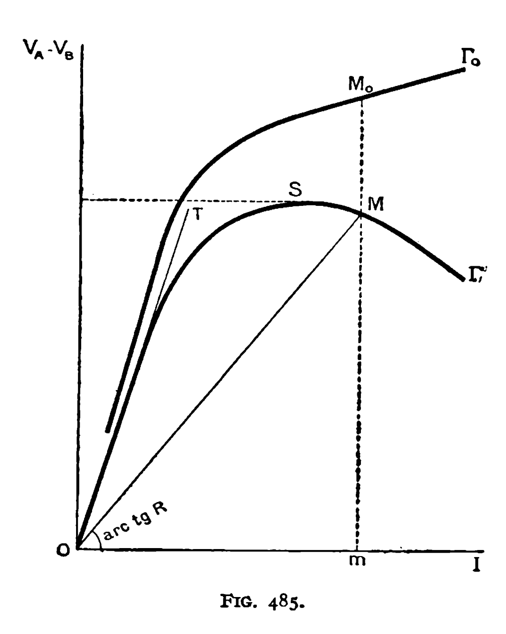


FIG. 485.

La résistance du conducteur extérieur, $R = (V_A - V_B) / I$, est représentée sur le graphique par le coefficient angulaire de la droite OM. Elle ne peut pas prendre une valeur supérieure au coefficient angulaire R_c de la droite OT, tangente à l'origine à la caractéristique extérieure : pour des résistances extérieures supérieures à la **résistance critique** R_c, la dynamo-série ne s'amorce pas.

A chaque valeur de la résistance extérieure correspond une valeur différente de la différence de potentiel aux bornes : on n'obtient un fonctionnement un peu stable qu'en restant au voisinage du sommet S de la caractéristique Γ. Pour une valeur de la résistance extérieure trop voisine de la résistance critique, le fonctionnement serait tout à fait instable ; une diminution accidentelle de la vitesse, qui abaisse les caractéristiques, et diminue la résistance critique, suffirait à désamorcer la machine.

Si la résistance extérieure vient à diminuer brusquement, par suite d'un court-circuit par exemple, le courant augmente dans des proportions dangereuses. Si le courant n'est pas coupé par un disjoncteur, et si la courroie de transmission qui entraîne la dynamo ne saute pas, l'induit brûle ou se rompt.

La dynamo-série ne doit pas être employée à la charge des accumulateurs. Si en effet, pour une raison quelconque, son mouvement vient à se ralentir, et si sa f. é. m. devient inférieure à celle de la batterie à recharger, le courant dans le circuit change de sens. L'aimantation des inducteurs change alors de sens, ainsi que la f. é. m. induite : même si on rend à la dynamo sa vitesse initiale, sa f. é. m. reste de même sens que celle de la batterie d'accumulateurs, et elle continue à la décharger, avec une intensité de courant exagérée, au lieu de la recharger.

429. Excitation en dérivation. — Les inconvénients que nous venons d'indiquer font que la dynamo-série n'est employée comme génératrice que dans des cas exceptionnels. On emploie le plus souvent l'**excitation en dérivation** (*fig.* 486), dans laquelle le circuit inducteur est placé en dérivation entre les bornes de l'induit et n'est parcouru que par une partie du courant produit par la machine. Pour que le circuit inducteur ne dissipe par effet Joule qu'une puissance petite par rapport à la puissance disponible dans le circuit extérieur, il faut que le courant qui le parcourt soit faible, c'est-à-dire que sa résistance soit grande. *Les bobines inductrices d'une dynamo-dérivation contiennent un grand nombre de spires de fil fin.*

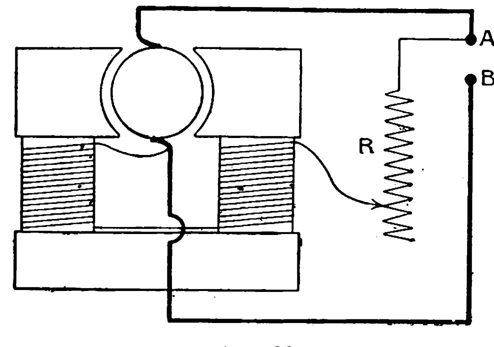


FIG. 486.

L'inducteur a, par suite, une grande self-induction, et l'ouverture de son circuit peut déterminer des étincelles capables d'endommager les conducteurs. On doit le laisser toujours fermé, ou l'ouvrir progressivement à l'aide de contacts à mouvement lent, entre lesquels jaillit un arc qui prolonge le courant pendant le temps nécessaire à leur écartement. On peut aussi diminuer progressivement l'intensité du courant d'excitation par la manœuvre d'un rhéostat R, placé en série avec l'inducteur ; ce rhéostat, qui permet de faire varier le flux inducteur et, par suite, la force électromotrice pendant le fonctionnement de la dynamo, s'appelle le *rhéostat d'excitation* ou le *rhéostat de champ*.

Lorsqu'on fait tourner une dynamo-dérivation sans réunir les bornes A et B par un conducteur extérieur, elle fonctionne comme une dynamo-série, dont le circuit, constitué par l'inducteur et l'induit, est fermé; elle s'amorce dans les mêmes conditions qu'une dynamo-série. *La dynamo-dérivation ne peut fonctionner comme génératrice que pour un sens de rotation bien déterminé, qu'on appelle le* **sens générateur** ; *le sens de la f. é. m. qu'elle fournit dépend uniquement du sens de l'aimantation initiale du fer des inducteurs.* Pour changer le sens de la f. é. m., on changera le sens de l'aimantation rémanente, en faisant passer dans les inducteurs un courant produit par une source extérieure ; pour changer le sens de rotation générateur, on intervertira les connexions de l'inducteur et de l'induit.

Lorsque la dynamo tourne à vide, le courant fourni par l'induit se réduit au courant d'excitation ; il est assez faible pour que la différence de potentiel aux bornes $V_A - V_B$ ne diffère que très peu de la f. é. m. E qu'on obtiendrait si la machine fonctionnait, avec le même courant d'excitation, en excitation indépendante. Si l'on réunit les bornes AB par un conducteur extérieur, l'induit fournit un courant plus intense ; on construit la **caractéristique extérieure** de la dynamo (*fig.* 487) en portant en abscisses l'intensité i du courant dans le conducteur extérieur, et en ordonnées la différence de potentiel aux bornes $V_A - V_B$. Tant que le courant extérieur est peu intense,

la réaction d'induit et la chute de potentiel ohmique dans l'induit restent faibles, la différence de potentiel $V_A - V_B$ diminue peu.

Lorsque la résistance extérieure — représentée par le coefficient angulaire de la droite OM — devient petite, la diminution de $V_A - V_B$ devient assez marquée pour que la diminution du courant inducteur, et la diminution de f. é. m. qui en résulte soient appréciables : la caractéristique Γ descend de plus en plus vite, et se termine par une branche SO revenant à l'origine. Cette deuxième branche est d'ailleurs assez difficile à observer ; pour la moindre variation dans le circuit extérieur ou dans la vitesse de la machine, la résistance tombe au-dessous de la valeur critique donnée par le coefficient angulaire de la tangente OT à l'origine, et la dynamo se désamorce. On se rendra compte de l'impossibilité de faire fonctionner la dynamo-dérivation sur une résistance extérieure faible en songeant que, si on met en court-circuit les deux pôles AB, on supprime par là même tout courant dans l'inducteur : la dynamo n'est plus excitée, et l'induit n'est plus traversé par aucun courant.

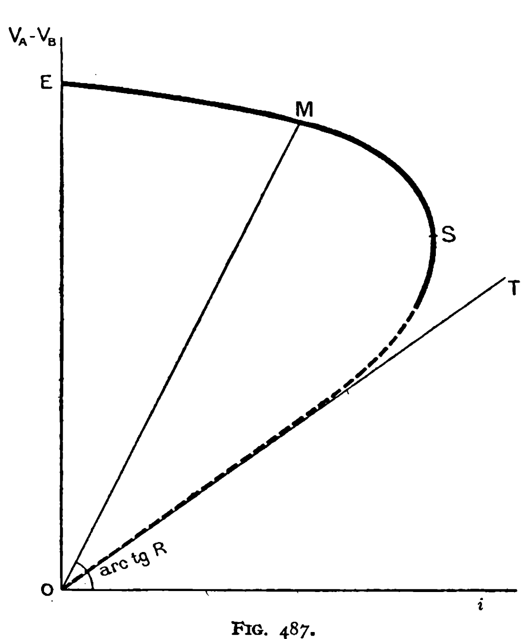


Fig. 487.

Les dynamos-dérivation sont beaucoup moins sujettes à des accidents que les dynamos-série, puisque la mise en court-circuit a pour effet de supprimer tout courant. Elles ont l'énorme avantage de fournir une f. é. m. à peu près constante pour toute la région de fonctionnement stable, allant depuis le début E de la caractéristique jusqu'au voisinage de son sommet S, et se prêtent particulièrement à la production du courant continu pour les distributions à tension constante universellement employées. Il est extrêmement facile, pour un régime de fonctionnement quelconque, de faire varier la différence de potentiel aux bornes : il suffit de modifier la résistance du rhéostat d'excitation pour faire varier le courant inducteur, et par suite la force électromotrice. On peut même commander automatiquement la manœuvre de ce rhéostat, de façon à obtenir sans surveillance une différence de potentiel constante entre les bornes, quelles que soient les variations de la résistance extérieure ou de la vitesse de rotation de la machine.

II. — *DYNAMO MOTRICE*

430. Généralités. — Considérons une dynamo qui fonctionne comme génératrice : on fait tourner son induit dans le sens G (*fig.* 488), dans le champ magnétique constant produit par l'inducteur. Si la commutation est correctement effectuée, un conducteur actif quelconque A est parcouru à l'instant t par un courant d'intensité $i = I / 2$, de même sens que la f. é. m. e qui y est induite ; il est soumis à une force électromagnétique $\vec{f}$ dirigée, d'après la loi de Lenz, en sens inverse du mouvement (*fig.* 488). Le système des forces $\vec{f}$ auxquelles sont soumis les différents conducteurs actifs se réduit à un couple Γ : c'est le couple électromagnétique qui s'oppose au mouvement.

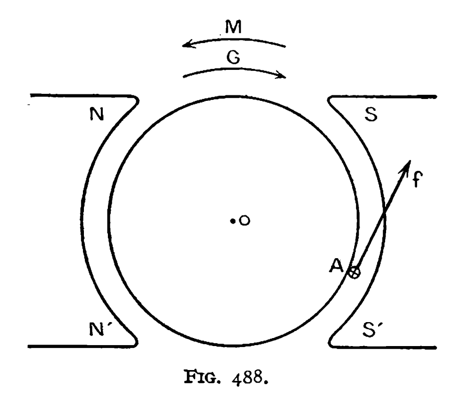


FIG. 488.

Nous pouvons appliquer le théorème général de la corrélation entre les phénomènes d'induction et les phénomènes électromagnétiques au circuit induit, qui est mobile dans le champ magnétique invariable fourni par l'inducteur : l'énergie électrique fournie par la dynamo est égale au travail dépensé contre le couple Γ pour faire tourner l'induit. L'énergie électrique produite par seconde est égale à EI joules, en désignant par I l'intensité en ampères du courant total et par E la f. é. m. totale en volts. Si le couple Γ est évalué en dynes-centimètres, son travail par seconde, pour une rotation de N tours, correspondant à un angle $2\pi N$, est $2\pi N\Gamma$ ergs. On a :

$$2\pi N\Gamma = 10^7 EI, \qquad \text{et} \qquad E = 10^{-8} N n \Phi_0 ;$$

$$\Gamma = \frac{n\Phi_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{10}.$$

Séparons maintenant la dynamo du moteur qui l'entraînait, et supposons-la arrêtée dans la position de la figure 488. Faisons passer, dans les inducteurs et dans l'induit, des courants de même intensité et de même sens que ceux qui parcouraient la dynamo génératrice : le courant I, amené aux balais de la dynamo, se partage exactement de la même façon que tout à l'heure entre les deux moitiés de l'induit ; la déformation du champ magnétique inducteur qu'il produit est la même que dans la dynamo génératrice. Les courants et les champs étant les mêmes, un conducteur actif quelconque A est soumis à la même force $\vec{f}$ que dans la dynamo génératrice ; le système des forces $\vec{f}$ se réduit au couple $\Gamma = \frac{n\Phi_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{10}$, et leur action fait tourner la dynamo dans le sens M de ce couple. La position que nous avons choisie est d'ailleurs quelconque : quand l'induit tourne, la commutation assurée par le collecteur ren-

verse le sens du courant dans chaque spire au moment où elle passe dans le plan de flux maximum, et le couple électromagnétique auquel elle est soumise garde le même sens.

En résumé, *la dynamo, recevant du courant d'une source extérieure, fonctionne comme un moteur ; le couple moteur* Γ *est constant, et indépendant de la vitesse de rotation, à condition que le flux inducteur* Φ_0 *et le courant* I *dans l'induit restent constants ;* son expression est :

$$\Gamma = \frac{n\Phi_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{10} \qquad (\Gamma \text{ dynes-centimètres, } \Phi_0 \text{ maxwells, I ampères}).$$

Pour des sens donnés des courants dans l'inducteur et dans l'induit, le sens de rotation de la dynamo motrice est opposé au sens de rotation de la dynamo génératrice. La commutation doit se faire dans le même plan pour la motrice et la génératrice : *dans la dynamo motrice, les balais doivent être décalés en sens inverse du mouvement.* Il est d'ailleurs particulièrement important pour les moteurs, tels que ceux des tramways, qui peuvent être appelés à tourner dans les deux sens, de réduire l'angle de calage à zéro (cf. § 427).

Lorsque le moteur entraîne une machine lui offrant un couple résistant égal au couple moteur, il tourne à une vitesse constante. S'il fait N tours par seconde, la puissance $\mathcal{P}$ qu'il développe est le travail du couple Γ pour un angle de rotation égal à $2\pi N$:

$$\mathcal{P} = Nn\Phi_0 \frac{I}{10} \text{ ergs-secondes} = 10^{-8} Nn\Phi_0 I \text{ watts.}$$

Le déplacement des conducteurs de l'induit dans le champ magnétique créé par l'inducteur y développe des f. é. m. d'induction : pour une même vitesse de rotation, elles sont les mêmes dans la dynamo motrice que dans la génératrice ; mais elles sont dirigées, dans chaque conducteur actif, en sens inverse du courant qui le parcourt, et elles doivent être considérées comme des forces contre-électromotrices. *La force contre-électromotrice totale du moteur est donnée par la même expression que la force électromotrice totale du générateur ;* sa valeur en volts est :

$$E = 10^{-8} Nn\Phi_0 = \frac{\mathcal{P}}{I}.$$

Il est facile de retrouver directement l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ du moteur. Lorsqu'une spire fait un demi-tour, le flux d'induction qui la traverse varie de $-\Phi_0$ à $+\Phi_0$, et le travail fourni par les forces électromagnétiques est $w = 2\Phi_0 i / 10$; pendant une seconde, elle fait 2N demi-tours, et fournit un travail $W = 4N\Phi_0 i / 10$. Le nombre total de spires est $2k = n / 2$, et le courant dans chaque spire est la moitié du courant total ;le travail total fourni par seconde, c'est-à-dire la puissance, est :

$$\mathcal{P} = \frac{n}{2} \cdot W = 2Nn\Phi_0 \frac{i}{10} = Nn\Phi_0 \frac{I}{10} \text{ ergs-seconde.}$$

On déduira de cette formule la valeur de la force contre-électromotrice, en appliquant le théorème sur la corrélation entre les phénomènes électromagnétiques et les phénomènes d'induction ; on en déduira la valeur de la

force électromotrice de la génératrice, en comparant la dynamo motrice et la dynamo génératrice. Ce calcul est plus simple que celui du paragraphe 425 ; il a l'inconvénient de ne pas montrer que la f. é. m. est constante, et de ne pas donner, à chaque instant, sa répartition entre les différentes spires.

431. Moteur-série. — La dynamo-série ne peut fonctionner comme génératrice que pour un sens de rotation bien déterminé, et peut alors fournir un courant de l'un ou l'autre sens. *Le moteur-série tourne toujours dans le même sens, quel que soit le sens du courant qu'on lui fournit ; le sens de rotation moteur est inverse du sens générateur.* Il est évident que, si l'on change le sens du courant qui parcourt successivement les deux enroulements, on change à la fois, pour chaque conducteur de l'induit, le sens du courant qui le parcourt et le sens du champ auquel il est soumis : on ne change pas le sens de la force qui agit sur lui. Pour changer le sens de rotation du moteur, on doit intervertir les connexions, de façon à changer le sens du courant dans l'induit sans le changer dans l'inducteur.

Lorsqu'on applique aux bornes du moteur une différence de potentiel donnée V, il est parcouru par un courant dont l'intensité I peut être calculée, à partir de sa résistance r et de sa force contre-électromotrice E, par la loi d'Ohm :

$$I = \frac{V - E}{r}.$$

Si l'induit ne tourne pas, la force contre-électromotrice E est nulle, et l'intensité I peut atteindre une valeur dangereuse : le moteur arrêté ne doit pas être connecté directement au réseau de distribution, mais on doit placer en série avec lui un rhéostat, dit **rhéostat de démarrage,** destiné à réduire l'intensité du courant de démarrage. Quand la vitesse et la force contre-électromotrice du moteur augmentent, on diminue progressivement la résistance de ce rhéostat, et on le met en court-circuit quand le régime normal est atteint.

Au moment du démarrage, le courant I qui traverse l'induit et l'inducteur est plus intense que le courant normal, et le flux Φ_0 est également supérieur au flux normal : le couple moteur, qui est proportionnel à $\Phi_0 I$, est notablement plus grand que le couple normal. *Le moteur-série fournit un couple de démarrage énergique,* qui peut être égal à deux fois le couple normal, sans que le courant de démarrage dépasse 1,5 fois le courant normal. C'est là le principal avantage des moteurs-série ; aussi sont-ils presque toujours employés pour les moteurs, tels que ceux des tramways, qui doivent fournir des démarrages fréquents, et produire à ce moment un effort de traction supérieur à l'effort normal.

Le flux Φ_0 varie toujours dans le même sens que le courant I, et il en est de même du couple moteur, qui est proportionnel au produit $\Phi_0 I$. Le courant de régime qui traverse la dynamo, lorsque le couple moteur est égal au couple résistant, est donc d'autant moins intense que le couple résistant est plus faible. Si la différence de potentiel V établie entre les bornes du moteur est maintenue constante, la force contre-électromotrice, $E = V - Ir$, développée lorsque la vitesse de régime est atteinte est d'autant plus grande que le courant I est plus faible ; l'augmentation de la force contre-électromotrice quand le

courant inducteur diminue ne peut provenir que d'une augmentation de la vitesse : *la vitesse de régime d'un moteur-série est d'autant plus grande que le couple résistant est plus faible.*

Si l'on supprime complètement le couple résistant, le courant I doit devenir nul, et la force contre-électromotrice du moteur doit devenir égale à la différence de potentiel V. Comme l'excitation est supprimée, cette force contre-électromotrice ne peut être produite que par une vitesse exagérée du moteur. *Le moteur-série a l'inconvénient de s'emballer à vide* : il nécessite la présence continue d'un surveillant, ou l'emploi d'un régulateur centrifuge introduisant des résistances dans le circuit quand, par suite de la réduction de la charge, la vitesse dépasse une certaine limite.

Comme le couple ne change pas de sens lorsque le courant change de sens, les moteurs-série peuvent être alimentés par du courant alternatif. Les moteurs construits pour utiliser le courant alternatif ne diffèrent que par des détails des moteurs à courant continu : en particulier, le noyau de fer de l'inducteur doit être feuilleté, pour y réduire les courants de Foucault.

432. Moteur-dérivation. — Comme pour le moteur-série, *le sens de rotation du moteur-dérivation est indépendant du sens de la différence de potentiel qui lui est appliquée :* il est évident que si on inverse cette différence de potentiel, on change le sens du courant à la fois dans l'induit et dans l'inducteur, et on ne change pas le sens des forces. Pour changer le sens de rotation du moteur, il faut intervertir les connexions de l'induit et de l'inducteur, de façon à inverser le courant dans l'induit sans l'inverser dans l'inducteur. Les moteurs-dérivation ne peuvent toutefois pas être utilisés en courant alternatif : à

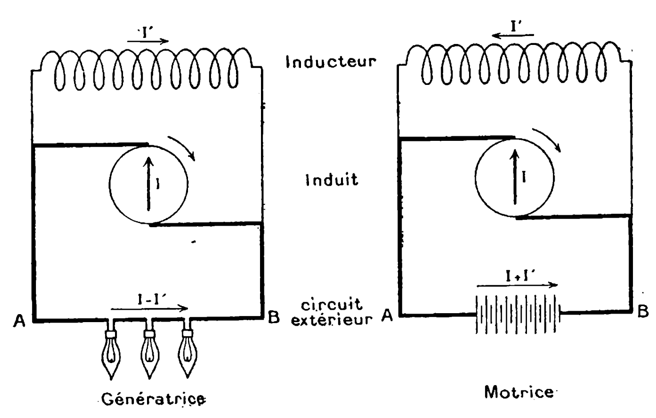


FIG. 489.

cause de la grande self-induction de l'inducteur, il existe une assez grande différence de phase entre les courants produits dans l'induit et dans l'inducteur par une même différence de potentiel alternative, et ces deux courants ne changent pas de sens au même instant.

Nous avons montré que, pour un même sens du courant dans l'induit et dans l'inducteur, le sens de rotation moteur était inverse du sens générateur ; mais on se rend compte immédiatement (*fig.* 489) que, si l'on conserve le

même sens pour le courant I dans l'induit, le sens du courant I' dans l'inducteur change lorsqu'on passe du fonctionnement générateur au fonctionnement moteur. Il en résulte que, *dans la dynamo-dérivation, le sens moteur est le même que le sens générateur.* Cette propriété peut être précieuse, par exemple lorsqu'on charge une batterie d'accumulateurs à l'aide d'un groupe électrogène composé d'un moteur à explosions et d'une dynamo-dérivation.

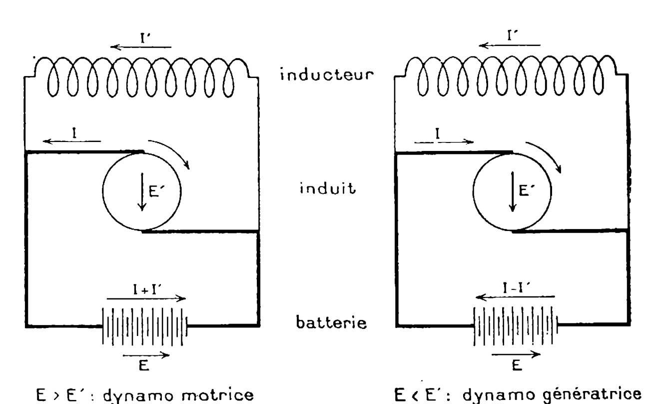


FIG. 490.

Le groupe étant arrêté, on envoie dans la dynamo le courant produit par la batterie : la dynamo fonctionne comme motrice, le groupe se met en route, et il se développe, dans l'induit de la dynamo, une force contre-électromotrice E' opposée à la f. é. m. E de la batterie. Quand le groupe est lancé à une vitesse suffisante, le moteur à explosions démarre ; la vitesse de la dynamo s'accélère, et la force électromotrice d'induction E' devient supérieure à E. A ce moment, le courant I qui passe dans l'induit et dans la batterie change de sens (*fig.* 490), mais le courant I' dans l'inducteur ne change pas de sens ; la f. é. m. E' ne change pas de sens, et la dynamo passe du fonctionnement moteur au fonctionnement générateur.

De même, un ralentissement accidentel du moteur à explosions, entraînant une diminution de E', peut, si E' devient inférieur à E, entraîner une inversion du courant dans l'induit, mais pas dans l'inducteur ; la polarité de la dynamo génératrice ne change pas, et le régime de charge se rétablit de lui-même quand le moteur reprend.

Lorsqu'on maintient entre les bornes AB d'un moteur-dérivation une différence de potentiel constante, l'inducteur est parcouru par un courant d'intensité constante, et le flux Φ_0 reste constant — si l'on néglige la réaction d'induit — que le moteur tourne à vide ou à pleine charge. Le couple moteur, $\Gamma = \frac{n\Phi_0}{2\pi}\frac{I}{10}$, est proportionnel à l'intensité I du courant qui passe dans l'induit : il est naturellement plus fort au démarrage qu'en marche normale, mais son augmentation n'est pas si grande que dans les moteurs-série, parce qu'il n'y a pas augmentation du flux d'induction Φ_0. Le rhéostat de démarrage R' doit d'ailleurs être disposé de façon à ne pas diminuer ce flux (*fig.* 491) ; il doit agir uniquement sur le courant qui passe dans l'induit.

Lorsque le moteur tourne à vide, il prend une vitesse telle que sa force contre-électromotrice E soit presque égale à la différence de potentiel V établie entre ses bornes ; l'induit est alors parcouru par un courant très faible ; mais l'inducteur est toujours parcouru par le courant d'excitation normal ; la f. é. m. $E = V$ ne correspond pas à une valeur exagérée de la vitesse : le moteur-dérivation ne s'emballe pas à vide.

Lorsqu'on le charge, l'induit est parcouru par un courant I d'autant plus fort que la puissance demandée est plus forte ; en désignant par r la résistance de l'induit, la force contre-électromotrice devient $E = V - Ir$. La puissance rI^2 dissipée par effet Joule dans l'induit est toujours petite par rapport à la puissance EI transformée en travail mécanique (cf. § 434) ; la force contre-électromotrice E reste toujours voisine de la différence de potentiel appliquée V. Comme, d'autre part, le flux Φ_0 reste constant, la vitesse, dont la valeur peut être tirée de la relation $E = 10^{-8} Nn\Phi_0$, reste très voisine de la vitesse à vide. *Le moteur-dérivation, fonctionnant sous une différence de potentiel constante, pour une position fixe du rhéostat d'excitation, tourne avec une vitesse constante, quelle que soit sa charge :* entre la marche à vide et la marche à pleine charge, la diminution de vitesse ne dépasse guère 5 o/o. Aussi le moteur-dérivation convient-il bien à la plupart des usages industriels : s'il actionne, par exemple, une machine-outil, la vitesse de l'outil n'est pas modifiée au moment où il commence à travailler.

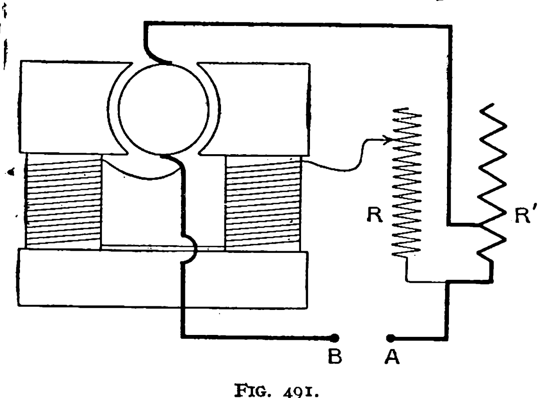


FIG. 491.

Pour modifier la vitesse, il suffit d'agir sur le rhéostat de champ R : si l'on augmente sa résistance, on diminue le courant d'excitation, et par suite le flux inducteur Φ_0; pour que la force contre-électromotrice E reprenne la valeur V, il est nécessaire que la vitesse augmente. *La vitesse d'un moteur dérivation est d'autant plus grande que l'excitation est plus faible.* Pour le démarrage, on mettra naturellement le rhéostat de champ à la résistance o, de façon à avoir un couple de démarrage aussi fort que possible ; ce n'est que lorsque le moteur a atteint le régime correspondant, et que l'on a ramené le rhéostat de démarrage R' à la résistance o, qu'on commence à manœuvrer le rhéostat de champ R pour augmenter la vitesse.

III. — *RENDEMENT DES DYNAMOS*

433. Définition. — Considérons d'abord une dynamo génératrice : nous avons rappelé au paragraphe 430 que la puissance électrique $\mathcal{P}$ développée dans l'induit était égale au travail dépensé par seconde contre les forces électromagnétiques qui agissent sur les conducteurs actifs. Une pa. tie de cette

puissance est dissipée par effet Joule dans les conducteurs même de l'induit, et au contact des balais et du collecteur ; une partie de la puissance électrique disponible entre les balais est employée à entretenir le courant d'excitation et est dissipée par effet Joule dans le circuit inducteur. La puissance électrique $\mathcal{P}_e$ effectivement disponible entre les bornes de la dynamo est donc toujours inférieure à la puissance totale $\mathcal{P}$ développée dans le circuit induit

Lorsque la dynamo fonctionne, le fer doux qui constitue le noyau de l'induit tourne dans le champ magnétique produit par l'inducteur : il est soumis à un couple magnétique dû à l'hystérésis du fer, et à un couple électromagnétique dû aux courants de Foucault qui le parcourent. Il faut dépenser, contre ces couples, un certain travail, qui se transforme finalement en chaleur dans le fer ; il faut de même dépenser du travail pour vaincre les différents frottements. La puissance mécanique $\mathcal{P}_m$ dépensée pour faire tourner la machine est toujours supérieure à la puissance $\mathcal{P}$ transformée en puissance électrique.

La différence :

$$p = \mathcal{P}_m - \mathcal{P}_e$$

représente les pertes à l'intérieur de la dynamo. Le rapport :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}_m} = 1 - \frac{p}{\mathcal{P}_m}$$

s'appelle le **rendement** de la dynamo génératrice.

Un raisonnement analogue peut être fait pour la dynamo motrice. Une partie de la puissance électrique $\mathcal{P}_e$ qui lui est fournie est dépensée dans l'inducteur, une autre partie est dissipée par effet Joule dans l'enroulement de l'induit et au contact des balais ; le reste représente le travail $\mathcal{P}$ que fournissent par seconde les forces électromagnétiques agissant sur les conducteurs. Une partie de ce travail est dépensée contre les couples magnétiques et électromagnétiques dus à l'hystérésis et aux courants de Foucault, une autre partie contre les forces de frottement : le reste constitue la puissance mécanique $\mathcal{P}_m$ disponible sur l'arbre de la machine. Les pertes sont représentées par la différence :

$$p = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_m,$$

et le rendement par le rapport :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_e} = 1 - \frac{p}{\mathcal{P}_e}.$$

On voit que la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique réalisée par une dynamo n'est pas tout à fait une transformation réversible : aux phénomènes réversibles que représente la loi de la corrélation entre les phénomènes électromagnétiques et les phénomènes d'induction se superposent des phénomènes irréversibles créant de la chaleur par effet Joule, par hystérésis ou par frottement. Mais il ne faut pas oublier qu'il n'existe aucun phénomène réel qui soit parfaitement réversible, aucune machine qui fonctionne sans frottement ; nous verrons tout à l'heure que, dans certaines dynamos, les pertes peuvent être réduites à 5 0/0 de l'énergie transformée : *au point de vue pratique, les dynamos peuvent être considérées comme des transformateurs d'énergie réversibles.*

434. Étude des différentes pertes. — a) *Pertes dans le cuivre de l'induit.* — La puissance dissipée par effet Joule dans l'enroulement induit est égale à rI^2 et peut être calculée *a priori ;* elle augmente à mesure qu'on demande à la dynamo une puissance plus grande. L'induit s'échauffe de plus en plus à mesure que la charge augmente ; la température atteinte dépend à la fois de la résistance des conducteurs et de la façon dont leur refroidissement est assuré. Elle ne doit pas devenir exagérée lorsque la dynamo se trouve accidentellement un peu surchargée ; on impose quelquefois aux dynamos de pouvoir fonctionner pendant une heure avec une charge supérieure de 25 0/0 à la charge normale sans que la température de l'induit dépasse de plus de 50 à 60° la température ambiante. On adopte, en général, dans les conducteurs de l'induit une densité de courant de l'ordre de 4 ampères par millimètre carré, et les pertes dans l'induit, dans le fonctionnement à pleine charge, sont de l'ordre de 2 0/0 de la puissance totale.

b) *Pertes dans le cuivre de l'inducteur.* — Ces pertes peuvent également être calculées par la loi de Joule. Dans une dynamo-dérivation, le courant inducteur est à peu près constant quelle que soit la charge, et il en est de même des pertes dans l'inducteur. Le refroidissement est moins bien assuré que dans l'induit, par le fait que les bobines sont fixes au lieu d'être mobiles ; d'autre part, il y a moins d'inconvénient à augmenter le volume et le poids des bobines inductrices fixes que ceux des conducteurs induits mobiles. On ne dépasse guère des densités de courant de 1 à 2 ampères par millimètre carré, et les pertes dans l'inducteur sont de l'ordre de 2 0/0 de la puissance totale.

c) *Pertes dans le fer de l'induit.* — Elles comprennent les pertes par hystérésis et par courants de Foucault ; dans une dynamo-dérivation, où le champ inducteur est constant, elles sont à peu près indépendantes de la charge. Les pertes par hystérésis dépendent essentiellement de la qualité du fer employé ; elles sont d'autant plus grandes que l'induction magnétique est plus élevée, et c'est l'une des raisons pour lesquelles on ne dépasse guère pour cette induction des valeurs de l'ordre de 12.000 dans le corps du noyau. Pour réduire les courants de Foucault, on constitue le tambour par des disques de fer minces, perpendiculaires à l'arbre (§ 221), séparés les uns des autres par du papier ; leur épaisseur est, en général, de l'ordre du millimètre. L'ensemble des pertes dans le fer est de l'ordre de 1,5 0/0 de la puissance totale.

d) *Pertes au contact des balais.* — Il existe, entre les charbons et les lames du collecteur, une résistance de contact assez grande pour produire une perte appréciable d'énergie par effet Joule ; elle diminue lorsqu'on augmente la pression qui appuie les balais sur le collecteur ; mais on augmente alors les forces de frottement, qui produisent aussi une dissipation d'énergie. On admet généralement, pour des balais de graphite, une densité de courant de 4 à 6 ampères par centimètre carré de la surface de contact, avec une pression de l'ordre de 200 grammes par centimètre carré. La valeur de la chute de potentiel ohmique est de l'ordre d'un volt par balai : pour une dynamo fonctionnant sous 500 volts, elle correspond, pour l'ensemble des deux balais, à une perte de l'ordre de 0,5 0/0 de la puissance fournie. Les pertes par frottement des balais sont généralement plus petites, de l'ordre de 0,3 0/0 de la puissance normale de la dynamo ; elles sont indépendantes de la charge.

e) *Pertes par frottement et ventilation.* — Ces pertes, qui sont indépendantes de la charge, comprennent les pertes par frottements dans les paliers, et les

pertes par frottement sur l'air. Ces dernières sont souvent exagérées artificiellement, de manière à assurer une meilleure ventilation et un meilleur refroidissement de l'induit : on peut augmenter la surface de contact de l'induit avec l'air en ménageant des évents dans la pile de tôles qui constitue son armature, ou munir la poulie d'ailettes inclinées qui chassent l'air vers l'induit. L'ensemble des pertes par frottement et ventilation est, en général, de 1 o/o.

Si nous ajoutons les chiffres indiqués pour les différentes pertes, nous trouvons que leur somme est de l'ordre de :

$$2 + 2 + 1,5 + 0,8 + 1 = 7,3$$

pour 100 de la puissance totale. Le rendement $\eta = 1 - p \,/\, \mathcal{P}$ est, de l'ordre de 93 o/o, lorsque la dynamo fonctionne à pleine charge.

Ce n'est là naturellement qu'une valeur moyenne, difficilement atteinte pour les dynamos d'une puissance inférieure à 100 kilowatts, facilement dépassée par les dynamos dont la puissance est de l'ordre de 1.000 kilowatts. On est arrivé, pour des dynamos donnant 2.000 ampères sous 500 volts, à obtenir un rendement de 95 o/o.

435. Détermination expérimentale du rendement. — La valeur de l'énergie perdue autrement que par effet Joule ne peut guère être calculée que par des formules empiriques ; il est donc nécessaire de pouvoir mesurer directement le rendement d'une dynamo.

La puissance électrique absorbée par une dynamo motrice ou fournie par une dynamo génératrice est facile à déterminer : il suffit de disposer d'un wattmètre, ou simplement d'un ampèremètre et d'un voltmètre. La mesure de la puissance mécanique est beaucoup moins facile et moins précise : on peut déterminer la puissance disponible sur l'arbre de la dynamo motrice, à l'aide d'un frein de Prony, ou déterminer la puissance transmise à la dynamo génératrice en mesurant, à l'aide d'un dynamomètre de transmission, la différence des tensions entre les deux brins de la courroie qui l'entraîne. Les pertes dans une dynamo sont d'ailleurs les mêmes, qu'elle fonctionne comme motrice ou comme génératrice, et on pourra choisir, pour la détermination du rendement, l'un ou l'autre mode de fonctionnement, suivant les appareils dont on dispose.

Lorsqu'on dispose d'une dynamo A, dont le rendement η comme génératrice a été déterminé pour les différentes conditions de fonctionnement, on peut mesurer le rendement d'une seconde dynamo quelconque A′ sans avoir à faire de mesure mécanique. On accouple les arbres des deux dynamos d'une façon invariable, et on fournit à la dynamo A′ une puissance électrique $\mathcal{P}'_e$, qu'on mesure par un wattmètre ; la dynamo A′ fonctionne comme motrice ; elle entraîne la dynamo A, qui fonctionne comme génératrice, et fournit une puissance électrique $\mathcal{P}_e$, qu'on mesure par un second wattmètre. On a :

$$\mathcal{P}_e = \eta\eta'\mathcal{P}'_e,$$

et on peut calculer η' puisqu'on connaît η.

Nous avons supposé que le rendement η de la dynamo génératrice avait été déterminé préalablement par des mesures mécaniques. On peut se passer

complètement de mesures mécaniques si les deux dynamos A et A' sont identiques ; les pertes étant toujours faibles, les deux dynamos fonctionnent sous des puissances assez voisines, et comme le rendement varie peu avec la charge au voisinage de la charge normale, on peut admettre que leurs rendements sont égaux. On a :

$$\eta' = \eta = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}'_e}}.$$

La détermination se réduit à la lecture de deux wattmètres, et peut facilement être précise ; les indications des wattmètres n'ont même pas besoin d'être exactes en valeur absolue, car on n'a à mesurer que le rapport de deux puissances, et il est toujours facile de comparer entre eux les deux wattmètres.

Il est indispensable dans ces essais d'accoupler directement par un manchon les arbres des deux machines ; on ne doit pas transmettre la puissance mécanique du moteur A' à la génératrice A par une courroie, car la courroie absorbe une fraction de la puissance, qui est du même ordre — 5 à 10 0/0 — que la fraction perdue dans chaque dynamo.

CHAPITRE XL

PRODUCTION ET UTILISATION DU COURANT ALTERNATIF

I. — *ALTERNATEURS*

436. Alternateurs à induit mobile. — On peut obtenir une force électromotrice alternative à l'aide d'une dynamo à courant continu, dans laquelle on a supprimé le collecteur et réuni le circuit extérieur à des points fixes de l'enroulement induit ; ces connexions s'établissent à l'aide de bagues métalliques solidaires de l'induit, sur lesquelles s'appuient des balais réunis au circuit extérieur.

Lorsque l'induit tourne, une de ses spires est traversée par un flux Φ qui varie périodiquement de Φ_0 à $-\Phi_0$ (cf. § 423) ; on peut, en première approximation, considérer cette variation comme sinusoïdale, et écrire, en désignant par ω la vitesse angulaire :

$$\Phi = \Phi_0 \cos \omega t.$$

Deux spires opposées de l'enroulement, telles que les spires A_1B_1 et $A_{k+1}B_{k+1}$ (§ 424, *fig.* 472 et 473) sont traversées à l'instant t par les deux flux $+\Phi$ et $-\Phi$, égaux et de signes contraires. D'après le raisonnement du paragraphe 425, la f. é. m. totale qui existe à l'instant t dans une des moitiés de l'enroulement, comprise entre les points C_1 et C_{k+1}, est :

$$e = 2\Phi \frac{\omega}{\alpha} \cdot 10^{-8} = 10^{-8} Nn\Phi_0 \cos \omega t.$$

Il existe entre les bagues reliées aux points C_1C_{k+1} une force électromotrice ***alternative, dont la période est celle de la rotation de la dynamo; sa valeur maximum*** *est égale à la valeur $E_0 = 10^{-8} Nn\Phi_0$ de la force électromotrice continue que donne, avec la même excitation, la dynamo employée avec un collecteur.* Sa valeur efficace est :

$$E_e = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 = 0{,}707 E_0.$$

Prenons maintenant sur l'enroulement induit trois points C_1, C_{p+1}, C_{2p+1} qui le partagent en trois parties égales, comprenant chacune $p = 2k/3$

spires (*fig.* 492). Les spires $A_1 B_1$, $A_{p+1} B_{p+1}$ et $A_{2p+1} B_{2p+1}$ sont traversées à l'instant t par les trois flux :

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cos \omega t, \qquad \Phi_{p+1} = \Phi_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \qquad \Phi_{2p+1} = \Phi_0 \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

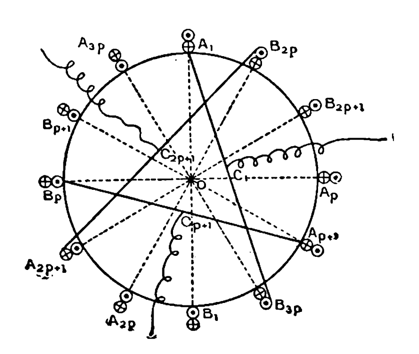


FIG. 492.

La force électromotrice totale qui existe dans la section C_1C_{p+1} est :

$$e = 10^{-8}\frac{\omega}{\alpha}(\Phi_1 - \Phi_{p+1}) = 10^{-8}\sqrt{3}\,\frac{\omega}{\alpha}\,\Phi_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 10^{-8}\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{N}n\Phi_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

ou :

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{E}_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right);$$

les f. é. m. qui existent dans les sections $C_{p+1}C_{2p+1}$ et $C_{2p+1}C_1$ sont de même :

$$e' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{E}_0 \sin(\omega t + \pi), \qquad e'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{E}_0 \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{3}\right).$$

On obtient ainsi un système de forces électromotrices triphasées : en réunissant les trois points C_1, C_{p+1}, C_{2p+1} à trois bagues solidaires de l'induit, on constitue un alternateur triphasé, dont les circuits sont montés en triangle, et qui donne dans chaque circuit une f. é. m. de valeur maximum $\mathrm{E}_0\sqrt{3}/2$, et de valeur efficace $\mathrm{E}_0\sqrt{6}/4 = 0{,}612\ \mathrm{E}_0$.

Les alternateurs à induit mobile sont les plus anciens ; ils sont aujourd'hui à peu près abandonnés, parce que l'existence de contacts glissants sur le circuit de l'induit ne permet pas d'obtenir des f. é. m. élevées.

437. Alternateurs monophasés à induit fixe. — Le principe de ces appareils est le suivant : une bobine à noyau de fer, parcourue par un courant continu, et constituant un puissant aimant NS (*fig.* 493), tourne devant une bobine fixe BB', enroulée sur une carcasse de fer qui ferme le circuit magnétique. Il se développe dans la bobine BB' une f. é. m. d'induction alternative, dont la période est celle de la rotation de l'inducteur. Le circuit induit étant immobile, les connexions qui le relient au circuit d'utilisation peuvent être entièrement recouvertes d'isolant, et l'alternateur peut être construit pour donner une force électromotrice élevée : les valeurs usuelles sont de l'ordre de 12 à 15.000 volts efficaces. Le courant continu d'excitation est amené à l'inducteur par deux bagues sur lesquelles frottent deux balais ; il est produit par une petite dynamo à courant continu, dite *excitatrice*, qui est généralement montée sur le même arbre que l'alternateur.

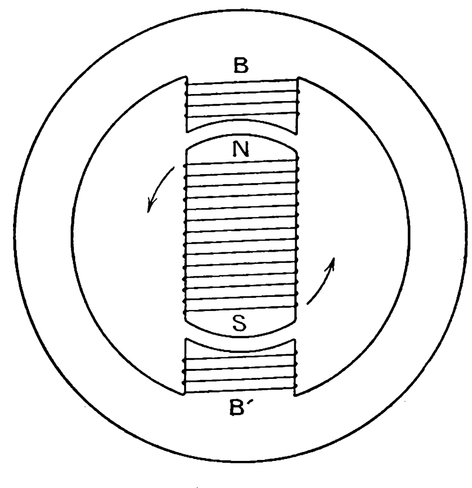


FIG. 493.

Pour obtenir une fréquence égale à 50, il faut que l'inducteur fasse 50 tours par seconde, soit 3.000 tours par minute. Ces vitesses sont réalisées dans certains *turbo-alternateurs*, commandés directement par des turbines à vapeur ;

mais le plus souvent la vitesse de rotation est beaucoup plus faible. On remplace alors la bobine inductrice unique par un système de $2p$ bobines, disposées sur la circonférence d'un volant, et présentant à l'induit alternativement un pôle nord et un pôle sud (*fig.* 494) ; la période de la f. é. m. induite est le temps nécessaire pour qu'un pôle nord ait pris la place du pôle nord précédent : si le nombre de tours par seconde est N, la fréquence obtenue est $\nu = Np$. Le nombre $2p$ est généralement compris entre 6 et 24 : avec 12 pôles ($p = 6$), on réalisera la fréquence de 50 pour une vitesse de 500 tours par minute.

L'induit est constitué par un tambour de fer doux, sur la face intérieure duquel sont ménagées des rainures destinées à loger les bobines induites. Il peut y avoir une ou plusieurs rainures par pôle ; la figure 494 représente le cas le plus simple, où il n'existe qu'une rainure par pôle, et on n'y a figuré qu'une spire par bobine. En suivant l'enroulement d'une extrémité à l'autre, on passe de la face antérieure à la face postérieure par les conducteurs A_1A_2... et on revient de la face postérieure à la face antérieure par les conducteurs B_1B_2... ; on parcourt d'abord toutes les spires de la bobine A_1B_1, puis celles de la bobine A_2B_2, etc. : toutes les bobines sont disposées en série. Le nombre

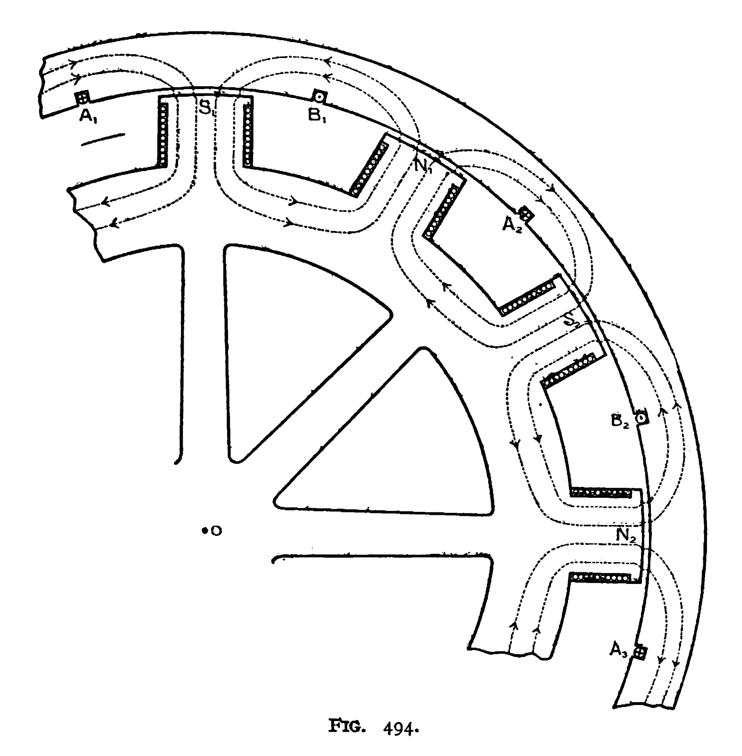


FIG. 494.

des bobines induites A_1B_1, A_2B_2,... est égal au nombre p de paires de pôles ; si chacune d'elles comprend q spires, le nombre total de spires est pq, et le nombre total de conducteurs actifs est $n = 2pq$.

Les lignes d'induction du flux magnétique créé par l'inducteur ont la forme représentée par la figure 494 ; dans la position que représente cette figure, les

bobines inductrices S_1, S_2... se trouvent exactement en face des bobines induites ; si l'on prend comme sens positif sur le circuit induit le sens de l'enroulement tel que nous venons de le définir, le sens positif des normales aux spires est dirigé vers l'axe de l'alternateur; chacune d'elles est traversée par un flux d'induction positif, égal à la totalité du flux Φ_0 créé par la bobine inductrice correspondante. Lorsqu'on fait tourner l'inducteur, la figure formée par les lignes d'induction tourne avec lui ; le flux Φ qui traverse la bobine A_1B_1 diminue, atteint la valeur $-\Phi_0$ quand le pôle N_1 est arrivé en face de A_1B_1, puis augmente à nouveau, et reprend la valeur $+\Phi_0$ quand le pôle S_2 est arrivé en face de A_1B_1. Le flux Φ subit donc une variation périodique symétrique, de fréquence $\nu = Np$; en prenant, comme instant $t = 0$, celui qui correspond à la position de la figure 494, il peut être représenté, en première approximation, par la fonction sinusoïdale :

$$\Phi = \Phi_0 \cos \omega t \qquad (\omega = 2\pi Np).$$

Chacune des spires induites est le siège d'une f. é. m. d'induction :

$$e_1 = -10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} = 10^{-8} . 2\pi Np\Phi_0 \sin \omega t.$$

La f. é. m. induite a même phase dans toutes les spires ; elle passe d'une valeur négative à une valeur positive pour la position représentée par la figure 494. La f. é. m. totale dans l'enroulement induit est :

$$e = \frac{n}{2} e_1 = 10^{-8}\pi Nnp\Phi_0 \sin \omega t.$$

Sa valeur efficace est :

$$E = 10^{-8} \frac{\pi}{\sqrt{2}} Nnp\Phi_0 = 2{,}22 . 10^{-8}Nnp\Phi_0 \text{ volts.}$$

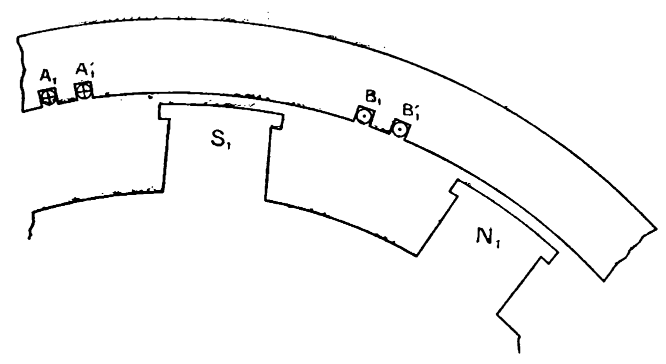


FIG. 495.

S'il y a plusieurs rainures par pôle (*fig.* 495), les f. é. m. induites dans deux bobines voisines A_1B_1 et $A'_1B'_1$ ne sont pas exactement en phase : la valeur efficace de la f. é. m. totale n'est pas exactement la somme des valeurs efficaces des f. é. m. partielles, et il faut remplacer le facteur numérique 2,22 par un facteur un peu plus faible. L'avantage des enroulements comportant

plusieurs rainures par pôle est qu'ils donnent une f. é. m. plus voisine d'une f. é. m. sinusoïdale, et contenant moins d'harmoniques, que les enroulements à une seule rainure.

438. Intensité du courant et différence de potentiel aux bornes. — Lorsqu'on ferme le circuit de l'induit sur un circuit extérieur, il s'y produit un courant alternatif. Si l'on connaît les caractéristiques du circuit extérieur, et la différence de potentiel efficace V qui existe entre les bornes de l'alternateur, il est facile de calculer l'intensité efficace I du courant, et la différence de phase φ entre le courant i et la différence de potentiel v. Pour chercher comment V diffère de la valeur efficace E de la f. é. m., nous assimilerons l'enroulement induit à un conducteur sans résistance, de self-inductance L. On a alors à chaque instant :

$$v = e - L\frac{di}{dt}.$$

En représentant cette relation par la construction géométrique que nous avons indiquée au paragraphe 294, on obtient la figure 496 : le courant i est représenté par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ faisant un angle φ avec le vecteur $\overrightarrow{OC}$ qui représente la différence de potentiel v; au terme $L\, di/dt$ correspond un vecteur $\overrightarrow{CD}$, de longueur $L\omega I$, faisant un angle $\pi / 2$ avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Comme on a, en général, $\varphi > 0$, la différence de potentiel efficace représentée par la longueur OC est inférieure à la f. é. m. efficace E représentée par la longueur OD ; leur différence est d'autant plus grande que l'angle φ est plus grand. Il est d'ailleurs facile de la déterminer expérimentalement, car la valeur de E n'est autre que la différence de potentiel aux bornes à circuit ouvert. Lorsqu'on passe du fonctionnement à vide au fonctionnement en pleine charge, on observe en général une chute de tension comprise entre 5 et 10 pour 100, pour $\cos\varphi = 1$; elle peut atteindre 20 et 25 pour 100 pour $\cos\varphi = 0,8$. Dans la pratique, on maintient la différence de potentiel aux bornes constante pour toutes les charges et tous les déphasages, en modifiant le courant d'excitation.

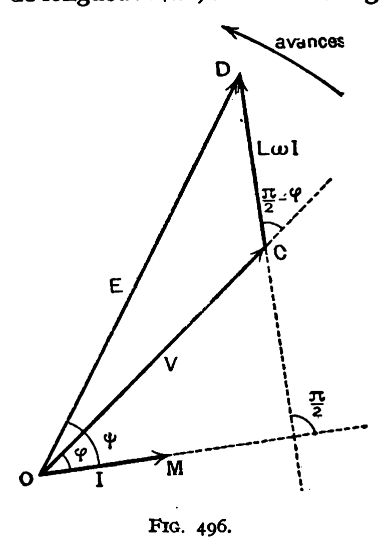


FIG. 496.

On peut déterminer expérimentalement la valeur de l'impédance $L\omega$ en mettant l'alternateur en court-circuit : si l'on admet que la f. é. m. efficace E conserve la même valeur, l'intensité efficace I_c du courant de court-circuit est $I_c = E / L\omega$. Dans les alternateurs actuels, l'intensité I_c est égale à deux ou trois fois l'intensité normale du courant fourni par l'alternateur fonctionnant à pleine charge. Il en résulte que, dans le diagramme de la figure 496 relatif au fonctionnement normal, la longueur du vecteur CD est deux ou trois fois

plus petite que celle du vecteur OD : en prenant OD = 2,5 CD, le diagramme donne, pour cos φ = 1, V = 0,92E, et pour cos φ = 0,8, V = 0,70E.

Il est bien entendu que ces calculs ne constituent qu'une première approximation. L'induit possède une résistance r, et une partie de la chute de tension — 1 à 2 pour 100 — correspond à la chute de potentiel ohmique rI. La self-inductance du circuit induit n'est pas définie, puisqu'il comporte un noyau de fer (§ 230). Enfin la force électromotrice produite par un courant inducteur donné diminue quand l'intensité du courant induit augmente, car il existe dans l'alternateur une réaction d'induit, analogue à celle des dynamos.

439. Puissance et rendement. — Si nous désignons par ψ la différence de phase entre la force électromotrice e et le courant i, la puissance électrique créée par l'alternateur est donnée, à partir de leurs valeurs efficaces E et I, par la relation :

$$\mathcal{P} = \text{EI} \cos \psi.$$

Les données caractéristiques d'un alternateur sont les valeurs efficaces de la f. é. m. E qu'il développe et de l'intensité I du courant maximum qu'il peut supporter normalement ; lorsqu'il fonctionne dans les conditions ainsi définies, sa puissance dépend du *facteur de puissance* cos ψ. Aussi ne caractérise-t-on

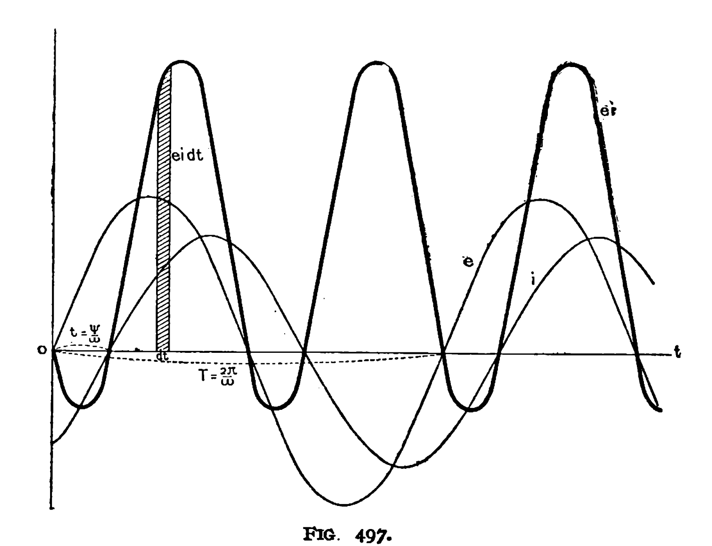


FIG. 497.

pas les différents types d'alternateurs par leur puissance $\mathcal{P}$ en kilowatts, mais par la valeur du produit EI en kilovolts-ampères.

L'énergie électrique produite par l'alternateur entre les instants t et $t + dt$ est :

$$d\text{W} = ei\, dt.$$

Représentons les deux fonctions $e = \text{E}\sqrt{2} \cos \omega t$ et $i = \text{I}\sqrt{2} \cos (\omega t - \psi)$ par les deux sinusoïdes de la figure 497 ; le produit ei est représenté par

une sinusoïde de fréquence double, et il existe des instants où il est négatif, c'est-à-dire où l'alternateur absorbe de l'énergie électrique. Nous avons dans l'alternateur un champ magnétique invariable, qui tourne avec l'inducteur devant un circuit induit fixe ; les couples et les f. é. m. ne dépendent que du mouvement relatif, et nous pouvons encore appliquer à chaque instant la loi de la corrélation entre les phénomènes électromagnétiques et les phénomènes d'induction : l'énergie électrique $ei\,dt$ qui apparaît pendant le temps dt est égale au travail dépensé, pendant le même temps, contre les forces électromagnétiques. *L'alternateur absorbe du travail, et oppose par suite au moteur qui l'entraîne un couple résistant, pendant la plus grande partie de la période* ($ei > 0$) ; *mais il y a une partie de la période pendant laquelle le couple devient moteur* ($ei < 0$). Ces variations du couple occasionnent toujours des vibrations, qui se traduisent par des ronflements plus ou moins sonores.

On peut se rendre compte, par un raisonnement direct, du sens du couple électromagnétique qui agit sur l'inducteur mobile. Si le courant qui parcourt la bobine A_1B_1 est en phase avec la f. é. m. ($\psi = 0$), il change de sens à l'instant $t = 0$, pour la position de l'inducteur représentée par la figure 494 ; la face intérieure de chacune des bobines induites, qui était auparavant un pôle sud, devient à ce moment un pôle nord. Avant que le pôle S_1 arrive à cette position, il était repoussé par la bobine A_1B_1; après qu'il l'a dépassée, il est attiré; de même, avant l'instant $t = 0$, le pôle N_1 était attiré par la bobine A_2B_2, et il est ensuite repoussé par la bobine A_1B_1. Les forces s'opposent constamment au mouvement, le couple résultant est toujours résistant.

Si le courant présente un retard ψ, il ne change de sens qu'après que l'inducteur s'est écarté de la position représentée par la figure 494 d'un angle α, lié à l'angle α_0 des deux pôles S_1S_2 par la relation $\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\psi}{2\pi}$; pendant que l'inducteur tourne de l'angle α, la bobine A_1B_1 repousse le pôle S_1 et attire le pôle N_1 : il est soumis à un couple moteur. Pour une même intensité de courant et une même excitation, la puissance mécanique :

$$\mathfrak{P} = EI \cos\psi = EI \cos 2\pi \frac{\alpha}{\alpha_0},$$

consommée par l'alternateur diminue à mesure que les angles ψ et α augmentent en valeur absolue ; elle devient nulle pour $\psi = \pm \pi / 2$, ou $\alpha = \pm \alpha_0 / 4$.

La puissance électrique effectivement disponible à l'extérieur de l'alternateur est :

$$\mathfrak{P}_e = VI \cos\varphi.$$

Dans l'hypothèse à laquelle correspond le diagramme de la figure 496, on a $V \cos\varphi = E \cos\psi$, et la puissance disponible $\mathfrak{P}_e$ est égale à la puissance créée $\mathfrak{P}$. Il n'en est naturellement pas ainsi, et l'on a toujours $\mathfrak{P}_e < \mathfrak{P}$. De même, la puissance mécanique $\mathfrak{P}_m$ absorbée par l'alternateur est toujours supérieure à $\mathfrak{P}$: la différence $p = \mathfrak{P}_m - \mathfrak{P}_e$ représente la puissance dissipée dans l'alternateur, par effet Joule dans l'induit, par hystérésis et courants de Foucault dans le fer, par les frottements et la ventilation. Pour calculer le rendement η, il faut encore tenir compte de la puissance électrique p_e consommée pour en-

tretenir le courant d'excitation, et dissipée en chaleur dans le cuivre de l'inducteur. On a :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}_m + p_e} = 1 - \frac{p + p_e}{\mathcal{P}_m + p_e}.$$

440. Alternateurs polyphasés. — Le schéma de la figure 494 montre qu'il reste beaucoup de place disponible sur la carcasse de l'induit entre les rainures contenant les conducteurs induits ; même lorsqu'on met plusieurs bobines par pôle, on ne peut pas les écarter beaucoup l'une de l'autre, parce que les forces électromotrices obtenues ne seraient plus en phase. Lorsqu'on ajoute de nouvelles bobines, on se trouve conduit à les grouper séparément, et à constituer ainsi plusieurs enroulements distincts, dans lesquels les f. é. m. sont décalées d'un certain angle : l'appareil réalisé est un alternateur polyphasé.

La figure 498 représente le schéma de l'enroulement d'un alternateur tri-

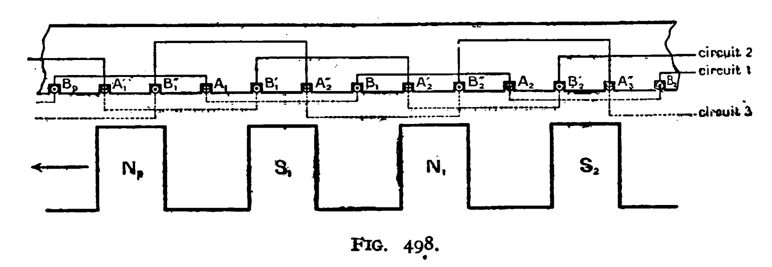


FIG. 498.

phasé, ne comportant qu'une rainure par phase et par pôle. Pour simplifier le dessin, on a représenté la circonférence de l'induit par une droite, et on n'a figuré qu'une spire par bobine ; les connexions entre les conducteurs actifs sont représentées en traits pleins lorsqu'elles se trouvent sur la face antérieure du tambour, en traits ponctués lorsqu'elles sont sur la face postérieure ; pour plus de clarté, on a figuré ces dernières connexions dans l'entrefer, dont la largeur a été considérablement exagérée. L'enroulement se compose de trois circuits entièrement distincts $A_1B_1A_2B_2 \dots A_pB_p$, $A'_1B'_1A'_2 \dots B'_p$ et $A''_1B''_1A''_2 \dots B''_p$; les bobines qui les constituent sont décalées, d'un circuit au suivant, d'une distance égale au tiers de la distance S_1S_2 de deux pôles consécutifs de même sens.

Si l'on considère un quelconque des trois circuits, il est identique au circuit induit d'un alternateur monophasé, et on peut lui appliquer les résultats obtenus aux paragraphes précédents. Un pôle tel que S_2 passe en face de deux bobines telles que A_2B_2 et $A'_2B'_2$ à des instants séparés par un temps égal au tiers de la période, et les f. é. m. qu'il y induit présentent entre elles une différence de phase égale à $2\pi / 3$. Les trois enroulements fournissent un système de forces électromotrices triphasées :

$$e = E\sqrt{2}\cos\omega t, \qquad e' = E\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad e'' = E\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

On pourrait utiliser les courants produits dans trois circuits distincts ; mais pour réduire le nombre de fils nécessaires au transport de l'énergie (§ 446), on réunit toujours les trois enroulements induits, soit en triangle, soit en étoile (§ 306). On préfère généralement le montage en étoile, qui permet de définir

un point neutre, et évite les courants intérieurs lorsque les trois circuits sont inégalement chargés.

Si les trois circuits extérieurs sont identiques, les trois enroulements sont parcourus par un système de courants triphasés :

$$i = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \psi), \qquad i' = I\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \psi - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad i'' = I\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \psi - \frac{4\pi}{3}\right),$$

et la puissance développée par l'alternateur est :

$$\mathfrak{P} = 3EI\cos\psi.$$

L'énergie électrique produite entre les instants t et $t + dt$ est :

$$dW = (ei + e'i' + e''i'')\,dt.$$

En remplaçant chacune des quantités ei, $e'i'$, $e''i''$ par sa valeur :

$$ei = 2EI\cos\omega t\cos(\omega t - \psi) = EI\left[\cos(2\omega t - \psi) + \cos\psi\right],$$

$$e'i' = 2EI\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \psi - \frac{2\pi}{3}\right) = EI\left[\cos\left(2\omega t - \psi - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\psi\right],$$

$$e''i'' = 2EI\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \psi - \frac{4\pi}{3}\right) = EI\left[\cos\left(2\omega t - \psi - \frac{8\pi}{3}\right) + \cos\psi\right],$$

on obtient :

$$dW = 3EI\cos\psi\,dt + EI\left[\cos(2\omega t - \psi) + \cos\left(2\omega t - \psi - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(2\omega t - \psi - \frac{2\pi}{3}\right)\right]dt.$$

La somme contenue entre crochets est identiquement nulle (§ 306). La puissance électrique instantanée, dW/dt, est constante, et il en est de même de la puissance mécanique absorbée à chaque instant par l'alternateur : *le couple résistant opposé par un alternateur polyphasé au moteur qui l'entraîne reste constant pendant toute la période.*

Les alternateurs polyphasés sont évidemment plus économiques que les alternateurs monophasés : il suffit, en effet, d'ajouter deux enroulements supplémentaires sur la carcasse de l'alternateur monophasé pour tripler la puissance, sans que le poids et le prix de revient des parties autres que l'enroulement induit augmentent sensiblement. Leur rendement est également meilleur, car seules les pertes par effet Joule dans l'induit sont triplées, les autres pertes restant à peu près les mêmes.

Le nombre de cycles d'hystérésis par seconde est, en général, plus grand dans les alternateurs que dans les dynamos, et les pertes dans le fer sont plus importantes : elles sont de l'ordre de 2 à 3 pour 100 de la puissance totale. Les pertes par effet Joule dans les conducteurs induits peuvent au contraire être plus faibles que dans les dynamos, parce que les différences de potentiel sont de plusieurs milliers de volts, et qu'à une même puissance correspond une intensité moins grande : elles sont de l'ordre de 1 à 2 pour 100 à pleine charge ; les pertes par effet Joule dans l'inducteur sont aussi de l'ordre de 1 à 2 pour 100. Le rendement dépend de la valeur du facteur de puissance $\cos\varphi$: lorsque $\cos\varphi$ diminue, la puissance disponible $\mathfrak{P}_e = VI\cos\varphi$ diminue, sans que les pertes diminuent ; au contraire, comme il faut augmenter l'excitation pour maintenir

constante la différence de potentiel aux bornes V, les pertes par effet Joule dans l'inducteur et les pertes dans le fer augmentent. Le rendement des grands alternateurs triphasés est généralement compris, compte tenu des frottements entre 90 et 95 pour 100; l'emploi des tôles au silicium (§ 449) permet d'atteindre 98 pour 100, à cos $\varphi = 0{,}8$, pour les turbo-alternateurs de plus de 100.000 kilovolts-ampères que l'on sait maintenant construire.

441. Alternateurs à fer tournant. — Un circuit fixe est le siège d'une f. é. m. alternative quand le flux magnétique qui le traverse subit une variation périodique; on peut produire cette variation, avec un inducteur fixe, en modifiant périodiquement la réluctance du circuit magnétique. C'est là le principe des alternateurs à fer tournant, dans lesquels les deux enroulements inducteur et induit sont immobiles.

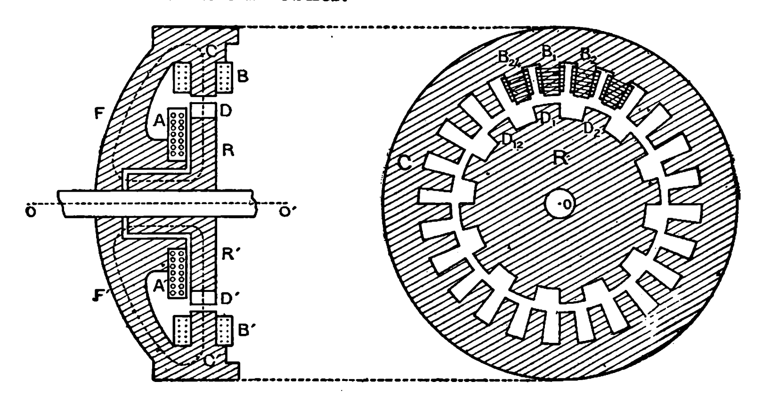


Fig. 499.

La figure 499 représente schématiquement le modèle d'un petit alternateur de 300 volts-ampères. Le flux magnétique est produit par la bobine inductrice fixe AA'; le circuit magnétique est constitué par une roue mobile en fer RR', un noyau d'induit CC' et une flasque en fer FF'. La roue RR' porte 12 dents $D_1 \dots D_{12}$, et le noyau CC' porte 24 encoches, dans lesquelles sont disposées 24 bobines induites $B_1 \dots B_{24}$. Le flux d'induction passe presque entièrement par les dents, qui opposent à son passage une réluctance moindre que l'espace compris entre elles; lorsque les douze dents D se trouvent en face des douze bobines impaires $B_1 B_3 \dots B_{23}$, chacune de ces bobines est traversée par un flux Φ_0, tandis que le flux qui traverse les douze bobines paires $B_2 \dots B_{24}$ est pratiquement nul. Quand la roue tourne, le flux qui traverse chaque bobine

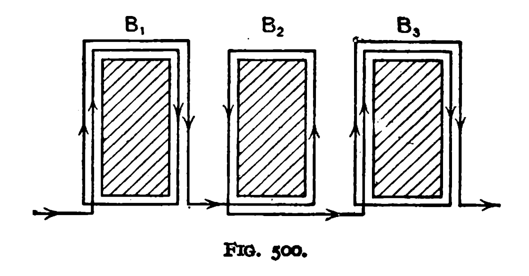


Fig. 500.

varie périodiquement de Φ_0 à 0 et de 0 à Φ_0 : il y produit une f. é. m. d'induction alternative, dont la période est le temps nécessaire pour que la roue avance d'une dent. La vitesse de rotation normale est de 4.500 tours par minute, soit 75 tours par seconde, et la fréquence est $75 \times 12 = 900$. Les f. é. m. sont en phase dans deux bobines de même parité, elles sont en opposition de phase dans deux bobines consécutives ; les 24 bobines sont disposées en série, deux bobines consécutives étant enroulées en sens inverse (*fig.* 500), de façon que toutes les f. é. m. soient en phase et s'ajoutent.

L'absence d'enroulements sur la partie mobile d'un alternateur à fer tournant permet de lui donner une vitesse beaucoup plus grande qu'à l'inducteur mobile d'un alternateur ordinaire, et, par suite, d'obtenir une fréquence beaucoup plus élevée ; on a pu, avec des dentures de petites dimensions, obtenir des fréquences de 20.000 (Alexanderson). Comme les pertes dans le fer par courants de Foucault augmentent comme le carré de la fréquence, on doit constituer les parties soumises au champ de haute fréquence par des tôles très minces. Les alternateurs de haute fréquence ont été employés pour fournir directement les courants destinés à alimenter une antenne de télégraphie sans fil; on a pu réaliser des puissances de 500 kilowatts, avec un rendement qui dépasse 60 pour 100.

II. — *MOTEURS A COURANT ALTERNATIF*

442. Moteurs synchrones. — Nous avons déjà étudié, sur un dispositif schématique, les moteurs synchrones à courants polyphasés (§§ 308 et 309). Nous avons montré que, lorsqu'un aimant tourne à la vitesse du synchronisme dans le champ tournant produit par un système de courants triphasés, il développe un couple moteur constant, dont la valeur, $\Gamma = \mathrm{MH} \sin \alpha$, dépend de l'angle constant α que forment l'aimant et le champ tournant. Nous avons également remarqué que le dispositif indiqué pouvait constituer un alternateur, et que l'alternateur et le moteur synchrone étaient un seul et même appareil, susceptible de réaliser la transformation réversible — aux pertes près — de l'énergie mécanique en énergie électrique ; le sens de la transformation dépend du retard que présente le mouvement de l'aimant sur la phase du courant.

Cette propriété est générale, et un alternateur quelconque peut être employé comme moteur synchrone. Étudions par exemple le cas de l'alternateur monophasé du paragraphe 437. Lorsqu'il fonctionne comme alternateur, il produit à l'instant t une f. é. m. $e = \mathrm{E}\sqrt{2} \cos \omega t$, un courant $i = \mathrm{I}\sqrt{2} \cos (\omega t - \psi)$, et oppose au moteur qui l'entraîne un couple résistant Γ_i ; il absorbe une puissance mécanique moyenne $\mathcal{P} = \mathrm{EI} \cos \psi$, qu'il transforme en énergie électrique.

Supposons maintenant que, le circuit induit étant parcouru par le même courant $i = \mathrm{I} \sqrt{2} \cos (\omega t - \psi)$, l'inducteur, excité de la même façon, tourne à la même vitesse, dans le même sens, mais que son mouvement soit décalé, par rapport au mouvement primitif, de l'angle $\alpha_0 / 2$ de deux pôles consécutifs N_1S_1 : cela revient à dire qu'à chaque instant il y a, à la place où était la bobine N_1, une bobine S_1 enroulée en sens contraire. Le couple qui s'exerce sur

l'inducteur conserve la même valeur absolue, mais change de signe : c'est, en valeur moyenne, un couple moteur. *A chaque régime de fonctionnement comme générateur correspond un régime de fonctionnement comme moteur ; on passe de l'un à l'autre régime en conservant les mêmes courants et en décalant le mouvement de l'inducteur d'un angle $\alpha_0 / 2$, correspondant à une demi-période.*

La force électromotrice induite dans l'enroulement fixe par l'inducteur mobile conserve la même valeur efficace dans les deux régimes ; mais, dans le régime moteur, elle est retardée d'une demi-période par rapport au régime générateur. Nous pourrons conserver la même expression, $e = E \cos \omega t$, et, par conséquent, conserver la même valeur pour l'angle ψ dans les deux régimes correspondants, à condition de changer le sens positif suivant lequel nous comptons e ; dans le moteur, nous compterons les courants et les f. é. m. positivement suivant des sens opposés, autrement dit, nous considérerons e comme une force contre-électromotrice. L'expression $\mathfrak{P} = EI \cos \psi$ représente alors la puissance électrique consommée par le moteur.

Nous avons montré (§ 439) que si, au moment où le courant dans l'induit passe d'une valeur négative à une valeur positive ($t = \psi / \omega$), l'inducteur se trouve dans une position distante d'un angle α de celle que représente la figure 494, la puissance mécanique transformée par l'alternateur en puissance électrique est :

$$\mathfrak{P} = EI \cos\psi = EI \cos 2\pi \frac{\alpha}{\alpha_0}.$$

Le fonctionnement générateur correspond à des valeurs de α comprises entre $-\frac{\alpha_0}{4}$ et $+\frac{\alpha_0}{4}$; le fonctionnement moteur à des valeurs de α comprises entre $+\frac{\alpha_0}{2}$ et $+\frac{\alpha_0}{4}$, ou entre $-\frac{\alpha_0}{4}$ et $-\frac{\alpha_0}{2}$. Au fonctionnement générateur pour lequel l'inducteur a une avance α, correspond un fonctionnement moteur dans lequel il a une avance $\alpha - \frac{\alpha_0}{2}$, c'est-à-dire un retard $\alpha' = \frac{\alpha_0}{2} - \alpha$. Posons $\alpha' = \frac{\alpha_0}{4} + \beta$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\alpha_0}{4} - \beta$; la puissance électrique transformée par le moteur en puissance mécanique est :

$$\mathfrak{P} = EI \cos 2\pi \frac{\alpha}{\alpha_0} = EI \sin 2\pi \frac{\beta}{\alpha_0}.$$

Cette formule est analogue à celle que nous avons trouvée pour le moteur schématique à champ tournant : elle montre (cf. § 308) que, **à courant constant,** le fonctionnement est stable quand l'angle β est compris entre 0 et $\alpha_0 / 4$, et le retard α' entre $\alpha_0 / 4$ et $\alpha_0 / 2$; l'angle β atteint $\alpha_0 / 4$ quand la puissance demandée devient égale à EI ; le moteur se décroche quand elle devient plus grande.

Les mêmes raisonnements pourraient être répétés pour l'alternateur triphasé du paragraphe 440 : la puissance consommée est alors $\mathfrak{P} = 3EI \cos \psi$, et le couple moteur est constant pendant toute la période.

443. Fonctionnement sous une différence de potentiel donnée. — En

général, un moteur est alimenté par une distribution à tension constante : son fonctionnement s'effectue sous une différence de potentiel efficace aux bornes V donnée. D'autre part, puisque sa vitesse est toujours celle du synchronisme, la valeur efficace E de sa force contre-électromotrice ne dépend que de l'intensité du courant d'excitation. Les variations de la charge produisent des variations de l'intensité efficace I du courant alternatif consommé, et de son retard φ sur la différence de potentiel.

On a, en première approximation (cf. § 438) :

$$v = e + \mathrm{L}\frac{di}{dt}.$$

relation qui est représentée graphiquement par la figure 501 (cf. *fig.* 496, § 438). La différence de potentiel v y est représentée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, la force contre-électromotrice e par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, et la quantité L $di\,/\,dt$ par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, de longueur LωI, faisant l'angle $\pi\,/\,2$ avec le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ qui représente le courant i. La puissance du moteur :

$$\mathcal{P} = \mathrm{VI}\cos\varphi = \mathrm{EI}\cos\psi,$$

est représentée, à un facteur constant près, par l'aire du triangle OCD, dont la hauteur ON est égale à V cos φ ou E cos ψ ; puisque V est constant, elle est proportionnelle à la hauteur CH de ce triangle.

Si la puissance demandée au moteur augmente, l'excitation restant constante, le point C se déplace sur une circonférence de centre O, de C vers C'. La longueur CD = LωI augmente, l'intensité I du courant augmente. Dans les moteurs bien construits, on n'a pas à craindre le décrochage par surcharge, car l'intensité du courant devient exagérée avant qu'on n'atteigne les régimes voisins de la limite de stabilité.

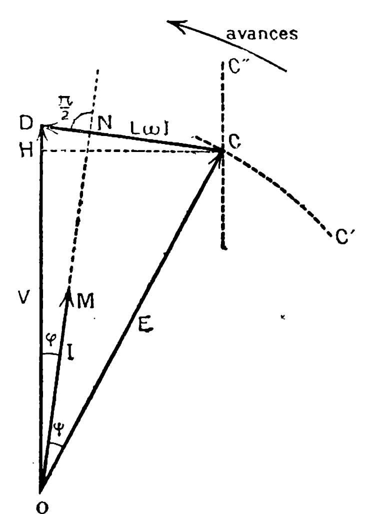


FIG. 501.

Si, la charge restant constante, on augmente l'intensité du courant d'excitation, on augmente la force contre-électromotrice E : le point C se déplace sur une droite parallèle à OD, de C vers C''. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, se rapproche de $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$: le déphasage φ diminue. *Un moteur synchrone peut avoir une force contre-électromotrice supérieure, en valeur efficace, à la différence de potentiel aux bornes ; le moteur surexcité peut fonctionner avec un facteur de puissance cos φ égal à l'unité ; il peut même prendre un courant en avance sur la différence de potentiel.*

C'est là un des principaux avantages des moteurs synchrones : leur emploi relève le facteur de puissance du réseau sur lequel ils sont placés, et améliore

les conditions de fonctionnement du réseau et de l'usine génératrice. Ils présentent également l'avantage d'avoir un excellent rendement, identique à celui qu'ils auraient en fonctionnant comme alternateurs.

Leurs principaux inconvénients sont qu'on doit leur adjoindre une petite dynamo à courant continu pour produire le courant d'excitation, et qu'ils ne fournissent un couple moteur que lorsqu'ils tournent à la vitesse du synchronisme. *Ils ne peuvent pas démarrer par eux-mêmes* : on doit, avant de les accrocher sur le réseau, les lancer à la vitesse du synchronisme ; le rotor peut, par exemple, porter des barres de cuivre formant une cage d'écureuil (§ 444), permettant le démarrage en moteur asynchrone.

Ils conviennent particulièrement pour les moteurs qui doivent fonctionner sans arrêt, à vitesse constante ; c'est ainsi qu'ils sont employés dans de nombreuses installations de traction, pour actionner, dans les sous-stations, des génératrices à courant continu, de façon à distribuer, en courant continu à moyen voltage, l'énergie amenée de l'usine principale par des lignes à courant alternatif à haut voltage.

444. Moteurs asynchrones polyphasés. — Ces moteurs sont des moteurs à champ tournant dont le type peut être représenté par le dispositif que nous avons étudié au paragraphe 310. Dans un champ tournant de vitesse angulaire ω_0, on place un cadre fermé de résistance r et de self-inductance
si le cadre tourne dans le même sens que le champ, avec une vitesse angulaire ω inférieure à ω_0, il est soumis à un couple moteur dont la valeur moyenne est :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0^2 r\ (\omega_0 - \omega)}{r^2 + L^2\ (\omega_0 - \omega)^2}.$$

Nous avons montré que, à courant inducteur constant, on obtient un fonctionnement stable, pour un couple résistant compris entre 0 et $\Phi_0^2 / 4L$; la vitesse angulaire diminue à mesure que le couple augmente, mais elle reste toujours voisine de la vitesse ω_0 de synchronisme ; dans la pratique, elle ne lui est jamais inférieure de plus de 4 pour 100. En introduisant des résistances supplémentaires dans le circuit induit, le moteur peut démarrer en charge ; on peut amener le couple de démarrage à être égal au couple normal.

L'inducteur d'un moteur asynchrone polyphasé est en général un inducteur à tambour, analogue à l'induit d'un alternateur polyphasé (*fig.* 498, § 440). Comme dans l'alternateur fonctionnant en moteur synchrone, la vitesse ω_0 de synchronisme est celle pour laquelle l'angle décrit par période est égal à la distance angulaire de deux bobines A_1B_1, A_2B_2 : il lui correspond un nombre de tours par seconde égal à la fréquence divisée par le nombre de paires de pôles.

L'induit est un tambour de fer doux, tournant à l'intérieur de l'inducteur, et portant des conducteurs de cuivre logés dans des rainures ; ces conducteurs forment des spires, dont les orientations sont différentes, et dont le nombre est assez grand pour que le couple soit constant, quelle que soit la position de l'induit par rapport à l'inducteur. Comme il n'existe pas de différence de potentiel sensible entre leurs divers points, les conducteurs actifs *a* peuvent n'être pas isolés du fer de l'armature, et être réunis à leurs deux extrémités par des couronnes de cuivre *b* pour former une **cage d'écureil** (*fig.* 502). La cage d'écureuil n'est d'ailleurs utilisée que pour les moteurs de faible puissance : pour les puissances supérieures à 5 ou 6 kilowatts, l'induit comporte

un enroulement isolé, aboutissant à des bagues, qui permettent d'y introduire des résistances supplémentaires au moment du démarrage.

Le moteur asynchrone polyphasé présente en somme les mêmes éléments constitutifs que les transformateurs que nous étudierons plus loin : les enroulements inducteurs y constituent les circuits primaires, les enroulements induits les circuits secondaires, et ces divers enroulements se trouvent bobinés autour d'un circuit magnétique commun constitué par le noyau de fer de l'induit et la carcasse de l'inducteur. Lorsque le moteur ne tourne pas, il se comporte comme un transformateur dont le secondaire serait en court-circuit : l'application aux bornes du primaire de la différence de potentiel fournie par le réseau y produirait, aussi bien dans le primaire que dans le secondaire, des courants extrêmement intenses, susceptibles de détériorer les enroulements. L'introduction des résistances de démarrage entraîne, outre l'augmentation du couple, une réduction des intensités de courant par suppression du court-circuit secondaire.

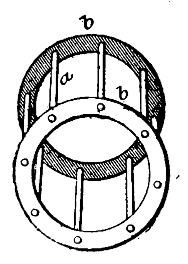


FIG. 502.

Lorsque le moteur tourne avec la vitesse angulaire ω, la vitesse du champ tournant par rapport au secondaire est $\omega_0 - \omega$. Pour la vitesse du synchronisme, le flux à travers le secondaire cesse d'être variable et le courant secondaire s'annule : l'appareil se comporte comme un transformateur à circuit secondaire ouvert, et le circuit primaire n'emprunte au réseau qu'un courant de très faible intensité. Si l'appareil se comportait tout à fait comme un transformateur, le flux magnétique total Φ qui le traverse lorsqu'il est alimenté sous une différence de potentiel constante, comme c'est toujours le cas dans la pratique, aurait une valeur efficace indépendante des conditions de fonctionnement, et en particulier de la vitesse de rotation (cf. § 447). L'intensité efficace du courant secondaire $i = - d\Phi/r\,dt$, serait proportionnelle à $\omega_0 - \omega$, et comme ce courant est toujours en quadrature avec le flux, le couple serait aussi proportionnel à $\omega_0 - \omega$. Mais en réalité le flux n'est pas le même à travers les circuits primaire et secondaire; à cause de la disposition des enroulements, la dispersion magnétique est beaucoup plus grande que dans le transformateur. On peut, comme première approximation, admettre que le flux Φ qui traverse le circuit secondaire se compose d'une partie de valeur efficace constante, $\Phi_0 \cos(\omega_0 - \omega)t$, produite à la fois par les deux courants primaire et secondaire, et d'une partie Li produite par le seul courant secondaire i : dans cette hypothèse, les calculs du paragraphe 310 restent valables, avec la seule différence que L ne représente qu'une partie de la self-induction du secondaire, celle qui correspond au flux qui ne pénètre pas dans le primaire à cause de la dispersion magnétique. Cette approximation est d'ailleurs très grossière, le flux commun Φ_0 étant loin d'avoir une valeur efficace constante : on trouvera les calculs corrects dans les traités d'Electrotechnique, mais ce que nous avons dit suffit à faire comprendre pourquoi les *résultats de la discussion des couples faite au paragraphe* 310 *restent qualitativement valables pour un moteur alimenté à différence de potentiel constante.*

Les moteurs d'induction triphasés présentent, par rapport aux moteurs synchrones, l'avantage de pouvoir démarrer en charge; ils présentent l'inconvénient d'avoir un facteur de puissance moins élevé, qui atteint rarement 0,90. Leur rendement est presque aussi bon; il peut dépasser 90 0/0 pour des

moteurs de quelques centaines de chevaux, alimentés par du courant à 25 périodes par seconde.

445. Moteurs asynchrones monophasés. — Un champ magnétique alternatif $\vec{h} = \vec{H} \cos \omega_0 t$ peut être considéré comme la résultante de deux champs de grandeur constante, $\vec{H}_1$ et $\vec{H}_2$ ($H_1 = H_2 = H / 2$), tournant en sens inverse avec la vitesse angulaire ω_0 (*fig.* 503). Un cadre fermé, placé dans le champ $\vec{h}$ et tournant avec une vitesse angulaire ω peu inférieure à ω_0, sera soumis (§ 310 bis), de la part du champ $\vec{H}_1$, à un couple moteur élevé, de la part du champ $\vec{H}_2$, à un couple résistant faible, qu'on peut négliger. On peut donc réaliser des moteurs à courant alternatif simple, construits exactement comme les moteurs triphasés que nous venons d'étudier, avec la seule différence que l'inducteur fixe ne porte qu'un seul enroulement au lieu de trois.

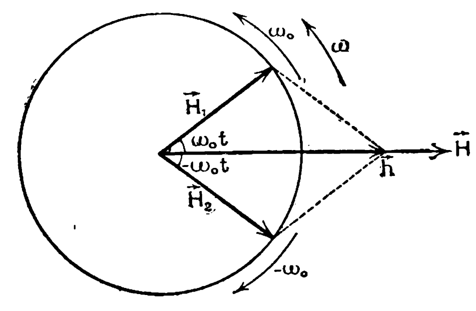


Fig. 503.

Leur rendement et leur facteur de puissance sont toujours un peu moins élevés que ceux des moteurs triphasés. Mais leur principal inconvénient est qu'ils ne développent un couple moteur que lorsqu'ils sont en mouvement : on est obligé de recourir à des artifices pour provoquer le démarrage. On dispose par exemple sur l'inducteur un second enroulement, dans lequel on fait passer un courant déphasé par rapport au premier, en intercalant dans son circuit une bobine de self-induction; on réalise ainsi une sorte de moteur diphasé, dans lequel les deux enroulements créent un champ tournant qui fait démarrer l'induit. Le couple de démarrage obtenu est d'ailleurs toujours très inférieur au couple normal, et le moteur ne peut démarrer qu'à vide.

Les moteurs asynchrones que nous venons d'étudier sont dits des **moteurs d'induction**, parce que le circuit mobile n'y est parcouru que par des courants induits. On utilise aussi, avec les courants alternatifs simples, des **moteurs de conduction**, dans lesquels le courant de la source traverse à la fois le circuit fixe et le circuit mobile. Ce sont des moteurs à collecteur, identiques, à des détails de construction près, aux moteurs-série à courant continu (§ 431). Leur principal inconvénient est de posséder un collecteur, organe fragile et d'entretien difficile. Mais ils présentent les avantages des moteurs-série à courant continu : leur couple de démarrage est énergique, et ils peuvent fonctionner à toutes les vitesses angulaires, même au delà du synchronisme.

Ces moteurs sont surtout employés comme moteurs de traction sur les lignes de chemin de fer que l'on a équipées en courant alternatif pour profiter des facilités de transformation que présente le courant alternatif et de l'économie qui en résulte dans le transport de l'énergie (§ 446). Il est en effet pratiquement impossible d'amener aux voitures motrices du courant triphasé, qui exige trois prises de courant, et dont l'emploi complique les canalisations et les aiguillages; d'autre part, les moteurs d'induction ont, au point de vue de la traction, l'inconvénient de fonctionner à une vitesse presque constante.

III. — *TRANSFORMATEURS*

446. Transports d'énergie.— Le problème du transport de l'énergie électrique s'est posé dès les débuts de l'industrie électrique, et a pris de plus en plus d'importance à mesure de son développement. Il est en effet souvent impossible de placer les centrales électriques productrices d'énergie à proximité des villes ou des régions industrielles consommatrices; cette impossibilité est évidente dans le cas des *centrales hydrauliques*, nécessairement placées au voisinage immédiat des chutes d'eau dont l'énergie doit être transformée en énergie électrique; elle existe également dans le cas des *centrales thermiques*, centrales à gaz alimentées par des gaz de hauts fourneaux, ou centrales à vapeur dont l'emplacement est déterminé par les conditions de transport du charbon, au point qu'il est parfois avantageux de les construire sur le carreau même de la mine. Comme d'ailleurs le prix d'installation, les dépenses d'exploitation et la consommation de charbon par kilowatt produit sont d'autant moins élevés que la puissance de l'usine est plus grande, on tend aujourd'hui à construire des *supercentrales* de plusieurs centaines de mille kilowatts desservant des régions de plus en plus étendues.

Le transport de l'énergie électrique s'accompagne toujours de la dissipation d'une partie de cette énergie dans la ligne de transport. Si l'on emploie un courant continu, d'intensité I, sous une différence de potentiel V, et si la résistance de la ligne est r, la puissance $\mathcal{P}$ au départ et la puissance p perdue dans la ligne sont :

$$\mathcal{P} = \mathrm{VI}, \qquad p = r\mathrm{I}^2;$$

le rapport de la perte à la puissance totale est :

$$\frac{p}{\mathcal{P}} = \frac{r\mathrm{I}}{\mathrm{V}} = \mathcal{P}\,\frac{r}{\mathrm{V}^2}.$$

Ces mêmes formules sont valables en courant alternatif, si l'on désigne par V et I les valeurs efficaces, et si l'on suppose le facteur de puissance égal à l'unité.

Si la puissance à transporter $\mathcal{P}$ et la différence de potentiel V sont données, on ne peut réduire les pertes qu'en réduisant la résistance r de la ligne. A mesure que sa longueur augmente, on doit, pour ne pas augmenter sa résistance, augmenter sa section : le poids de cuivre et le prix d'établissement augmentent en même temps.

On est donc conduit, dans les transports d'énergie à grande distance, à réduire les pertes en ligne en augmentant la différence de potentiel V. Mais, comme il est impossible d'augmenter dans les mêmes proportions la force électromotrice des générateurs et la différence de potentiel aux bornes des appareils d'utilisation, on est obligé de transformer, au départ et à l'arrivée, le courant transporté. En courant continu, cette transformation ne peut se faire que par des appareils rotatifs, formés d'un moteur alimenté par le courant à transformer et d'un générateur entraîné par ce moteur. En courant alternatif au contraire, on peut transformer le courant à bas voltage en courant à haut voltage, et

inversement, par des transformateurs statiques ne comportant aucun organe mobile, et ayant un excellent rendement. Aussi la plupart des transports d'énergie se font-ils en courant alternatif.

L'emploi des courants triphasés permet encore de réduire le poids de cuivre employé dans la ligne. Désignons par $\mathfrak{P}$ la puissance totale, par p la perte totale en ligne, par V la différence de potentiel efficace qui existe entre deux des bornes d'un alternateur triphasé monté en étoile (§ 306), par I l'intensité efficace de chacun des courants, et par r' la résistance de chacun des 3 fils de ligne. Chacun des circuits contient une f. é. m. $V / \sqrt{3}$, et développe une puissance $\mathfrak{P} / 3$; la puissance perdue dans le fil correspondant est $p / 3$, et on a, en supposant le facteur de puissance égal à l'unité :

$$\frac{\mathfrak{P}}{3} = \frac{VI}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{p}{3} = r'I^2;$$

$$\frac{p}{\mathfrak{P}} = \frac{r'I\sqrt{3}}{V} = \mathfrak{P} \cdot \frac{r'}{V^2}.$$

La perte est la même pour une ligne triphasée et une ligne monophasée à même tension, lorsque la résistance r' de chacun des fils F′ de la ligne triphasée est égale à la résistance totale r des deux fils F de la ligne monophasée. La résistance de l'un des fils F′ est le double de celle de l'un des fils F, sa section est moitié; son poids est la moitié du poids de l'un des fils F, et le poids total des trois fils F′ n'est que les trois quarts du poids total des deux fils F.

Les alternateurs industriels donnent directement entre leurs bornes des différences de potentiel de l'ordre de 12 à 15.000 volts : le transport peut être fait directement sous cette différence de potentiel pour les distributions peu étendues, telles que les distributions urbaines. Elle est pourtant insuffisante dans le cas des agglomérations étendues : c'est ainsi que dans la région parisienne on a été conduit à relier les usines génératrices aux réseaux à quelques milliers de volts qui desservent les différents secteurs de Paris et de sa banlieue par des lignes de transport souterraines à 60.000 volts. Chaque ligne se compose de trois conducteurs logés dans une même armature métallique; ils sont destinés aux trois phases du courant triphasé, et chacun d'eux peut transporter 300 ampères. Dans les installations plus récentes, on emploie plutôt trois câbles unipolaires, recouverts chacun d'une gaine de plomb et juxtaposés dans un même caniveau. Depuis quelques années, on utilise des câbles dans lesquels l'isolant est constitué par de l'huile fluide : des canalisations souterraines à 132.000 volts sont en service en Amérique depuis 1927, et l'on a réalisé dans la région parisienne une canalisation à 220.000 volts.

Les lignes à 60.000 volts sont, bien entendu, alimentées par l'intermédiaire de transformateurs élévateurs de tension, et raccordées aux réseaux de distribution à 12.000 volts par des transformateurs abaisseurs de tension. Il faut encore placer, entre le réseau de distribution et les appareils récepteurs, des transformateurs qui ramènent la différence de potentiel aux bornes aux environs de 500 volts pour les moteurs tels que les moteurs à collecteur, à 110 volts ou 220 volts pour les installations domestiques (éclairage, chauffage, etc.) dont on doit pouvoir toucher les appareils sans danger; comme les transforma-

teurs à courant alternatif n'exigent aucun entretien, on peut les placer chez les abonnés, à condition de les disposer hors d'atteinte du public.

Pour les transports à grande distance, on réalise entre les fils d'une ligne aérienne des différences de potentiel qui peuvent dépasser 200.000 volts : on a été en Amérique jusqu'à 280.000 volts. La différence de potentiel maximum ($V\sqrt{2}$) qu'on peut atteindre est limitée par les dangers de décharge disruptive, par la rigidité des diélectriques, par la perte d'énergie provenant des aigrettes qui partent des fils. Les fils de ligne doivent être d'autant plus écartés que la différence de potentiel est plus grande : si sa valeur efficace est de 50.000 volts, ils doivent être au moins à un mètre l'un de l'autre.

L'unification en triphasé à 50 périodes des diverses distributions et l'augmentation du rendement des transports obtenue par l'élévation de la différence de potentiel permettent aujourd'hui de réaliser couramment **l'interconnexion des centrales.** Il est ainsi possible de compenser par des apports extérieurs les variations de puissance des centrales hydrauliques dues aux variations saisonnières du régime des cours d'eau, et de parer aux variations horaires de consommation sans qu'il soit nécessaire d'entretenir dans les centrales thermiques des groupes de réserve presque toujours inactifs. De telles jonctions sont déjà réalisées dans de larges portions de notre territoire, et le réseau général d'interconnexion des centrales par des lignes de 90.000 à 220.000 volts couvrira bientôt de ses mailles l'ensemble de la France.

Des problèmes nouveaux se sont d'ailleurs posés lorsqu'on a entrepris l'électrification des chemins de fer. On n'a en effet pas encore réussi à construire des moteurs de traction satisfaisants fonctionnant en monophasé à 50 périodes, et les pays, comme la Suisse, qui ont adopté la traction en monophasé (cf. § 445) ont dû juxtaposer au réseau général de distribution un réseau spécial à 16 2/3 périodes. Il a paru préférable en France d'étendre l'intercommunication des centrales aux usines de traction, et de n'avoir qu'un seul réseau de transport d'énergie; il a fallu alors prévoir la transformation de la nature du courant dans des sous-stations réparties le long des lignes électrifiées, et la supériorité des moteurs à courant continu pour la traction est telle que l'on a décidé de réaliser cette transformation en courant continu à 1.500 volts. Nous renverrons aux Traités d'Electrotechnique pour l'étude des appareils utilisés à cet effet, *commutatrices* (appareils rotatifs analogues à des dynamos), ou *redresseurs à vapeur de mercure*, (appareils fixes analogues aux lampes employées pour l'éclairage); indiquons seulement que la Compagnie des Chemins de fer du Midi emploie dans ses sous-stations des commutatrices de 750 kw. et des redresseurs à vapeur de mercure de 1.200 kw.; les uns et les autres sont alimentés par le réseau alternatif à haute tension par l'intermédiaire de transformateurs, et fournissent du courant continu à 1.500 volts, avec un rendement qui est du même ordre pour les deux types d'appareils et atteint, transformateur compris, 92 à 94 pour 100.

447. Principe des transformateurs : rapport de transformation. — Un transformateur (*fig.* 504) se compose d'une carcasse en fer, sur laquelle sont bobinés deux enroulements distincts P et S. La carcasse, constituée par les culasses C et les noyaux N, forme un circuit magnétique fermé. Les enroulements contiennent des nombres de spires différents n_1 et n_2; l'un d'eux est formé d'un petit nombre de spires de gros fil de cuivre, l'autre, d'un grand

nombre de spires de fil fin. Nous admettrons que tout le flux d'induction produit par l'un des enroulements traverse l'autre, c'est-à-dire que toutes les lignes d'induction parcourent le fer dans toute sa longueur : on obtient ce résultat en donnant une faible réluctance au circuit magnétique, et en constituant les enroulements par des bobines superposées.

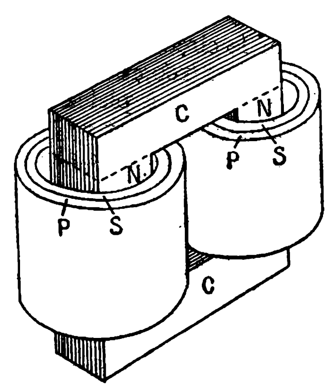


FIG. 504.

On établit, entre les bornes du circuit 1, une différence de potentiel alternative, qui y fait passer un courant alternatif; il se produit, dans le circuit magnétique, un flux d'induction alternatif, qui crée, dans le circuit 2, une force électromotrice d'induction alternative de même période que la différence de potentiel appliquée au premier circuit. Si l'on réunit les bornes du circuit 2, il s'y produit un courant alternatif. Le circuit 1, auquel on fournit de l'énergie électrique, s'appelle le **circuit primaire ;** le circuit 2, qui restitue cette énergie, s'appelle le **circuit secondaire.**

Nous désignerons par r_1 la résistance du circuit primaire, par v_1 la différence de potentiel à ses bornes, par i_1 l'intensité du courant qui le parcourt ; par r_2, v_2, i_2 les grandeurs correspondantes pour le circuit secondaire ; par φ le flux d'induction qui traverse le circuit magnétique. Ces lettres désignent les valeurs de ces grandeurs à l'instant t ; nous représenterons les valeurs efficaces par V_1, I_1, V_2, I_2. Pour ne pas compliquer l'écriture par l'introduction des facteurs numériques 10^{-8} et 10^{-1}, nous supposerons toutes ces grandeurs mesurées en u. é. m. Nous choisirons le même sens positif sur les deux enroulements pour mesurer les courants i_1 et i_2, et nous compterons positivement le flux φ dans le sens correspondant. Nous compterons positivement les différences de potentiel v_1 et v_2 quand elles tendent à produire, dans les circuits intérieurs du transformateur, des courants positifs (*fig.* 505).

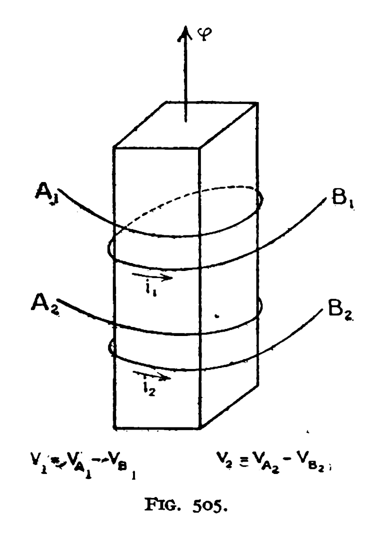


FIG. 505.

Chaque spire de l'un ou l'autre circuit est traversée par le flux φ ; elle est le siège d'une f. é. m. d'induction dont la valeur, comptée positivement lorsqu'elle tend à faire passer le courant dans le sens positif choisi sur les enroulements, est $-\,d\varphi\,/\,dt$; les f. é. m. d'induction totales dans les deux circuits sont $-\,n_1\,d\varphi\,/\,dt$ et $-\,n_2\,d\varphi\,/\,dt$. L'application de la loi d'Ohm aux deux circuits fournit les relations :

$$v_1 = r_1 i_1 + n_1 \frac{d\varphi}{dt}, \qquad v_2 = r_2 i_2 + n_2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Les résistances des circuits d'un transformateur sont toujours faibles, et, lorsqu'il fonctionne à pleine charge, les puissances $r_1I_1^2$ et $r_2I_2^2$ perdues par effet Joule dans chacun des enroulements sont de l'ordre de 1 pour 100 de la puissance V_1I_1 absorbée par le circuit primaire, ou de la puissance V_2I_2 fournie par le circuit secondaire ; les rapports r_1I_1 / V_1 et r_2I_2 / V_2 sont alors de l'ordre de 1/100, et ils sont encore plus faibles lorsque le transformateur ne fonctionne pas à pleine charge. Nous admettrons que les chutes de potentiel ohmiques r_1i_1 et r_2i_2 sont toujours négligeables devant les différences de potentiel v_1 et v_2. On a alors simplement :

$$v_1 = n_1 \frac{d\varphi}{dt}, \qquad v_2 = n_2 \frac{d\varphi}{dt},$$

et on a à chaque instant :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Le rapport des valeurs efficaces est égal au rapport constant des valeurs instantanées, et l'on a :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Quels que soient les courants qui traversent le transformateur, la différence de potentiel secondaire a même forme et même phase que la différence de potentiel primaire ; le rapport des valeurs efficaces des différences de potentiel secondaire et primaire est égal au rapport des nombres totaux de spires des deux enroulements : c'est ce rapport n_2 / n_1 qu'on appelle le **rapport de transformation.**

On remarquera que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la loi d'aimantation du fer : le résultat est valable quelle que soit la courbe d'hystérésis du fer employé.

Les relations obtenues montrent que, *si l'on maintient constante la différence de potentiel primaire* V_1, *le flux efficace* Φ *est indépendant du courant demandé au transformateur,* et que, *si la différence de potentiel* v_1 *est sinusoïdale, le flux* φ *est également sinusoïdal, et est en quadrature retard sur les différences de potentiel* v_1 *et* v_2.

Nous n'avons fait, dans le calcul, aucune distinction entre les deux circuits. *Un transformateur est un appareil réversible :* si l'on prend comme circuit primaire le circuit à fil fin et à spires nombreuses, et si on établit entre ses bornes une différence de potentiel élevée, on obtient une différence de potentiel secondaire faible entre les bornes du circuit à gros fil. Si l'on établit une différence de potentiel faible entre les bornes du circuit à gros fil, on obtient une différence de potentiel élevée entre les bornes du circuit à fil fin.

448. Intensités des courants. — Pour obtenir une relation approximative entre les intensités des courants primaire et secondaire, nous supposerons que la perméabilité du fer reste constante, c'est-à-dire que la réluctance R du circuit magnétique est indépendante de la valeur du flux φ qui le traverse. Ce flux est produit par l'action combinée des deux courants i_1 et i_2, et le théorème des circuits magnétiques fournit la relation :

$$n_1i_1 + n_2i_2 = \frac{R}{4\pi}\varphi.$$

Quand le transformateur fonctionne à vide, c'est-à-dire quand le circuit secondaire est ouvert, on a : $i_2 = 0$, et le courant primaire i_0 est :

$$i_0 = \frac{R}{4\pi n_1} \varphi.$$

Le courant à vide est en phase avec le flux, et en quadrature retard sur la différence de potentiel v_1 *: il est entièrement déwatté et ne consomme aucune puissance.* L'enroulement primaire du transformateur à vide se comporte comme une bobine de self-induction, dont la self-inductance, $L = n_1\varphi/i_0 = 4\pi n_1^2/R$, est très grande, à cause de la faible valeur de la réluctance R. *L'intensité efficace du courant à vide est toujours très faible ;* pour les transformateurs actuels de grande puissance, elle ne dépasse pas 3 à 5 pour 100 de l'intensité du courant primaire en pleine charge.

Nous avons vu que le flux d'induction φ est indépendant de la charge du transformateur, et est toujours en quadrature retard sur les différences de potentiel v_1 et v_2. Lorsque le secondaire est fermé, et débite un courant i_2, le circuit primaire est parcouru par un courant :

$$i_1 = \frac{R}{4\pi n_1} \varphi - \frac{n_2}{n_1} i_2 = i_0 - \frac{n_2}{n_1} i_2.$$

Le courant primaire est égal à la somme du courant à vide i_0 *et d'un courant* $i'_1 = -\frac{n_2}{n_1} i_2$, *en opposition de phase avec le courant secondaire, d'intensité efficace égale à l'intensité efficace secondaire multipliée par le rapport de transformation.*

Le courant à vide i_0 étant entièrement déwatté, la puissance que transporte le courant i_1 est égale à celle que transporte le courant i'_1. Comme on a à chaque instant :

$$-\frac{i_1'}{i_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1},$$

la puissance $\int v_1 i'_1 dt$ absorbée par le primaire est égale à la puissance $-\int v_2 i_2 dt$ fournie par le secondaire : ce résultat était à prévoir, puisque nous avons négligé toutes les pertes.

Si le transformateur fonctionne à pleine charge, on peut négliger le courant à vide i_0 devant le courant de charge i_1, et prendre :

$$i_1 = -\frac{n_2}{n_1} i_2, \qquad I_1 = \frac{n_2}{n_1} I_2.$$

Dans le transformateur en charge, les courants primaire et secondaire sont en opposition de phase et le rapport de leurs intensités efficaces est égal au rapport de transformation ; les différences de potentiel étant toujours en phase, les facteurs de puissance sont les mêmes dans les deux circuits. Le courant est plus intense dans le circuit qui comporte le moins de spires ; c'est pourquoi ce circuit doit être constitué par un fil plus gros que le circuit à spires nombreuses.

L'intensité efficace I_2 et la phase φ_2 du courant i_2 sont déterminées par les caractéristiques du circuit extérieur relié aux bornes du secondaire. Suppo-

sons, par exemple, que ce circuit soit constitué par une résistance non inductive ρ ; on a :

$$i_2 = -\frac{v_2}{\rho}, \qquad I_2 = \frac{V_2}{\rho}, \qquad \varphi_2 = \pi ;$$

si ρ est assez faible, le courant primaire est assez intense pour qu'on puisse négliger i_0; on a :

$$i_1 = \frac{n_2}{n_1}\frac{v_2}{\rho} = \frac{n_2^2}{n_1^2}\frac{v_1}{\rho}, \qquad I_1 = \frac{n_2^2}{n_1^2}\frac{V_1}{\rho}, \qquad \varphi_1 = 0.$$

Le courant primaire est en phase avec la différence de potentiel, et est complètement watté ; l'énergie qu'il apporte passe par induction dans le circuit secondaire, et est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance ρ. Le courant fourni par la source qui alimente le circuit primaire est le même que si l'on avait remplacé ce circuit par une résistance non inductive égale à $\rho n_1^2 / n_2^2$; en diminuant la résistance, on peut le rendre aussi intense que l'on veut, tout au moins dans les limites que définit l'existence des résistances intérieures r_1 et r_2.

On peut dire qu'*en plaçant sur une bobine de self-induction un second enroulement fermé sur une résistance faible, on supprime entièrement les effets de la self-induction.* Le circuit primaire du transformateur, qui se comportait à vide comme une self-induction considérable, se comporte maintenant comme une résistance faible, et on comprend ainsi pourquoi le courant à vide n'est qu'une faible fraction du courant de charge. On montrerait de même que, si le circuit secondaire est fermé sur un condensateur de grande capacité C, le circuit primaire se comporte comme un condensateur, de capacité $\frac{n_2^2}{n_1^2}$ C.

449. Rendement des transformateurs. — La puissance $\mathcal{P}_2$ disponible aux bornes du secondaire d'un transformateur est toujours inférieure à la puissance $\mathcal{P}_1$ consommée par le primaire ; le rapport $\mathcal{P}_2 / \mathcal{P}_1$ est le rendement du transformateur, et la différence $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$ représente les pertes, qui sont dues à l'effet Joule dans les deux enroulements, à l'hystérésis et aux courants de Foucault dans le noyau de fer.

Les *pertes par effet Joule*, $r_1 I_1^2$ et $r_2 I_2^2$, peuvent facilement être calculées. On montre que, pour une masse totale de cuivre donnée, la puissance perdue est minimum lorsqu'elle se partage également entre les deux enroulements, qui comprennent alors des masses de cuivre égales. La puissance totale perdue dans le cuivre ne dépasse généralement pas 2 pour 100 de la puissance utile en pleine charge; dans des transformateurs de plusieurs centaines de kilovolts-ampères, elle peut être réduite à 1 pour 100.

Par suite de l'existence de la chute de potentiel ohmique $r_1 I_1$ dans le primaire, la force contre-électromotrice d'induction primaire E_1 est inférieure à la différence de potentiel appliquée V_1 ; par suite de l'existence de la chute de potentiel ohmique $r_2 I_2$ dans le secondaire, la différence de potentiel aux bornes V_2 est inférieure à la force électromotrice E_2. Lorsqu'on passe du fonctionnement à vide au fonctionnement en charge, il y a une chute de tension aux bornes secondaires ; elle ne dépasse en général pas 2 pour 100, pour $\cos\varphi = 1$.

L'existence de l'hystérésis et des courants de Foucault ne modifie pas la valeur et la forme de la différence de potentiel secondaire (§ 447), mais seulement la forme du courant primaire ; elle peut ainsi produire des harmoniques, notamment l'harmonique 3. Dans le fonctionnement à vide, à une f. é. m. e_1 sinusoïdale correspond toujours un flux φ sinusoïdal ; mais comme la réluctance R est fonction de l'induction B, la force magnétomotrice $4\pi n_1 i_0$ et l'intensité du courant primaire i_0 ne sont plus sinusoïdales.

Les *pertes par courants de Foucault* peuvent être réduites à une valeur très faible, en constituant le noyau par des tôles d'une épaisseur de l'ordre de $0^{mm}5$, parallèles aux lignes d'induction et isolées les unes des autres par du papier ou par du vernis. Pour réduire les *pertes par hystérésis*, on n'emploie que des valeurs relativement faibles de l'induction magnétique B ; on limite, le plus souvent, l'induction maximum B_m à des valeurs de l'ordre de 8.000 C. G. S. On emploie aujourd'hui presque exclusivement des tôles contenant 4 % de silicium, dont le coefficient de Steinmetz (§ 197) est inférieur à 0,001 et dont la résistivité est trois fois plus grande que celle des tôles ordinaires, de sorte que les pertes par hystérésis et surtout par courants de Foucault sont fortement réduites : elles n'y dépassent guère 1 watt par kilogramme pour $B_m = 10.000$. Les pertes dans le fer peuvent ainsi, dans certains cas, être réduites à moins de 1 pour 100 de la puissance en charge (1).

Le rendement dépasse, en général, 96 pour 100 pour des transformateurs de plus de 10 kilovolts-ampères ; il peut atteindre 99 et même 99,5 pour 100 pour des transformateurs de 10.000 kilovolts-ampères, fonctionnant à pleine charge, pour $\cos\varphi = 1$.

Lorsque le transformateur fonctionne à vide, les pertes par effet Joule sont négligeables, mais les pertes dans le fer sont les mêmes qu'en charge, puisque le flux est indépendant de la charge. L'existence des pertes à vide a pour conséquence que le courant primaire à vide n'est pas entièrement déwatté ; la valeur correspondante de $\cos\varphi$ est, en général, comprise entre 0,15 et 0,3, et l'angle φ est de l'ordre de 70 à 80 degrés.

Lorsqu'un transformateur est placé chez un abonné, le primaire reste constamment en circuit sur le réseau, et l'appareil consomme toute la journée la puissance correspondant aux pertes dans le fer ; il ne consomme au contraire de puissance utile que lorsque le circuit secondaire est fermé. Il en résulte que le rendement journalier est inférieur au rendement à pleine charge : un transformateur ayant un rendement à pleine charge de 97 pour 100, avec des pertes dans le fer de 1 pour 100, et fonctionnant 5 heures par jour, a un *rendement journalier* de 93 pour 100 seulement.

Toute la puissance perdue dans un transformateur y est transformée en chaleur et a pour effet d'élever sa température ; dans le fonctionnement normal, la température du fer et des enroulements ne doit pas dépasser de plus de 40° à 60° la température ambiante. Pour les grands transformateurs, le refroidissement naturel est insuffisant, d'autant plus que l'appareil est toujours placé dans une enveloppe protectrice en tôle, qui doit être hermétiquement fermée si le local est humide. On peut avoir recours à un courant d'air artificiel

(1) Ces indications se rapportent naturellement aux courants alternatifs ayant la fréquence industrielle usuelle de 50. Pour les fréquences de l'ordre de 30.000 produites par les alternateurs à haute fréquence (§ 454), on emploie des tôles extrêmement minces de quelques centièmes de millimètre d'épaisseur, et l'on supprime même totalement le noyau de fer dans les transformateurs que comportent certains amplificateurs à haute fréquence (§ 561).

créé par un ventilateur; on peut aussi remplir l'enveloppe d'une huile lourde, telle que l'huile de résine ou de vaseline, qui facilite la diffusion de la chaleur, et dont le refroidissement peut au besoin être assuré par une circulation d'eau ou par son passage dans des radiateurs extérieurs. Les transformateurs à haute tension sont presque toujours des transformateurs à huile : l'huile, à condition d'être très bien desséchée, assure en effet un meilleur isolement, à cause de sa grande rigidité diélectrique.

450. Transformateurs triphasés. — La transformation des courants triphasés peut être réalisée au moyen de trois transformateurs monophasés placés sur les trois phases. Il est possible de réunir, en un noyau commun, une partie de chacun des trois circuits magnétiques; comme ils sont traversés par des flux triphasés, le flux résultant qui traverse la partie commune est nul, et elle peut être supprimée.

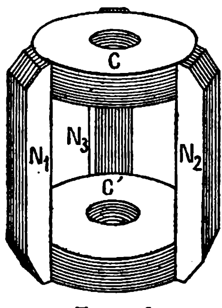


FIG. 506.

La figure 506 représente l'armature d'un transformateur triphasé; chacun des noyaux $N_1N_2N_3$ porte les deux enroulements, primaire et secondaire, correspondant à une des phases. Pour réduire la dispersion magnétique, les deux enroulements sont superposés, l'enroulement à fil fin, qui est le plus sujet à des accidents, étant à l'extérieur, ou bien ils sont divisés en un certain nombre de bobines qui se succèdent alternativement sur le noyau. Les culasses de fer doux CC' ont, en général, une section plus grande que les noyaux, et leur réluctance est assez faible par rapport à celle de l'ensemble du circuit magnétique; aussi leur forme importe peu, et on préfère en général ranger les trois noyaux dans un même plan, en les réunissant par des culasses prismatiques. On a construit, pour alimenter les lignes de transport d'énergie, ou transformer le courant qu'elles apportent, des transformateurs dont la puissance apparente atteint 70.000 kilovolts-ampères, l'une des tensions étant de 200.000 volts.

Les transformateurs permettent aussi de changer la nature d'un système de courants polyphasés, par exemple de transformer des courants diphasés en courants triphasés. Le **transformateur Scott** comporte deux primaires identiques, alimentés par les deux phases du courant diphasé; les deux secondaires ont des nombres de spires différents, et sont fractionnés en différentes bobines, comme l'indique le schéma de la figure 506 *a*, de façon que les f. é. m. dans ces bobines soient :

Première phase : $e_{OA} = E\cos\omega t$, $\quad e_{CD} = e_{FG} = -\frac{E}{2}\cos\omega t$.

Deuxième phase : $e_{OB} = \frac{E\sqrt{3}}{2}\sin\omega t$, $\quad e_{OB} = -\frac{E\sqrt{3}}{2}\sin\omega t$.

Les circuits secondaires étant groupés en étoile suivant les connexions qu'indique la figure 506 *a*, les f. é. m. entre le point neutre O et les trois bornes ADG sont :

$$e_{OA} = E\cos\omega t$$
$$e_{OD} = e_{OB} + e_{CD} = E(\sin\omega t\cos\pi/6 - \cos\omega t\sin\pi/6) = E\cos(\omega t - 2\pi/3)$$
$$e_{OG} = e_{OE} + e_{FG} = E(-\sin\omega t\cos\pi/6 - \cos\omega t\sin\pi/6) = E\cos(\omega t + 2\pi/3).$$

On voit qu'on obtient bien un système de f. é. m. triphasées : c'est aussi ce que montre le diagramme de la figure 506 *b*, où les mêmes f. é. m. sont représentées par des vecteurs et additionnées par la règle de Fresnel.

Supposons que le secondaire triphasé fournisse des courants équilibrés, en phase par exemple avec les f. é. m. résultantes e_{OA}, e_{OD} et e_{OG}. Le diagramme de

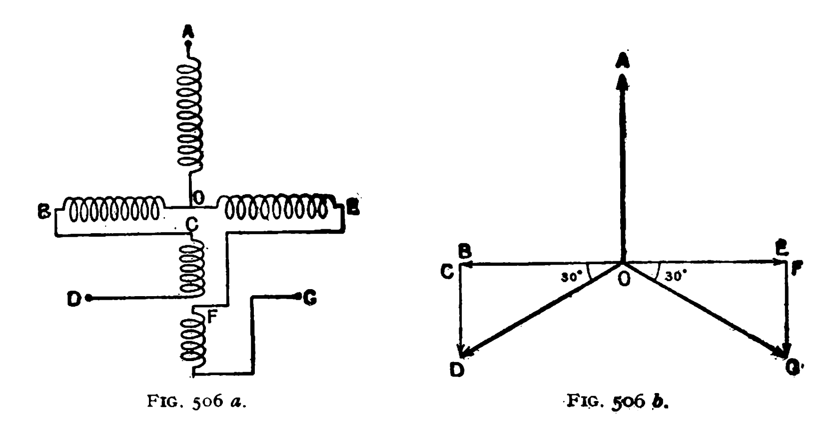


FIG. 506 *a*. FIG. 506 *b*.

la figure 506 *b* montre immédiatement que le courant est en phase avec la f. é. m. ($\cos \varphi = 1$) dans la bobine OA, décalé de 30° ($\cos \varphi = \sqrt{3}/2$) dans les bobines OB et OE, et décalé de 60° ($\cos \varphi = 1/2$) dans les bobines CD et FG. Les puissances fournies par les différentes bobines sont :

$$\mathcal{P}_{OA} = \frac{EI}{2}, \qquad \mathcal{P}_{OB} = \mathcal{P}_{OE} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \mathcal{P}_{CD} = \mathcal{P}_{FG} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

La puissance totale est $3EI/2$ et les deux phases du diphasé fournissent des puissances égales, $\mathcal{P}_{OA} + \mathcal{P}_{CD} + \mathcal{P}_{FG} = \mathcal{P}_{OB} + \mathcal{P}_{OE} = 3EI/4$. Les courants pris sur le réseau diphasé sont donc équilibrés ; on montrerait facilement qu'ils sont en phase avec les tensions, en écrivant, pour chaque phase, l'équation des courants du paragraphe 448 et calculant vectoriellement les sommes de courants secondaires qui y figurent.

CHAPITRE XLI

TÉLÉGRAPHIE ET TÉLÉPHONIE SANS FIL

451. Généralités. — La télégraphie sans fil utilise, pour la transmission de ses signaux, les ondes électromagnétiques, dont l'existence a été prévue théoriquement par Maxwell, et démontrée expérimentalement par Hertz (chap. XXXI). Le schéma d'une installation de transmission par T. S. F. n'est autre que celui de l'appareil de Hertz : un poste émetteur produit dans une antenne, analogue à l'excitateur de Hertz, des courants de haute fréquence ; l'antenne rayonne dans tout l'espace des ondes électromagnétiques ; le poste récepteur peut recevoir les courants induits par ces ondes dans un cadre, analogue au résonateur de Hertz. Les premières communications par T. S. F. ont été réalisées en 1896 par Marconi, en employant comme récepteur le cohéreur de Branly ; l'emploi d'appareils de plus en plus sensibles pour déceler et amplifier les courants de haute fréquence dans le circuit de réception (cf. chap. XXX) a permis depuis d'améliorer considérablement les transmissions, tandis que l'augmentation de la puissance rayonnée par l'antenne permettait d'accroître leur portée.

L'emploi des oscillations entretenues permet d'obtenir dans les circuits d'émission et de réception de véritables courants alternatifs d'intensité efficace constante, et d'établir de l'un à l'autre un régime permanent de transmission d'énergie, qu'on peut comparer à celui qui s'établit entre le primaire et le secondaire d'un transformateur à courants alternatifs. Toute modification de l'intensité d'émission se traduit par une modification corrélative de l'intensité de réception. Des courants d'émission interrompus suivant le rythme des signaux Morse donnent à la réception des courants interrompus suivant le même rythme, que l'on peut utiliser, après transformation en courants de basse fréquence (§ 319), pour recevoir au son à l'aide d'un téléphone, ou, après transformation en courants continus (§ 318), pour recevoir par enregistrement à l'aide d'un appareil Morse ou d'un galvanomètre à cadre mobile. Des courants d'émission interrompus suivant le rythme des signaux Baudot donnent à la réception des courants interrompus suivant le même rythme, qui peuvent, après redressement par un détecteur, actionner le relais d'un Baudot récepteur.

Si l'intensité des courants d'émission varie suivant les modulations produites par un microphone, l'intensité du courant de réception reproduit ces

modulations; si le courant redressé, obtenu après détection, traverse un téléphone, le téléphone reproduit le son émis devant le microphone : c'est là le principe de la téléphonie sans fil.

I. — ÉMISSION

452. Antenne d'émission. — Nous avons vu qu'un oscillateur parcouru par un courant de haute fréquence doit, pour rayonner le plus d'énergie possible, être un oscillateur ouvert (§ 328); nous avons vu également qu'un oscillateur constitué par un conducteur linéaire, réuni à une de ses extrémités au sol et isolé à l'autre, possède une longueur d'onde propre, égale à quatre fois la longueur du conducteur (§ 333).

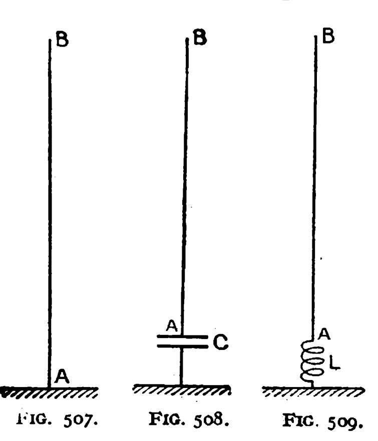


FIG. 507. FIG. 508. FIG. 509.

Les premières antennes étaient constituées simplement par un conducteur métallique AB disposé verticalement, et réuni au sol à sa partie inférieure (*fig.* 507); les antennes d'avions sont également constituées par un fil vertical : il pend librement, et est réuni à sa partie supérieure à la masse de l'avion, qui joue le rôle du sol. La longueur d'onde propre de l'antenne est sensiblement égale à quatre fois sa hauteur; on peut la diminuer en intercalant un condensateur C entre l'antenne et le sol (*fig.* 508) : l'addition de ce condensateur, en série avec celui que constitue l'antenne, a pour effet de diminuer la capacité du circuit oscillant $\left(\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_1}\right)$ et, par suite, de diminuer sa période propre. Le plus souvent, on cherche au contraire à augmenter la longueur d'onde propre de l'antenne, en augmentant sa self-induction par l'addition d'une bobine L (*fig.* 509), qu'on appelle la **self d'antenne.**

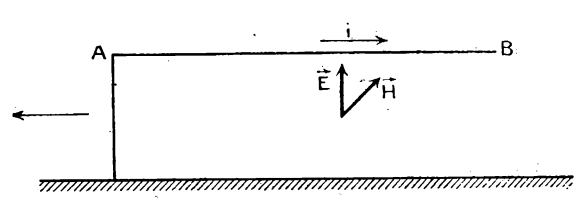


FIG. 510.

On emploie presque toujours aujourd'hui des antennes à grande capacité propre, qu'on réalise en disposant au sommet du fil vertical un fil horizontal AB (*fig.* 510). Le mode de vibration de ce fil est à peu près le même que s'il était vertical; il existe toujours un nœud de potentiel au point A relié au sol, un nœud de courant à l'extrémité isolée B, et la longueur d'onde propre de l'antenne est sensiblement égale à quatre fois la longueur du fil AB. Le fil horizontal forme avec le sol un condensateur qui crée

un champ électrique $\vec{E}$; les courants qui le parcourent créent un champ magnétique $\vec{H}$, et ces deux champs alternatifs forment l'onde électromagnétique rayonnée. L'énergie rayonnée n'est pas la même dans toutes les directions : elle est maximum dans la direction du fil AB, du côté de l'entrée de poste A.

Pour augmenter la puissance rayonnée, on constitue généralement l'antenne par plusieurs fils, parallèles ou convergents. C'est ainsi que le poste de Croix-d'Hins, près de Bordeaux, comporte une antenne à 16 fils parallèles, supportés par huit tours de 250 mètres de hauteur, qui forment un rectangle de 1.200 mètres de longueur sur 400 mètres de largeur; sa capacité est de l'ordre de 50 millièmes de microfarad.

La puissance du poste n'est limitée que par le potentiel auquel on peut porter l'extrémité de l'antenne, c'est-à-dire par la rigidité diélectrique des isolants qui la supportent : on arrive à des tensions de l'ordre de 100.000 à 200.000 volts.

Pour une période déterminée, l'énergie rayonnée est proportionnelle aux carrés des grandeurs des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, et par conséquent aux carrés des valeurs efficaces V_0 du potentiel au sommet de l'antenne et i_0 du courant à sa base. La puissance rayonnée peut être représentée par une expression de la forme ρi_0^2, analogue à celle qui représente la puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur : le coefficient ρ s'appelle la **résistance de rayonnement** de l'antenne.

L'antenne doit naturellement être montée de façon que la puissance perdue par effet Joule dans le circuit oscillant soit petite par rapport à la puissance rayonnée, c'est-à-dire de façon que les diverses résistances soient petites par rapport à la résistance de rayonnement. La résistance la plus grande est généralement la résistance de contact de l'antenne avec le sol; il faut d'ailleurs remarquer que toutes les parties du sol situées au-dessous de l'antenne sont parcourues par des courants induits, et dissipent de l'énergie. On est souvent obligé, pour réduire la résistance de la prise de terre, de réunir l'antenne à des plaques métalliques de grandes dimensions, enterrées dans le sol, ou de tendre au-dessous de l'antenne horizontale une nappe de fils, placés à quelques mètres du sol, et réunis à la terre en plusieurs points. Ce dernier artifice a été employé pour l'antenne transcontinentale de Sainte-Assise; la résistance de rayonnement de cette antenne est de 0,19 ohm, et on a pu réduire la somme des autres résistances, fils d'antenne, ligne de terre et terre, à 0,35 ohm. Le *rendement de l'antenne*, rapport de l'énergie rayonnée à l'énergie totale consommée dans l'antenne, est alors 0,19 : 0,54, soit 35 o/o.

La résistance de rayonnement d'une antenne varie en raison inverse du carré de la longueur d'onde. Pour les grandes antennes, comme celles de Croix-d'Hins ou de Sainte-Assise, qui sont destinées à l'émission de longueurs d'onde de l'ordre de 15.000 mètres, elle n'est que de quelques dixièmes d'ohms; elle peut atteindre et dépasser un ohm pour des antennes construites pour des longueurs d'onde de quelques centaines de mètres, elle peut dépasser 15 ohms pour les antennes de quelques mètres de hauteur destinées à l'émission des ondes courtes de longueurs d'onde comprises entre 15 et 40 mètres. Comme il est facile de réduire au-dessous d'une dizaine d'ohms les résistances passives de ces antennes, il est possible d'atteindre dans l'émission des ondes courtes des rendements de l'ordre de 60 o/o, inaccessibles aux ondes longues.

Les ondes courtes permettent d'autre part une meilleure utilisation de l'énergie rayonnée, grâce à la possibilité de la concentrer dans une direction donnée par la construction d'**antennes à ondes projetées.** Leur principe est celui que nous avons indiqué au paragraphe 337 : une série d'antennes verticales parallèles équidistantes, parcourues par des courants présentant entre eux des différences de phase égales, rayonne l'énergie électromagnétique comme les fentes d'un réseau de diffraction optique, de sorte que toute l'énergie est concentrée autour de certaines directions privilégiées. En particulier, si l'équidistance des antennes est inférieure à la longueur d'onde et si tous les courants sont en phase, il n'y a d'énergie rayonnée que dans la direction normale au plan du rideau d'antennes. On réalise pratiquement un tel système d'antennes par l'antenne en dents de scie que représente la figure 510 *bis*. L'énergie, amenée par les conducteurs *m'm* et *n'n*, a une fréquence telle que chaque élément rectiligne ait une longueur égale à une demi-longueur d'onde; dans ces conditions, tous les sommets *a*, *a'*, *b*, *b'*, etc., sont des nœuds du courant, et, comme l'indiquent les flèches de la figure, les composantes verticales des courants ont, à un instant quelconque, le même sens dans tous les éléments

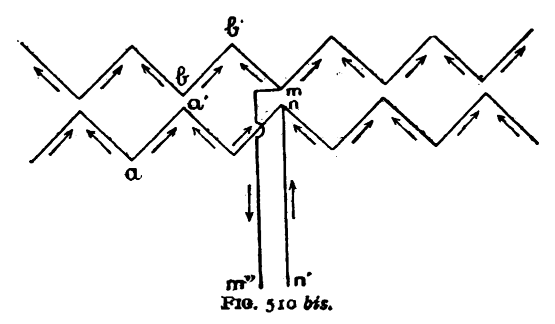


FIG. 510 *bis*.

de l'antenne. Ce sont ces composantes seules qui interviennent pour la propagation dans le plan horizontal, et l'antenne fournit une émission localisée dans le plan vertical normal au plan de l'antenne. L'énergie est émise à la fois vers l'avant et vers l'arrière : on renvoie vers l'avant celle qui est émise en arrière en disposant, à une distance égale à $\frac{\lambda}{4}$ en arrière de l'antenne, un réflecteur constitué simplement par un système de fils coudés identique à l'antenne proprement dite.

Pour augmenter l'énergie rayonnée, on peut superposer dans le même plan vertical plusieurs éléments identiques à celui de la figure 510 *bis*, de sorte que l'antenne prend l'aspect d'un grillage à mailles carrées. L'antenne à ondes projetées de Sainte-Assise est formée de deux baies juxtaposées; chacune d'elles comporte six fils coudés en dents de scie, disposés les uns au-dessus des autres, chaque fil comprenant 10 éléments demi-onde; chaque baie contient donc 60 éléments demi-onde; et, comme elle est construite pour l'onde de $15^m,50$, sa largeur est environ 55 mètres et sa hauteur environ 35 mètres. On voit combien l'emploi des ondes courtes projetées permet de réduire l'encombrement et par suite la difficulté d'installation et le prix des antennes.

453. Production des ondes amorties. — Le dispositif employé pour produire dans l'antenne des oscillations amorties ne diffère pas, en principe, de celui que nous avons étudié au paragraphe 311. Les trains d'oscillations amorties, de période $T = 2\pi \sqrt{LC}$, sont produits, dans un circuit de self-induction L, par la décharge d'un condensateur, de capacité C, chargé à une différence de potentiel V.

Les oscillations pourraient être produites directement dans le circuit de l'antenne, en intercalant l'étincelle entre l'antenne et la terre. Dans ce cas, la capacité C est la capacité de l'antenne, qui est toujours faible; comme on ne peut pas employer des étincelles très longues, à cause de la valeur trop élevée de leur résistance et de leur amortissement, la différence de potentiel V ne peut pas être extrêmement élevée, et l'énergie $\frac{1}{2}$ CV² mise en jeu à chaque décharge est faible. Aussi produit-on toujours la décharge oscillante dans un circuit primaire, qui agit par induction sur le circuit d'antenne, par l'un ou l'autre des montages Tesla ou Oudin (*fig.* 380 et 381, § 314).

On peut alors augmenter la puissance en employant dans le circuit primaire une batterie de condensateurs de grande capacité. On remarquera qu'on augmente en même temps la période des oscillations, c'est-à-dire la longueur d'onde : les émissions à grande puissance ne peuvent être obtenues qu'avec de grandes longueurs d'onde. Quand la puissance est grande — on a atteint des puissances d'une centaine de kilowatts — l'éclateur chauffe beaucoup : on doit le refroidir par un violent courant d'air, et faire éclater les étincelles entre des surfaces tournantes, pour qu'elles ne partent pas toujours du même point et ne produisent pas une usure trop rapide du métal.

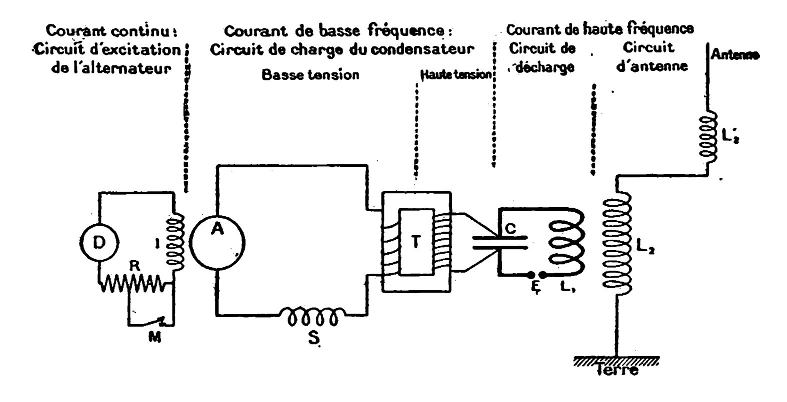


FIG. 511.

Il y a intérêt, pour augmenter la puissance, à augmenter le nombre de trains d'ondes par seconde; il est surtout extrêmement important, pour assurer une réception facile et sûre au téléphone (§ 319), que les trains d'onde se succèdent avec une fréquence musicale. La charge et la décharge du condensateur primaire doivent être répétées 500 ou 1.000 fois par seconde : on y arrive facilement en le réunissant aux deux bornes du secondaire d'un

transformateur à courants alternatifs ordinaire, dont le primaire est alimenté par un alternateur à fréquence musicale.

Le schéma du montage est représenté par la figure 511 : l'alternateur A charge le condensateur C par l'intermédiaire du transformateur T; la décharge s'effectue par l'étincelle E, dans le circuit CL_1, et l'énergie passe, par le transformateur de Tesla L_1L_2, dans le circuit d'antenne. La self L_1 du circuit primaire et la self d'antenne L_2 sont des selfs variables; leur réglage permet de régler la longueur d'onde, et de mettre les deux circuits en résonance. Leur couplage est d'ailleurs toujours assez lâche, de façon que les oscillations d'accouplement aient des périodes voisines des périodes propres des deux circuits (§ 315). De même, le circuit de l'alternateur contient une self S, dont le réglage permet de mettre en résonance, sur la fréquence de l'alternateur, l'ensemble des deux circuits basse fréquence, entre lesquels le transformateur à noyau de fer T établit un couplage très serré.

Pour la manipulation, il y a avantage à ce que le manipulateur M coupe des courants aussi faibles que possible. On le dispose en dérivation sur le rhéostat R qui règle le courant d'excitation fourni à l'inducteur I de l'alternateur par l'excitatrice D. Dans la position de repos, l'alternateur est peu excité, et la différence de potentiel qu'il fournit est insuffisante pour faire éclater l'étincelle E; quand on abaisse le manipulateur, l'excitation augmente, et l'étincelle jaillit.

Les ondes amorties ne sont plus employées, avec l'émission à étincelle musicale, que pour les postes à faible puissance (moins de 300 watts) installés à bord des navires, et en particulier pour les postes de secours, obligatoires sur certains navires à côté des postes du service commercial. Comme les récepteurs ne séparent bien les ondes des différentes longueurs d'onde qu'à la condition qu'elles soient entretenues (§ 457), l'émission d'un signal de détresse en ondes amorties ne peut manquer d'attirer l'attention de toutes les stations de bord qui se trouvent dans le voisinage.

454. Production d'ondes entretenues. — Le premier dispositif qui ait été utilisé industriellement pour la production des oscillations entretenues dans l'antenne est l'arc que nous avons décrit au paragraphe 313. L'oscillation fondamentale d'un arc est malheureusement toujours accompagnée d'harmoniques et d'oscillations parasites; aussi les arcs ont-ils aujourd'hui totalement disparu de la technique des radio-communications.

On employa ensuite des **alternateurs haute fréquence**, qui donnent directement des courants alternatifs ayant des fréquences de l'ordre de 20.000 et correspondant à des longueurs d'onde de l'ordre de 15.000 mètres. Pour assurer avec ces longueurs d'onde les services transcontinentaux (cf. § 459), on était arrivé à des puissances de plusieurs centaines de kilowatts : le poste de Sainte-Assise, près de Melun, installé en 1921, possédait deux alternateurs de 500 kilowatts, pouvant mettre 1.000 kilowatts dans l'antenne. Mais la possibilité d'assurer ces communications en ondes courtes avec des puissances beaucoup plus faibles et le développement de la technique des lampes électroniques ont fait disparaître les alternateurs comme avaient déjà disparu les arcs.

Les postes que l'on construit maintenant sont tous des **postes à lampes** : nous

avons déjà indiqué, aux paragraphes 313 et 361, comment l'emploi des lampes à trois électrodes permet d'entretenir les oscillations électriques d'un circuit. La figure 512 donne le schéma d'un des montages employés dans les postes d'émission à petites lampes.

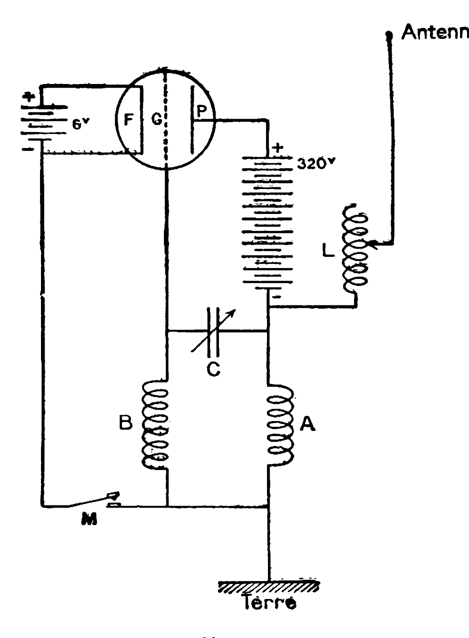


FIG. 512.

Le circuit oscillant de l'antenne contient une bobine A qui fait partie du circuit de plaque de la lampe; il agit d'autre part sur le circuit de grille par influence électrostatique, par l'intermédiaire d'un condensateur réglable C. Il transmet ainsi de l'énergie au circuit de grille; la lampe restitue au circuit de plaque, c'est-à-dire au circuit oscillant de l'antenne, une énergie plus grande, et le régime permanent est atteint quand l'excès de l'énergie restituée par la lampe au circuit de plaque sur celle que ce circuit lui fournit est égale à l'énergie perdue par l'effet Joule et par le rayonnement de l'antenne. La longueur d'onde d'émission peut être réglée, dans de très larges limites, en modifiant la self d'antenne L.

Pour émettre des signaux, il suffit d'interrompre, par le manipulateur M, l'un des fils nécessaires au fonctionnement. Pour émettre en téléphonie, il suffit de moduler l'intensité du courant d'antenne en modulant l'intensité, beaucoup plus faible, du courant de grille; on dispose en série avec la bobine B le microphone devant lequel on parle : ses variations de résistance se traduisent par des variations corrélatives du courant de grille, qui se reproduisent, considérablement amplifiées, dans le courant de plaque et le courant d'antenne.

L'énergie rayonnée par un poste à lampes est fournie par la source — redresseur alimenté par le secteur alternatif ou dynamo — placée dans le circuit de plaque. Mais la plus grande partie de l'énergie fournie est employée à échauffer la plaque lors du choc des électrons : le rendement ne dépasse guère 30 à 40 o/o. Avec les premières lampes, on pouvait employer une tension plaque de 320 volts et avoir un courant de plaque d'intensité moyenne égale à 30 milliampères; la puissance consommée était de l'ordre de 10 watts, et la puissance mise dans l'antenne de l'ordre de 3 ou 4 watts.

On augmente la puissance en mettant plusieurs lampes en parallèle; mais on l'augmente dans des proportions beaucoup plus considérables en employant des lampes plus grosses, pouvant supporter une tension de plaque plus élevée, et munies d'un filament de plus grande surface, pouvant émettre davantage d'électrons. Les puissances réalisées ont augmenté progressivement en même temps que la tension de plaque : il existe un très grand nombre

de postes donnant 15 à 30 kilowatts, avec des tensions de l'ordre de 10.000 volts, et on a réalisé des lampes capables, avec une tension de 20.000 volts, de mettre 100 à 120 kilowatts dans l'antenne. Une telle lampe consomme d'ailleurs une puissance d'alimentation de 200 à 250 kilowatts, le chauffage du filament employant 5 à 10 kilowatts, et le reste de l'énergie étant transformé en chaleur lors des chocs des électrons sur la plaque : il est nécessaire de refroidir la plaque par une circulation d'eau. Les lampes de puissance sont encore généralement des lampes dont tous les organes sont contenus dans une ampoule scellée en verre, dans laquelle on a fait le vide une fois pour toutes ; mais on emploie aussi des lampes démontables à enveloppe métallique, dans lesquelles une pompe entretient constamment le vide au cours du fonctionnement.

Les postes à lampes permettent d'obtenir des oscillations très pures et très stables. Pour obtenir les fréquences parfaitement constantes qui sont nécessaires à l'emploi des méthodes modernes de réception et aux émissions de téléphonie, on produit généralement les oscillations par un maître-oscillateur à quartz piézoélectrique (§ 321), et c'est après plusieurs étages d'amplification que ces oscillations sont transmises au circuit de grille des lampes de puissance dont nous venons de parler. En Téléphonie et en Radiodiffusion, les courants téléphoniques à transmettre, courants qui sont produits par un microphone placé dans un auditorium ou chez un abonné des réseaux généraux de téléphonie, sont aussi amplifiés par une série de lampes avant d'agir sur la lampe de puissance pour moduler le courant de haute fréquence qu'elle fournit à l'antenne, tandis qu'en Télégraphie la manipulation s'effectue sur le circuit de grille de l'un des étages de cet amplificateur de modulation.

455. Propagation des ondes. — La question de la propagation des ondes hertziennes autour de la terre domine toute la technique des radio-communications, par le choix qu'elle impose des longueurs d'onde et des puissances à employer. Aux très petites distances, les lois de la propagation sont celles d'une onde cylindrique de nature quelconque se propageant rectilignement dans le plan horizontal à partir de l'antenne d'émission ; mais dès que la portée dépasse quelques kilomètres, elles sont modifiées par l'existence de la courbure de la terre et les propriétés de l'atmosphère. C'est ainsi que la propagation se fait en général mieux la nuit que le jour, et sur mer que sur terre.

Jusqu'en 1919, les études expérimentales ont surtout porté sur la propagation des ondes de longueur d'onde supérieure à 500 mètres. Pour de telles ondes, le rapport de la puissance reçue à la puissance rayonnée peut être représentée par une formule empirique contenant le facteur $e^{-\frac{k}{\sqrt{\lambda}}}$, de sorte qu'aux grandes distances la puissance reçue, pour une puissance d'émission donnée, croît toujours avec la longueur d'onde λ, malgré la diminution du rendement de l'antenne émettrice. On avait été ainsi amené à choisir pour les radiocommunications des longueurs d'onde d'autant plus grandes que la distance à franchir est plus grande ; les longueurs d'onde employées allaient de quelques centaines de mètres pour les communications côtières ou celles d'un avion avec le sol jusqu'à 15.000 et 25.000 mètres pour les communications transatlantiques. La puissance reçue dans ces dernières communications était d'ailleurs

extrêmement faible, et il fallait dépenser plusieurs centaines de kilowatts dans l'antenne d'émission pour recueillir des fractions de microwatts dans l'antenne de réception.

Depuis 1920, les études ont été étendues aux **ondes courtes**, de longueurs d'onde comprises entre 10 et 150 mètres, et ont montré que des modifications profondes des phénomènes de propagation apparaissent lorsqu'on abaisse la longueur d'onde au-dessous de 200 mètres. Les puissances reçues peuvent être incomparablement (10^{20} ou 10^{30}) fois plus grandes que ne l'indique la formule empirique que nous signalions tout à l'heure: on a pu traverser l'Atlantique avec une puissance d'émission de 2 watts. Mais en même temps, les phénomènes deviennent beaucoup plus complexes; il existe des zones de silence, c'est-à-dire qu'une onde qu'il est impossible de détecter à quelques centaines de kilomètres de la station d'émission est à nouveau reçue à quelques milliers de kilomètres; l'intensité de la réception varie dans de très grandes proportions avec l'heure de la journée, une communication très facile la nuit devenant impossible le jour; les signaux s'affaiblissent ou même disparaissent subitement pendant quelques secondes pour reprendre ensuite leur intensité primitive. Ces irrégularités de transmission ont longtemps empêché l'utilisation des ondes courtes aux services commerciaux, et ce n'est qu'assez récemment que l'on a réussi à profiter effectivement de l'économie considérable de puissance qu'entraîne leur emploi pour les liaisons transatlantiques (§ 459).

L'explication théorique des divers phénomènes qui se présentent dans la propagation des ondes autour de la Terre est encore fort incomplète. Il est certain depuis longtemps que les phénomènes de diffraction ne suffisent pas à expliquer cette propagation; les études sur les ondes longues conduisirent à admettre qu'elles se propagent dans l'atmosphère terrestre entre deux sphères conductrices, constituées l'une par le sol, l'autre par les régions supérieures de l'atmosphère. L'existence de cette couche atmosphérique conductrice, dont la base serait à une altitude de 80 à 100 kilomètres, est due sans doute à l'ionisation intense produite dans l'air à basse pression par les rayons cathodiques et les rayons ultra-violets provenant du soleil; elle est confirmée par l'étude du magnétisme terrestre et des aurores boréales. La propagation d'une onde le long de la surface courbe de la Terre serait donc due en somme à une série de réflexions, accompagnées d'une absorption partielle, sur les deux surfaces sphériques conductrices. Quant aux différences d'intensité entre les réceptions diurnes et les réceptions nocturnes, elles seraient dues à ce que les rayons solaires produisent dans la journée l'ionisation de couches relativement basses de l'atmosphère, ce qui fait que les rayons s'incurvent avant d'avoir atteint la couche supérieure et reviennent à la Terre, non sans avoir été partiellement absorbés par le milieu légèrement conducteur.

Les nombreuses expériences faites depuis quelques années sur la propagation des ondes courtes semblent bien confirmer cette théorie dans ses grandes lignes. L'explication de l'absorption par la conductibilité ionique de l'atmosphère rend bien compte de la faiblesse de cette absorption pour les ondes de haute fréquence ($\lambda < 200$ m.), les oscillations des ions sous les fréquences élevées ne pouvant pas prendre une amplitude suffisante pour emprunter beaucoup d'énergie à ces ondes. D'autre part, l'explication des zones de silence est extrêmement simple (*fig.* 513) : une telle zone commence au point A où cessent d'être perceptibles les rayons directs OA, amortis par les pertes par courants

induits dans le sol et dans tous les obstacles rencontrés ; elle cesse au point C, où parviennent les premiers rayons OBC qui ont rencontré en B la couche ionisée sous un angle d'incidence suffisant pour assurer la réflexion totale. L'influence des rayons solaires sur la propagation est bien mise en évidence par la coïncidence, établie aujourd'hui de façon certaine, entre les évanouissements brusques de la réception des ondes courtes et les éruptions solaires observées au spectrohélioscope. Mais il ne faut pas se dissimuler que de nombreux détails restent à expliquer ; la propagation des ondes dépend essentiellement de l'atmosphère et de son état d'ionisation ; il s'agit là de phénomènes analogues à ceux qu'étudie la météorologie, et il n'est pas étonnant que l'on ne soit pas encore arrivé à distinguer les multiples influences qui peuvent agir.

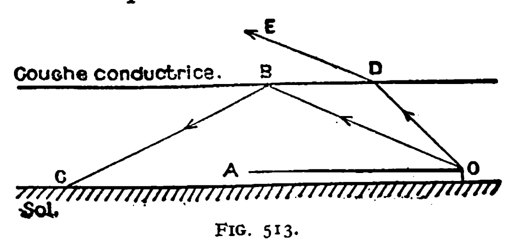


FIG. 513.

II. — *RÉCEPTION*

456. Circuit de réception. — La réception se fait presque toujours sur une **antenne**, analogue à l'antenne d'émission. Lorsque l'onde électromagnétique $\vec{E}$, $\vec{H}$ arrive sur une antenne formée d'un fil vertical AB (*fig.* 514), le champ électrique alternatif $\vec{E}$, parallèle à l'antenne, y produit un courant. L'antenne, de hauteur l, est le siège d'une force électromotrice El ; si l'onde est une onde entretenue de pulsation ω, l'intensité efficace du courant créé dans le circuit d'antenne est donnée par la formule usuelle des courants alternatifs :

$$i_e = \frac{E_e l}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

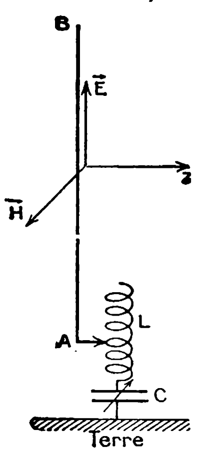


FIG. 514.

On obtient un courant de réception aussi intense que possible en mettant le circuit de l'antenne en résonance sur la période des ondes à recevoir ($LC\omega^2 = 1$), et en réduisant autant que possible sa résistance. On réalise la résonance en modifiant la période propre de l'antenne, par l'addition d'une self L, qui permet d'augmenter la période, ou d'un condensateur C, qui permet de la diminuer. On emploie des antennes rayonnant peu, c'est-à-dire ayant une faible résistance de rayonnement, et on réduit autant que possible les résistances de l'antenne, de la bobine de self, et surtout de la prise de terre.

On supprime complètement la résistance de prise de terre, et on réduit la résistance de rayonnement, en recevant sur un circuit oscillant fermé. Le circuit de réception est alors identique, dans son principe, au résonateur de

Blondlot (§ 329) ; il est constitué par un **cadre** A de quelques mètres de côté, comportant quelques spires de gros fil fermé sur un condensateur réglable C qui permet de réaliser la résonance (*fig.* 516). Si le champ magnétique $\vec{H}$ de l'onde à recevoir est perpendiculaire au plan du cadre, et si le cadre comporte n spires de surface S, le flux magnétique qui traverse le circuit de réception est nSH, et la force électromotrice induite est $nS\,dH/dt$; sa valeur efficace est $nS\omega H_e$.

De même qu'un oscillateur fermé rayonne moins d'énergie qu'un oscillateur ouvert, de même un cadre fermé reçoit moins d'énergie qu'une antenne de dimensions comparables. Son principal avantage est que la f. é. m. qui y est créée dépend de la direction d'où provient l'onde ; elle est maximum quand le champ magnétique est normal au plan du cadre, c'est-à-dire quand le cadre est orienté dans la direction du poste émetteur ; elle est nulle quand le cadre est orienté dans la direction perpendiculaire. Il est par conséquent possible d'installer un poste récepteur à proximité d'un poste transmetteur, et de recevoir pendant la transmission même, à condition d'orienter le cadre de façon qu'il ne reçoive pas l'émission du poste transmetteur voisin. Signalons en passant que la détermination de l'orientation à donner à un cadre mobile pour cesser de recevoir un poste est assez précise pour fournir la direction de ce poste avec une erreur qui ne dépasse pas 1 degré : c'est le principe de la **radiogoniométrie**, utilisée pour renseigner sur leur position les navires ou les avions.

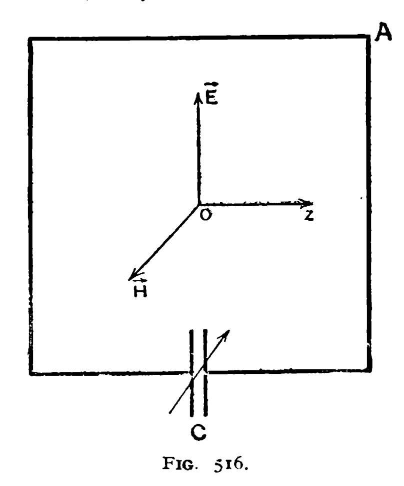


FIG. 516.

Il est à noter que les avantages de sélectivité suivant la direction des ondes se retrouvent, pour les ondes courtes, dans l'emploi à la réception d'antennes identiques à l'antenne d'émission à ondes projetées décrite à la fin du paragraphe 452.

457. Syntonie. — La multiplication des communications de télégraphie sans fil exige qu'il soit possible de recevoir la transmission qu'on veut écouter sans qu'elle soit brouillée par les autres transmissions, faites simultanément par d'autres postes sur des longueurs d'ondes différentes. L'onde de longueur d'onde λ, sur laquelle est accordé le circuit de réception, doit y produire un courant appréciable ; l'onde de longueur d'onde $\lambda + \Delta\lambda$ ne doit y produire qu'un courant faible. On obtient ce résultat en réalisant une résonance aiguë : il faut pour cela réduire autant que possible la résistance du circuit de réception.

La *syntonie*, c'est-à-dire l'acuité de la résonance, est accrue en observant le courant dans un circuit oscillant secondaire S (*fig.* 517) sur lequel le circuit d'antenne agit par un couplage assez lâche pour que chacun des circuits résonne, sur la force électromotrice à laquelle il est soumis, comme s'il était seul. Supposons les deux circuits accordés sur la longueur d'onde λ, et ayant des

résonances également aiguës ; lorsque la f. é. m. dans l'un d'eux conserve une valeur efficace constante, et que sa longueur d'onde passe de λ à $\lambda + \Delta\lambda$, l'intensité correspondante du courant tombe de 1 à 0,1. Lorsque la f. é. m. dans l'antenne reste constante, et que sa longueur d'onde passe de λ à $\lambda + \Delta\lambda$, l'intensité du courant d'antenne tombe de 1 à 0,1 ; il en est de même de la f. é. m. dans le secondaire, et l'intensité du courant secondaire est réduite, non pas dans le rapport de 1 à 0,1, mais dans le rapport de 1 à 0,01. En réalité, l'amélioration de la syntonie par l'adjonction d'un circuit secondaire est encore plus grande, car ce circuit, dont les dimensions sont petites et le rayonnement nul, peut avoir une résistance plus faible que le circuit d'antenne, et fournir par lui-même une résonance déjà aiguë.

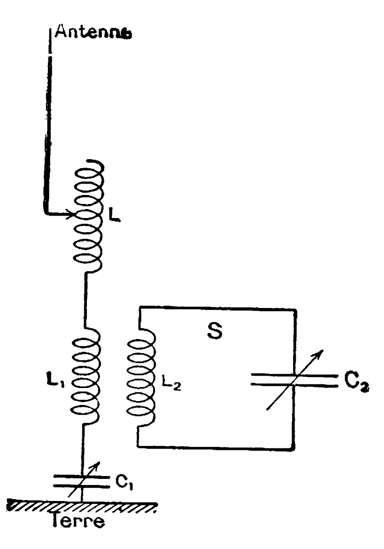


FIG. 517.

On arrive facilement à réaliser une syntonie permettant de séparer complètement deux émissions dont les longueurs d'onde diffèrent de 1 à 2 %. On peut ainsi faire des centaines de transmissions simultanées, échelonnées de 2 en 2 %, dans toute la gamme des longueurs d'onde qui s'étend de 45 mètres à 30.000 mètres : chaque poste récepteur accorde ses deux circuits sur la réception qu'il veut prendre, et n'entend que celle-là. Remarquons d'ailleurs que la sélection est encore facilitée par l'emploi d'un cadre ou d'une antenne à propriétés directives, et dans la réception à l'hétérodyne (§ 319), par le choix du son de réception.

Il importe de remarquer que le temps nécessaire à l'établissement du régime d'oscillations forcées dans le circuit de réception est d'autant plus long que son amortissement est plus faible, et la résonance plus aiguë (§§ 302 et 303). La réalisation d'une syntonie aiguë n'est possible que grâce à l'emploi des ondes entretenues, à période rigoureusement constante : c'est la principale des raisons qui ont conduit à généraliser la substitution des ondes entretenues aux ondes amorties. La stabilité parfaite de la période d'émission représente d'ailleurs une des conditions les plus difficiles à réaliser dans les postes d'émission puissants, surtout en ondes courtes. On y arrive, par des procédés que nous ne décrirons pas ici, en asservissant le poste à un émetteur de faible puissance qu'on peut plus facilement construire de façon que sa stabilité soit suffisante.

458. Détection et amplification. — Le problème de la réception est identique à celui que nous avons étudié aux paragraphes 318 et 319 : il s'agit de déceler l'existence dans un circuit de courants de haute fréquence et d'intensité faible. Les dispositifs employés sont ceux que nous avons déjà décrits ; ils permettent d'obtenir une réception forte lorsque la puissance disponible sur l'antenne de réception est de l'ordre du centième de microwatt.

Si l'on reçoit des ondes amorties, il suffit (§ 319) de placer en dérivation

entre les bornes du condensateur C_2 (*fig.* 518) un circuit constitué par un détecteur à galène D et un téléphone T : pendant l'émission des signaux, on entend dans le téléphone un son dont la fréquence est celle des trains d'ondes de l'émission. Avec une émission musicale, on obtient une note pure, facile à distinguer. Les téléphones employés sont des téléphones de grande sensibilité et de grande résistance (2.000 à 3.000 ohms) ; on shunte le téléphone par un petit condensateur C′ qui permet aux oscillations de haute fréquence de parvenir au détecteur. Le même montage permet de recevoir les communications par téléphonie sans fil : aux ondes entretenues reçues par l'antenne correspondent des courants redressés dont l'intensité reproduit les modulations de l'intensité des ondes; le téléphone T, traversé par ces courants, reproduit les sons émis devant le microphone qui module l'émission.

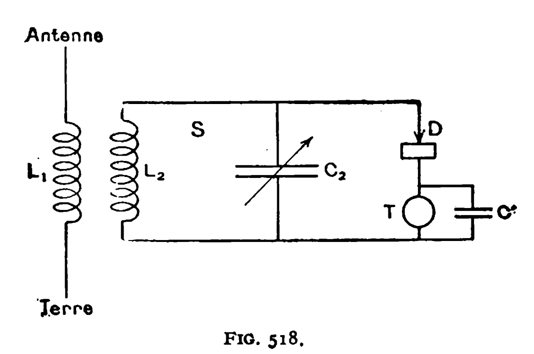


FIG. 518.

Si, au contraire, on reçoit par le même montage les signaux Morse de la télégraphie sans fil en ondes entretenues, le téléphone est parcouru, pendant toute la durée d'un signal, par un courant redressé d'intensité constante, et ne rend aucun son. On emploie alors la **réception par battements.** On place, à côté du circuit secondaire de réception, un petit oscillateur à lampes, dit *hétérodyne,* réglé sur une fréquence ν' un peu différente de la fréquence ν des ondes à recevoir. Il se superpose, aux oscillations à recevoir de fréquence ν, des oscillations de fréquence ν' induites par le circuit de l'hétérodyne, et on perçoit dans le téléphone T, après détection, un son de fréquence $n = \nu - \nu'$ (§ 319). Comme on peut agir à volonté sur la fréquence et sur l'intensité du courant produit par l'hétérodyne, on peut amener le son à avoir la hauteur n pour laquelle le téléphone et l'oreille présentent le maximum de sensibilité, et on peut amener l'intensité efficace moyenne du courant qui traverse le détecteur à avoir la valeur pour laquelle la détection se fait le mieux. L'emploi de l'hétérodyne a permis, par suite, d'accroître dans de notables proportions la sensibilité de la réception.

C'est le même principe que met en jeu le *changement de fréquence,* ou **superhétérodyne,** souvent employé dans la réception des ondes courtes. Si l'on reçoit par exemple une onde radiotéléphonique de 100 mètres de longueur d'onde, produisant dans l'antenne un courant de fréquence $\nu = 3.000.000$, on lui superpose une oscillation locale de fréquence $\nu' = 2.900.000$; les battements obtenus, de fréquence $n = \nu - \nu' = 100.000$, constituent un courant, dit de moyenne fréquence, dont l'intensité varie avec une fréquence musicale suivant la modulation de l'onde reçue. Les circuits qui suivent le changement de fréquence sont accordés sur la moyenne fréquence : comme une variation de la fréquence ν produit une variation relative beaucoup plus grande de la fréquence n (une variation de 1 0/0, soit $\Delta\nu = 30.000$, de la fréquence $\nu = 3.000.000$ produit par exemple une variation de 30 0/0 de la fréquence $n = 100.000$), le

changement de fréquence permet un accroissement notable de la sélectivité et une élimination parfaite des brouillages.

Les récepteurs modernes sont toujours basés sur les principes que nous venons d'indiquer, principes qui tous étaient parfaitement connus en 1918; l'emploi des amplificateurs à lampes a naturellement permis d'augmenter considérablement leur sensibilité, et les perfectionnements des lampes ont permis d'améliorer la qualité musicale de la réception, en employant pour chaque fonction une lampe de construction spéciale, et en remplaçant dans certains cas les lampes à trois électrodes par des lampes à plusieurs grilles (*pentodes*, *heptodes*, *octodes*). Il est impossible de décrire ici tous les types de montages employés : nous nous bornerons à quelques exemples.

Pour recevoir des ondes longues de radiodiffusion ($\lambda > 200^m$), on peut par exemple amplifier une à deux fois le courant de haute fréquence du circuit secondaire de réception par des pentodes, puis le redresser par une lampe détectrice. Les deux circuits de la lampe détectrice peuvent d'ailleurs être couplés comme dans un oscillateur à lampes (§ 454), de façon à restituer aux circuits à chaque oscillation l'énergie perdue par son amortissement (§ 361) ; c'est le *montage à réaction* ; la diminution artificielle de l'amortissement ainsi réalisée augmente dans de très grandes proportions la sensibilité et la sélectivité du récepteur. Les courants de fréquence musicale fournis par la lampe détectrice seront enfin amplifiés par une ou plusieurs lampes basse fréquence, jusqu'à ce qu'on ait obtenu la puissance nécessaire pour actionner le haut-parleur que l'on veut employer à la production du son.

Les récepteurs d'ondes courtes des liaisons commerciales comprennent d'abord un amplificateur sur la fréquence de l'onde courte, qui peut comporter jusqu'à cinq étages d'amplification ; on effectue ensuite le changement de fréquence, soit par une hétérodyne séparée, soit par une octode agissant simultanément comme oscillatrice hétérodyne et comme amplificatrice. Les courants sont encore amplifiés par un amplificateur à moyenne fréquence, puis redressés par une lampe détectrice. En Téléphonie, on a ainsi transformé le courant modulé de haute fréquence en un courant redressé dont l'intensité varie avec une fréquence musicale suivant les modulations de l'onde reçue : c'est ce courant qui, après amplification par un amplificateur à basse fréquence, est envoyé dans la ligne de l'abonné. En Télégraphie, le courant haute fréquence d'intensité constante qui correspond à un signal est transformé en un courant redressé d'intensité constante, qui a les propriétés d'un courant continu, et qu'on envoie dans les appareils d'enregistrement du bureau de réception. Dans les deux cas, le récepteur est complété par un *régulateur antifading* (cf. § 459) qui maintient constant le courant issu du détecteur, quelles que soient les variations de l'amplitude de l'onde reçue : c'est un amplificateur à courant continu, alimenté par le courant qui sort du détecteur, et agissant sur les tensions de grille des lampes de l'amplificateur haute fréquence, de façon à modifier dans le sens convenable l'amplification qu'il fournit.

459. Emploi commercial de la Télégraphie et de la Téléphonie sans fil. — Nous n'insisterons par sur l'importance de la Téléphonie sans fil au point de vue de la radiodiffusion : nous dirons simplement que le nombre des stations émettrices de radiodiffusion réparties à la surface du globe au début de 1932 était d'environ 1.100 dont 600 aux Etats-Unis, et qu'à la même époque

on estimait le nombre de postes récepteurs à 30 millions dont 14 millions en Europe et 13 millions aux Etats-Unis. Nous ne dirons rien non plus des émissions de Télévision qui sont tentées actuellement de divers côtés, mais qui n'en sont encore qu'au début de la période d'expérimentation.

La Télégraphie et la Téléphonie sans fil sont les seuls moyens de communication dont puissent disposer les navires et les avions. En dehors de leur emploi aux communications commerciales, elles rendent d'importants services au point de vue de la sauvegarde de la vie humaine et de la sécurité de la navigation. Des milliers de personnes ont été sauvées grâce aux *appels de détresse* envoyés par Télégraphie sans fil; la *transmission des bulletins météorologiques* et les *déterminations radiogoniométriques de position* (§ 456) permettent d'éviter de nombreux accidents. Enfin les **signaux horaires,** émis plusieurs fois par jour par plus de cinquante stations réparties sur toute la surface de la Terre, et donnant, par un signal bref précédé de signaux préparatoires, l'heure exacte de Greenwich à 0,1 seconde — et quelquefois 0,01 seconde — près, ont supprimé pour les navigateurs toutes les difficultés de réglage des chronomètres et de détermination de la longitude.

Aux réseaux côtiers et aériens, qui travaillent généralement avec des longueurs d'onde de quelques centaines de mètres, se superposent des réseaux de communications à grandes distances, travaillant avec de très grandes ou de très petites longueurs d'onde. La télégraphie sans fil tend actuellement à supplanter, pour les communications lointaines, et particulièrement pour les communications transocéaniques, la télégraphie avec fil. Elle présente l'immense avantage de supprimer complètement les frais très élevés d'installation et d'entretien des lignes très longues et des câbles sous-marins; elle présente aussi, au point de vue politique, l'avantage de fournir des liaisons qui échappent au contrôle des puissances dont le territoire est traversé par la ligne aérienne ou dont les flottes sont maîtresses des mers.

La première condition à remplir pour qu'une transmission à grande distance puisse fonctionner d'une façon pratique est que la réception puisse être assurée à tout instant. Nous avons vu comment on avait accru dans d'énormes proportions la sensibilité de la réception; mais cela ne saurait suffire. Les principaux ennemis de la Télégraphie sans fil sont les parasites, décharges atmosphériques d'origine mal connue, qui produisent des bruits dans le téléphone, des tracés à coudes brusques dans les appareils enregistreurs, et viennent ainsi troubler la réception; dans nos régions, ils sont plus importants le jour que la nuit, et plus intenses en été qu'en hiver. Les amplificateurs amplifient leur intensité en même temps que celle des ondes utiles; le seul moyen de les éliminer sûrement est d'avoir une transmission assez forte pour les dépasser en intensité. Aussi a-t-on dû, tant qu'on s'en est tenu aux grandes longueurs d'onde, et malgré l'augmentation de la sensibilité des réceptions, construire des postes émetteurs de plus en plus puissants. Prenons comme exemple les communications entre la France et l'Amérique. A la Tour Eiffel qui, avec ses 60 kilowatts dans l'antenne, ne pouvait communiquer avec les États-Unis que quand les conditions étaient favorables, a succédé en 1915 le poste de Lyon, qui mettait 150 kilowatts dans l'antenne, et qu'on entendait constamment aux États-Unis en dehors des heures chaudes de l'été; à Lyon a succédé, en 1920, Croix-d'Hins, avec 500 kilowatts dans l'antenne, qu'on entendait aux États-Unis à une heure quelconque d'un jour quelconque; à Croix-d'Hins a succédé, en 1922,

le poste de Sainte-Assise, qui pouvait mettre 1.000 kilowatts dans l'antenne, et communiquer avec l'Asie et l'Amérique du Sud dans les mêmes conditions de sécurité que Croix-d'Hins avec l'Amérique du Nord.

Mais, depuis 1922, le développement de la technique des ondes courtes a complètement modifié le sens de l'évolution; nous avons vu en effet (§ 455) qu'elles permettent d'obtenir la même intensité à la réception avec une puissance beaucoup moins grande à l'émission. Les parasites atmosphériques, qui sont de plus en plus gênants pour les ondes longues à mesure qu'on accroît la longueur d'onde, ont une importance beaucoup moins grande dans les liaisons à ondes courtes, et sont encore diminués par l'emploi d'antennes de réception qui ne sont sensibles qu'aux ondes provenant d'une direction bien déterminée (§§ 452 et 456). Les irrégularités de la propagation des ondes courtes (§ 455), qui paraissaient tout d'abord s'opposer à leur emploi pour un service commercial, ont cessé d'être un obstacle, d'une part quand on a su (§ 458) réaliser des dispositifs compensant à chaque instant les variations brusques d'intensité qui constituent le *fading*, d'autre part quand on s'est aperçu qu'il suffisait de disposer de plusieurs longueurs d'onde convenablement choisies pour pouvoir assurer la transmission à peu près à n'importe quelle heure. C'est ainsi que les *liaisons intercontinentales par ondes projetées* (§ 452) telles que les liaisons entre Sainte-Assise et Saïgon, ou entre Sainte-Assise et l'Amérique du Sud, sont assurées de jour avec des longueurs d'onde de 14 à 17 mètres, et de nuit avec des ondes de 25 à 40 mètres, tandis que les ondes intermédiaires, de 18 à 20 mètres, conviennent lorsque le parcours est partiellement éclairé par le soleil et partiellement dans l'obscurité; ces diverses liaisons sont assurées avec des puissances de 15 ou 25 kilowatts, alors que l'emploi des ondes longues exigeait des puissances de l'ordre de 500 kilowatts.

La seconde condition à remplir pour réaliser une transmission commerciale est de débiter un nombre suffisant de mots à l'heure. Un premier progrès, rendu possible par l'emploi de la réception sur cadre, a été apporté par la séparation de l'émission et de la réception : c'est ainsi qu'au poste émetteur de Sainte-Assise est conjugué un poste récepteur situé à Villecresnes, à mi-chemin entre Melun et Paris. Le poste transmetteur peut émettre sans arrêt, tandis que le poste récepteur reçoit, sans être gêné par cette émission, grâce à une orientation convenable des cadres. Le poste récepteur dispose de plusieurs cadres, sur lesquels il peut recevoir simultanément plusieurs correspondants; de même, le poste émetteur de Sainte-Assise dispose de plusieurs antennes et de plusieurs émetteurs, qui peuvent fonctionner séparément ou être réunis en parallèle : on peut ainsi proportionner la puissance dépensée aux difficultés de la transmission, et le poste peut envoyer simultanément, sur des longueurs d'ondes différentes, jusqu'à quatre télégrammes. Ajoutons que les relais de manipulation du poste de Sainte-Assise sont commandés de Paris, par une transmission avec fil, et que les courants reçus au poste de Villecresnes sont de même envoyés à Paris : le manipulateur et le lecteur se tiennent dans la même salle d'un bureau central, et communiquent avec le poste correspondant dans les mêmes conditions que dans une transmission télégraphique ordinaire.

Un second progrès a été apporté par l'emploi d'appareils automatiques de transmission et de réception, qui permettent d'obtenir un débit bien supérieur à celui de la manipulation à la main et de la lecture au son. Pour l'émission,

il n'y a aucune difficulté : il suffit d'actionner les relais qui commandent le manipulateur par un des dispositifs automatiques, Baudot ou Wheatstone, utilisés couramment en télégraphie ordinaire. Pour la réception, il faut amplifier suffisamment le courant pour actionner un Baudot récepteur ou un galvanomètre enregistreur.

Dans les liaisons très chargées, comme les liaisons Londres-Melbourne ou Londres-le Cap, les dispositifs automatiques ont permis de maintenir pendant plusieurs heures des vitesses de transmission atteignant et dépassant 350 mots par minute; mais, dans la plupart des liaisons, le trafic peut être entièrement assuré avec des vitesses de l'ordre de 100 mots par minute. C'est un débit bien supérieur aux 20 mots à la minute que peut recevoir au maximum un lecteur au son; c'est même un débit supérieur à celui que peut fournir un câble transatlantique, dans lequel l'importance de la capacité à charger à chaque signal ne permet guère de dépasser 50 mots à la minute.

D'un autre côté, l'emploi des ondes courtes a permis d'établir entre les différents continents des *liaisons téléphoniques* que les câbles sous-marins n'avaient jamais permis de réaliser avec une sécurité suffisante pour donner lieu à une exploitation commerciale. Nous avons déjà indiqué comment le courant de l'antenne d'émission peut être modulé par le courant téléphonique provenant d'un abonné (§ 454), et comment le courant de l'antenne de réception peut être transmis après détection à un autre abonné (§ 458); nous ne décrirons pas les dispositifs, très complexes, qui assurent une bonne communication quelles que soient les distances des abonnés aux postes d'émission et de réception, et qui permettent aux deux correspondants de passer instantanément de l'émission à la réception. La première liaison téléphonique transatlantique a été ouverte au trafic commercial en 1927; le développement de ces liaisons a été tel qu'en 1932 plus de 90 o/o des abonnés au téléphone du monde entier avaient la possibilité d'entrer en conversation directe. Les frais de ces liaisons sont d'ailleurs encore assez élevés : une conversation de 3 minutes coûtait, en 1933, 450 francs entre la France et l'Indo-Chine, 787 francs entre Paris et New-York, 1087 francs entre Paris et San Francisco.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTROSTATIQUE

CHAPITRE PREMIER

Champs de vecteurs : champ électrique.

I. — *Champ de vecteurs et potentiel.*

II. — *Flux d'un vecteur à travers une surface.*

III. — *Exemples de champs de vecteurs : champ électrique.*

CHAPITRE II

Champ newtonien. — Loi de Coulomb.

I. — *Champ newtonien : potentiel et flux.*

II. — *Étude de quelques champs newtoniens.*

III. — *Loi de Coulomb.*

CHAPITRE III

Propriétés générales des corps conducteurs.

I. — *Hypothèses fondamentales.*

II. — *Étude du champ à l'intérieur et au voisinage d'un conducteur en équilibre.*

III. — *Phénomènes d'influence.*

CHAPITRE IV

Équilibre des conducteurs.

I. — *Problème de l'équilibre des conducteurs.*

II. — *Écrans électriques.*

III. — *Étude de quelques systèmes particuliers.*

CHAPITRE V

Capacité. — Condensateurs.

I. — *Capacité et coefficients d'influence.*

II. — *Condensateurs.*

CHAPITRE VI

Énergie électrique.

CHAPITRE VII

Électromètres.

CHAPITRE VIII

Mesures électrostatiques.

III. — *Mesures électrostatiques.*

DEUXIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE IX

Hypothèses et lois fondamentales.

I. — *Hypothèses fondamentales.*

II. — *Action d'un champ uniforme sur un aimant.*

III. — *Actions subies et champ créé par un petit aimant.*

CHAPITRE X

Mesures magnétiques.

I. — *Méthodes d'orientation.*

II. — *Méthodes d'oscillations.*

III. — *Unités magnétiques.*

CHAPITRE XI

Étude des milieux aimantés.

I. — *Répartition des masses magnétiques à l'intérieur d'un aimant.*

CHAPITRE XIV

Loi d'Ohm.

I. — *Conducteurs linéaires.*

II. — *Réseaux de conducteurs.*

III. — *Milieu conducteur homogène.*

CHAPITRE XV

Énergie électrique.

I. — *Loi de Joule.*

II. — *Unités de résistance et de différence de potentiel.*

III. — *Force électromotrice.*

IV. — *Énergie électrique.*

CHAPITRE XVI

Électrolyse.

I. — *Lois de l'électrolyse.*

II. — *Théorie des ions.*

II. — *Ferromagnétisme.*

III. — *Applications.*

CHAPITRE XX

Diélectriques.

I. — *Équilibre électrique.*

II. — *Courant de déplacement.*

III. — *Diélectriques réels.*

CHAPITRE XXI

Action des champs magnétiques sur les courants.

I. — *Action sur un circuit fermé.*

II. — *Action sur un élément de courant.*

CHAPITRE XXII

Phénomènes d'induction.

I. — *Lois générales de l'induction.*

II. — *Expressions analytiques.*

CHAPITRE XXIII

Induction par les courants variables.

I. — *Induction mutuelle et self-induction.*

II. — *Étude de quelques cas particuliers.*

III. — *Bobine d'induction.*

CHAPITRE XXIV

Énergie électromagnétique.

I. — *Circuits mobiles dans un champ magnétique invariable.*

II. — *Circuits fixes parcourus par des courants d'intensité variable.*

CINQUIÈME PARTIE

MESURES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE XXV

Galvanomètres.

I. — *Mouvement d'un système mobile autour d'un axe.*

II. — *Galvanomètres à aimant mobile.*

III. — *Galvanomètres à cadre mobile.*

IV. — *Galvanomètre balistique.*

CHAPITRE XXVI

Mesures électromagnétiques absolues.

I. — *Généralités sur les mesures électriques.*

II. — *Détermination de l'ampère.*

III. — *Détermination de l'ohm.*

CHAPITRE XXVII

Rapport des unités.

I. — *Rappel des définitions des différents systèmes d'unités.*

II. — *Rapports des unités électromagnétiques et des unités électrostatiques.*

III. — *Mesure du rapport* **c**.

SIXIÈME PARTIE

COURANTS ALTERNATIFS

CHAPITRE XXVIII

Énergie électrique et loi d'Ohm.

I. — *Fonctions périodiques et fonctions sinusoïdales.*

II. — *Notions préliminaires sur les courants alternatifs.*

III. — *Application de la loi d'Ohm.*

CHAPITRE XXIX

Actions électromagnétiques.

I. — *Champs magnétiques alternatifs.*

II. — *Champs tournants.*

CHAPITRE XXX

Courants de haute fréquence.

I. — *Production des courants de haute fréquence.*

II. — *Mesures en haute fréquence.*

CHAPITRE XXXI

Propagation du champ électromagnétique.

I. — *Théorie de Maxwell.*

II. — *Expériences de Hertz.*

III. — *Propagation le long des fils.*

IV. — *Identité des ondes électromagnétiques et des ondes lumineuses.*

SEPTIÈME PARTIE

LES BASES EXPÉRIMENTALES DES THÉORIES MODERNES

CHAPITRE XXXII

Généralités sur les théories électroniques.

I. — *Courants de convection.*

II. — *Mouvement d'une particule électrisée dans un champ électrique ou dans un champ magnétique.*

III. — *La charge élémentaire et l'électron.*

IV. — *L'électron et la* [illegible]

CHAPITRE XXXIII

Étude des courants dans le vide absolu.

I. — *Phénomènes photo-électriques.*

II. — *Phénomènes thermo-ioniques.*

CHAPITRE XXXIV

Étude des courants dans les gaz.

I. — *Les ions gazeux.*

II. — *Ionisation par chocs.*

Imprimé en France - S. F. I. L. et Imp. Marc TEXIER réunies — Poitiers.
Librairie Masson et Cie - Paris. Dépôt légal n° 513 : 1er trimestre 1947.
MARCA REGISTRADA